

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI di ROMA “TOR VERGATA”**

Dipartimento di Economia e Finanza

Finanza Quantitativa - Esercizi e complementi 1-2 - Soluzioni

1. Sia  $y_t$  il processo AR(1)  $y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t$ ,  $\epsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ . Mediante la legge dei valori attesi iterati si valuti  $E(y_t | \mathcal{F}_{t-2})$ .

**Soluzione** Da  $\mathcal{F}_{t-2} \subset \mathcal{F}_{t-1}$  segue

$$\begin{aligned} E(y_t | \mathcal{F}_{t-2}) &= E[E(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-2}] \\ &= E[\phi y_{t-1} | \mathcal{F}_{t-2}] \\ &= \phi^2 y_{t-2}. \end{aligned}$$

2. Siano  $Y \sim f(y)$  e  $X \sim f(x)$  due v.c. continue con densità congiunta  $f(x, y)$ . Mediante la legge dei valori attesi iterati si mostri che  $\text{Var}(Y) = \text{Var}[E(Y|X)] + E[\text{Var}(Y|X)]$ .

Si consideri ora un processo AR(1) condizionatamente omoschedastico tale che  $\text{Var}(y_t | Y_{t-1}) = \sigma^2$  e  $E(y_t | Y_{t-1}) = \phi y_{t-1}$ . Si utilizzi il risultato di cui sopra per ottenere la varianza incondizionata,  $\text{Var}(y_t)$ .

**Soluzione** Per il primo punto si veda il primo set di slide. Ricordiamo che  $\text{Var}(y_t) = \text{Var}(y_{t-1}) = \sigma^2 / (1 - \phi^2)$ ,  $\text{Var}(y_t | Y_{t-1}) = \sigma^2$ ,  $E(y_t | Y_{t-1}) = \phi y_{t-1}$ . Si ha

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_t) &= E\{\text{Var}(y_t | Y_{t-1})\} + \text{Var}\{E(y_t | Y_{t-1})\} \\ &= E(\sigma^2) + \text{Var}(\phi y_{t-1}) \\ &= \sigma^2 + \phi^2 \text{Var}(y_{t-1}) \\ &= \sigma^2 + \phi^2 \text{Var}(y_t). \end{aligned}$$

Risolvendo rispetto a  $\text{Var}(y_t)$  si ottiene  $\text{Var}(y_t) = \sigma^2 / (1 - \phi^2)$ .

3. Consideriamo il problema della previsione lineare ottimale di un processo stocastico stazionario, rimuovendo l'assunzione fatta a lezione di media nulla.

Sia dunque  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processo stocastico stazionario con  $E(y_t) = \mu$  e funzione di autocovarianza  $\gamma(j) = E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)]$ . Si consideri il previsore lineare di  $y_t$

$$\hat{y}_{kt} = m + \phi_{k1} y_{t-1} + \phi_{k2} y_{t-2} + \cdots \phi_{kk} y_{t-k}.$$

Si mostri che

- $\hat{y}_{k,t}$  è non distorto ( $E(y_t - \hat{y}_{k,t}) = 0$ ) se e solo se si prende

$$m = (1 - \sum_{j=1}^k \phi_{kj}) \mu;$$

(sostituendo nell'espressione di  $\hat{y}_{kt}$  si ottiene  $\hat{y}_{kt} = \mu + \phi_{k1}(y_{t-1} - \mu) + \phi_{k2}(y_{t-2} - \mu) + \cdots \phi_{kk}(y_{t-k} - \mu)$ ).

**Soluzione** L'errore di previsione  $\xi_{kt} = y_t - m - \phi_{k1}y_{t-1} - \phi_{k2}y_{t-2} - \dots - \phi_{kk}y_{t-k}$  ha valore atteso  $E(\xi_{kt}) = \mu - m - \phi_{k1}\mu - \phi_{k2}\mu - \dots - \phi_{kk}\mu$ , che eguaglia 0 se e solo se si pone  $m = (1 - \sum_{j=1}^k \phi_{kj})\mu$ .

