Lezioni di economia monetaria e creditizia

Il modello di Lagos-Wright

Fabrizio Mattesini

Università di Roma "Tor Vergata"

March 10, 2016

Il modello di Lagos Wright

- Un continuo di agenti nell'intervallo $[0, 1]$ che vivono per sempre
- In ogni periodo si alternano due tipi di mercato
  - un mercato centralizzato senza frizioni (CM)
  - un mercato decentralizzato dove gli agenti sono anonimi e hanno un problema di doppia coincidenza dei bisogni
- Queste due frizioni rendono impossibile sia il baratto che il credito $\Rightarrow$ c'è bisogno di un mezzo di scambio

- Il bene X è prodotto con un'unità di lavoro H e scambiato nel CM
- Il bene q è prodotto ad un costo $c\left(q\right)$ e scambiato nel DM
- Utilità, nel periodo che comprende sia il CM che il DM, additiva e lineare in X e H

$$U\left(X,H,q\right)=X-H+u(q)-c(q)$$

dove U, u e c hanno le proprietà usuali sulla curvatura e la monotonicità

- $\beta\in\left(0,1\right)$ è il fattore di sconto tra un CM e il prossimo DM
- I due beni non possono essere conservati tra un periodo e l'altro

- C'è un asset senza valore intrinseco che può essere usato nel DM come mezzo di scambio
- La domanda di moneta è m
- L'offerta di moneta cresce secondo la regola $M_{+1} = \gamma M$. La moneta $M_{+1} - M = (\gamma - 1)M$ è iniettata o ritirata usando tasse o trasferimenti lump sum
- Nel DM abbiamo un problema di doppia coincidenza dei bisogni
  - con probabilità σ un agente vuole consumare q ma non può produrlo
  - con probabilità $1 - \sigma$ un agente può produrre ma non vuole consumare

NB: Come in Kiyotaki-Wright, il bene q è fatto di molte varietà del bene di cui ciascun agente consuma un sottoinsieme
Qui, per semplicità, escludiamo la possibilità di una doppia coincidenza dei bisogni.

- nello scambio un venditore dà una quantità di q in cambio di un ammontare di moneta $d \leq m$ che il compratore si è portato dal periodo precedente
- Gli agenti contrattano le ragioni di scambio (q, m) . Per semplicità assumiamo che i compratori abbiano tutto il potere di mercato
- $W(m)$ e $V(m)$ sono i payoff degli agenti che entrano rispettivamente nel CM e nel DM
- Nel CM

$