- I coefficienti del previsore ottimale non distorto, definito come quello che minimizza l'errore quadratico medio di previsione  $E[(y_t - \hat{y}_{k,t})^2]$ , si ottengono risolvendo il sistema di equazioni di Yule-Walker

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= \phi_{k1}\gamma(0) + \phi_{k2}\gamma(1) + \dots + \phi_{kk}\gamma(k-1) \\ \gamma(2) &= \phi_{k1}\gamma(1) + \phi_{k2}\gamma(0) + \dots + \phi_{kk}\gamma(k-2) \\ \vdots &= \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \gamma(k) &= \phi_{k1}\gamma(k-1) + \phi_{k2}\gamma(k-2) + \dots + \phi_{kk}\gamma(0)\end{aligned}$$

**Soluzione** Sia  $\mathbf{\Gamma}_k = \{\gamma(|i-j|), i, j = 1, \dots, k\}$  la matrice di autocovarianza di  $\mathbf{y}_{k,t-1} = [y_{t-1}, \dots, y_{t-k}]'$ , e  $\boldsymbol{\gamma}_k = [\gamma(1), \dots, \gamma(k)]'$ ; allora, denotando  $\boldsymbol{\phi}_k = [\phi_{k1}, \dots, \phi_{kk}]'$ , si ha la soluzione  $\boldsymbol{\phi}_k = \mathbf{\Gamma}_k^{-1} \boldsymbol{\gamma}_k$ .

Per dimostrare questo risultato, si rimpiazzì  $m = (1 - \sum_{j=1}^k \phi_{kj})\mu$  nell'espressione del predittore ottimale, per avere  $\hat{y}_{kt} = \mu + \sum_{j=1}^k \phi_{kj}(y_{t-j} - \mu)$ . Pertanto,

$$\begin{aligned}\text{MSE}(\hat{y}_{kt}) &= E\{(y_t - \hat{y}_{kt})^2\} \\ &= E\{[y_t - \mu - \phi_{k1}(y_{t-1} - \mu) - \phi_{k2}(y_{t-2} - \mu) - \dots - \phi_{kk}(y_{t-k} - \mu)]^2\} \\ &= \gamma(0) - 2\boldsymbol{\phi}_k' \boldsymbol{\gamma}_k + \boldsymbol{\phi}_k' \mathbf{\Gamma}_k \boldsymbol{\phi}_k.\end{aligned}$$

Derivando rispetto a  $\boldsymbol{\phi}_k$  ed eguagliando a zero le derivate parziali si ottengono le condizioni del primo ordine:  $\mathbf{\Gamma}_k \boldsymbol{\phi}_k = \boldsymbol{\gamma}_k$ , che forniscono la soluzione  $\boldsymbol{\phi}_k = \mathbf{\Gamma}_k^{-1} \boldsymbol{\gamma}_k$ . La matrice Hessiana,  $\frac{\partial^2 \text{MSE}}{\partial \boldsymbol{\phi}_k \partial \boldsymbol{\phi}_k'} = 2\mathbf{\Gamma}_k$  è definita positiva. Dunque, la soluzione ottenuta minimizza l'errore quadratico medio di previsione.

- L'errore di previsione,  $\xi_{kt} = y_t - \hat{y}_{kt}$ , è incorrelato con  $y_{t-j}$ , ovvero  $E[\xi_{kt}(y_{t-j} - \mu)] = 0$ , per  $j = 1, \dots, k$ .

**Soluzione** Sia  $\mathbf{X}_{k,t-1}^* = [(y_{t-1} - \mu), \dots, (y_{t-k} - \mu)]'$ . Allora,

$$\begin{aligned}\xi_{kt} &= y_t - \hat{y}_{kt} \\ &= y_t - \mu - \boldsymbol{\phi}_k' \mathbf{X}_{k,t-1}^* \\ &= y_t - \mu - \boldsymbol{\gamma}_k' \mathbf{\Gamma}_k^{-1} \mathbf{X}_{k,t-1}^*.\end{aligned}$$

Peranto,

$$\begin{aligned}E(\xi_{kt} \mathbf{X}_{k,t-1}^{*'}) &= E[(y_t - \mu) \mathbf{X}_{k,t-1}^{*'}] - \boldsymbol{\gamma}_k' \mathbf{\Gamma}_k^{-1} E(\mathbf{X}_{k,t-1}^* \mathbf{X}_{k,t-1}^{*'}) \\ &= \boldsymbol{\gamma}_k' - \boldsymbol{\gamma}_k' \mathbf{\Gamma}_k^{-1} \mathbf{\Gamma}_k \\ &= \mathbf{0}'.\end{aligned}$$

- L'errore di previsione ha varianza  $\gamma(0) - \boldsymbol{\gamma}_k' \mathbf{\Gamma}_k^{-1} \boldsymbol{\gamma}_k$ .

**Soluzione** Ricordando che  $\phi_k = \Gamma_k^{-1} \gamma_k$ , si ha

$$\begin{aligned} E(\xi_{kt}^2) &= \gamma(0) - 2\phi_k' \gamma_k + \phi_k' \Gamma_k \phi_k \\ &= \gamma(0) - \phi_k' \Gamma_k \phi_k \\ &= \gamma(0) - \gamma_k' \Gamma_k^{-1} \gamma_k \end{aligned}$$

4. Si consideri il processo integrato del primo ordine:

$$y_t = y_{t-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \xi_{t-j}, \quad \psi_0 = 1, \xi_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2).$$

- Si mostri che la risposta di  $y_t$  allo shock  $\xi_{t-k}$  occorso al tempo  $t-k$  risulta pari a  $\sum_{j=0}^k \psi_j$  e che pertanto il valore limite per  $k \rightarrow \infty$  è pari a  $\psi(1)$ , dove  $\psi(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j$ .

**Soluzione** Differenziando rispetto a  $\xi_{t-k}$  entrambi i membri di

$$y_t = y_{t-1} + \xi_t + \psi_1 \xi_{t-1} + \cdots + \psi_k \xi_{t-k} + \cdots$$

si ottiene che la funzione di risposta all'impulso segue l'equazione alle differenze

$$\frac{\partial y_t}{\partial \xi_{t-k}} = \frac{\partial y_{t-1}}{\partial \xi_{t-k}} + \psi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \frac{\partial y_t}{\partial \xi_t} = 1,$$

da cui segue

$$\frac{\partial y_t}{\partial \xi_{t-k}} = 1 + \psi_1 + \cdots + \psi_k.$$

- Il rapporto di varianze di Cochrane tende a  $V = [\psi(1)]^2 / \sum_j \psi_j^2$ .

**Soluzione** Si osservi che

$$[\psi(1)]^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 + 2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+1} + 2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+2} + \cdots + 2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} + \cdots$$

e che pertanto

$$\sigma^2[\psi(1)]^2 = \gamma(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k),$$

dove  $\gamma(k)$  è la funzione di autocovarianza di  $\Delta y_t$ .

5. Sia  $y_t$  un p.s. random walk Gaussiano, tale che  $\Delta y_t$  è un p.s. IID Gaussiano con media nulla e varianza  $\sigma^2$ . Noto che  $\sum_{i=1}^r i^2 = (2r+1)r(r+1)/6$ , e che  $E(n\hat{\rho}(h)^2) = 1$ ,  $\text{Cov}(\hat{\rho}(h), \hat{\rho}(j)) = 0$ ,  $j \neq h$ , si mostri che

$$\text{Var}(\hat{V}_k) = \frac{2(2k-1)(k-1)}{3nk}.$$

**Soluzione**  $E(\hat{V}_k) = 1$  e pertanto

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{V}_k) &= \text{Var}\left(2 \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{k-j}{k}\right) \hat{\rho}(j)\right) \\ &= 4 \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{k-j}{k}\right)^2 \text{Var}(\hat{\rho}(j)) \\ &= \frac{4}{nk^2} \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^2 \end{aligned}$$

Il risultato segue scrivendo  $\sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^2 = \sum_{i=1}^{k-1} i^2$  e applicando la formula per la somma parziale dei quadrati dei primi  $r$  numeri naturali con  $r = k-1$ .

Nota bene: questo risultato vale sotto l'ipotesi di *indipendenza* dei rendimenti.

6. Con riferimento al processo ARIMA(0,1,1),

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t + \theta \epsilon_{t-1}, \quad \epsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2),$$

- Rappresentare graficamente la densità spettrale di  $\Delta y_t$  quando  $\sigma^2 = 1$  e nei due casi  $\theta = .8$  e  $\theta = -.8$ .

*La densità spettrale è*

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sigma^2 (1 + \theta^2 + 2\theta \cos(\omega)).$$

*Può essere agevolmente rappresentata in Matlab o R nell'intervallo  $[0, \pi]$*

- Fornire l'espressione del rapporto di varianze di Cochrane  $V_k$ . Per quali valori di  $\theta$  il processo è meno persistente di un random walk?

$$V_k = 1 + 2 \frac{k-1}{k} \frac{\theta}{1 + \theta^2}.$$

*Si ha  $V_k < 1$  se  $\theta \in (-1, 0)$ .*

- Cosa accade se  $\theta = -1$ ?

*Per effetto della cancellazione del polinomio MA con le differenze prime, il processo che genera  $y_t$  è white noise (con media possibilmente diversa da zero), ovvero  $y_t = \mu + \xi_t$ . La ACF di  $\Delta y_t$  è  $\rho(k) = 0, k > 1$  e  $\rho(1) = -0.5$ ; pertanto, il rapporto di varianze diventa  $V_k = 1/k$  e pertanto converge a zero.*

7. Per il processo ARIMA(1,1,0),

$$(1 - \phi L)\Delta y_t = \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{NID}(0, \sigma^2),$$

si ottenga il limite  $V$  a cui tende il rapporto di varianze di Cochrane  $V_k$  per  $k \rightarrow \infty$ .

**Soluzione** Sia  $\rho(k)$  la funzione di autocorrelazione di  $\Delta y_t$ . Allora, assumendo  $|\phi| < 1$ ,

$$\begin{aligned}
 V &= 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \rho(j) \\
 &= 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \phi^j \\
 &= 1 + 2\phi(1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^k + \dots) \\
 &= 1 + 2 \frac{\phi}{1-\phi} \\
 &= \frac{1+\phi}{1-\phi} \\
 &= \frac{1-\phi^2}{(1-\phi)^2} \\
 &= \frac{1+\phi}{1-\phi}.
 \end{aligned}$$

8. Siano  $y$  e  $x$  due variabili casuali con valore atteso  $\mu_y$  e  $\mu_x$ , rispettivamente, varianze  $\sigma_y^2$  e  $\sigma_x^2$  e covarianza  $\sigma_{xy}$ . Si dimostri che

$$\tilde{y} = \mu_y + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \mu_x)$$

è il miglior previsore lineare non distorto di  $y$ .

NB. Si parta dal generico previsore lineare  $\tilde{y} = c + bx$ . Si scelga  $c = \mu_y - b\mu_x$ , affinché  $\tilde{y}$  sia non distorto, ovvero  $E(y - \tilde{y}) = 0$ . Si ha pertanto  $\tilde{y} = \mu_y + b(x - \mu_x)$ . La costante  $b$  viene determinata minimizzando  $E[(y - \tilde{y})^2]$  rispetto a  $b$ .

**Soluzione** Il generico previsore  $\tilde{y} = c + bx$  ha valore atteso  $E(\tilde{y}) = c + b\mu_x$  e risulta corretto se  $E(y - \tilde{y}) = 0$ . Pertanto, occorre avere  $c = \mu_y - b\mu_x$ . Sostituendo,  $\tilde{y} = \mu_y + b(x - \mu_x)$ . L'errore quadratico medio della previsione (uguale alla varianza) è

$$\begin{aligned}
 MSE(\tilde{y}) &= E(y - \tilde{y})^2 \\
 &= E[y - \mu_y - b(x - \mu_x)]^2 \\
 &= \sigma_y^2 + b^2\sigma_x^2 - 2b\sigma_{xy}
 \end{aligned}$$

Differenziando rispetto a  $b$  ed eguagliando a zero la derivata si ottiene  $b = \sigma_{xy}/\sigma_x^2$ .

9. Per il modello AR(1) con disturbi ARCH(1,1):

$$y_t = \phi y_{t-1} + \xi_t, \quad \xi_t | Y_{t-1} \sim N(0, h_t),$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_{t-1}^2,$$

dove

$$|\phi| < 1, \quad \alpha_0 > 0, \quad 0 \leq \alpha_1 < 1,$$

si desumano  $\tilde{y}_{t+l|t} = E_t(y_{t+l})$  e  $\text{Var}(y_{t+l}|Y_t)$  per  $l = 1, 2$ .

**Soluzione**  $E_t(y_{t+1}) = E_t(\phi y_t + \xi_{t+1}) = \phi y_t + E_t(\xi_{t+1}) = \phi y_t$ .

$\text{Var}(y_{t+1}|Y_t) = E_t[(y_{t+1} - \phi y_t)^2] = E_t(\xi_{t+1}^2) = h_{t+1}$ .

$E_t(y_{t+2}) = E_t E_{t+1}(\phi y_{t+1} + \xi_{t+2}) = \phi E_t(y_{t+1}) + E_t E_{t+1}(\xi_{t+2}) = \phi^2 y_t$ .

$\text{Var}(y_{t+2}|Y_t) = E_t E_{t+1}[(y_{t+2} - \phi^2 y_t)^2] = E_t E_{t+1}[(\phi y_{t+1} + \xi_{t+2} - \phi^2 y_t)^2] = E_t E_{t+1}[(\phi(y_{t+1} - \phi y_t) + \xi_{t+2})^2] = E_t E_{t+1}[(\phi \xi_{t+1} + \xi_{t+2})^2] = \phi^2 E_t(\xi_{t+1}^2) + E_t E_{t+1}(\xi_{t+2}^2) + 2 E_t E_{t+1}(\phi \xi_{t+1} \xi_{t+2}) = \phi^2 h_{t+1} + E_t(h_{t+2}) = \phi^2 h_{t+1} + \alpha_0 + \alpha_1 h_{t+1} = \alpha_0 + (\alpha_1 + \phi^2) h_{t+1} = \alpha_0 + (\alpha_1 + \phi^2)(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_t^2)$ .  
(cfr formula slide)

10. Si consideri il processo ARCH( $m$ ):

$$y_t|Y_{t-1} \sim N(0, h_t), \quad h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j y_{t-j}^2,$$

con  $\alpha_0 > 0, 0 \leq \alpha_j \leq 1, j = 1, \dots, m$ , e  $\sum_{j=1}^m \alpha_j < 1$ .

(a) Si dimostri che  $y_t^2$  segue un processo autoregressivo di ordine  $m$ .

**Soluzione** Si scriva  $y_t^2 = h_t + v_t, v_t = y_t^2 - h_t \sim MDS$ . Sostituendo  $h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j y_{t-j}^2$ , si ottiene il risultato cercato.

(b) Si presentino le condizioni (limite) sotto le quali il modello genera lo stimatore non parametrico 'rolling mean',  $m^{-1} \sum_{j=1}^m y_{t-j}^2$ , della volatilità del giorno  $t$ .

**Soluzione** Basta porre  $\alpha_0 = 0$  e  $\alpha_j = m^{-1}, j = 1, \dots, m$ .

(c) Nel caso  $m = 1$  si ottengano le previsioni della volatilità  $\text{Var}(y_{t+h}|Y_t)$  per  $h = 1, 2$ , e si ottenga il valore limite per  $h \rightarrow \infty$ .

**Soluzione** Sia  $\tilde{h}_{t+l|t} = \text{Var}(y_{t+l}|Y_t)$ . Allora  $\tilde{h}_{t+1|t} = h_{t+1} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j y_{t-j+1}^2$ ,

$$\tilde{h}_{t+2|t} = E_t E_{t+1}(y_{t+2}^2) = E_t(h_{t+2}) = \alpha_0 + \alpha_1 \tilde{h}_{t+1} + \alpha_2 y_t^2 + \dots + \alpha_m y_{t-m+2}^2,$$

etc. Per  $l > m$ , si ottiene la chain rule:  $\tilde{h}_{t+l|t} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j \tilde{h}_{t+l-j|t}$ , con  $m$  valori iniziali ( $\tilde{h}_{t+1|t} = h_{t+1}, \tilde{h}_{t+j|t}, j = 2, \dots, m$  ottenuti iterando l'argomento svolto precedentemente).

(d) Si discuta come testare l'ipotesi di omoschedasticità,  $H_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ .

**Soluzione** Mediante la statistica test LM modificata,  $nR^2$ , che si ottiene dalla regressione di  $y_t^2$  su una costante e  $m$  valori ritardati. Il valore critico del test sono desunti dal quantile  $1 - \alpha$  della distribuzione  $\chi^2$  con  $m$  g.d.l., dove  $\alpha$  è la dimensione del test.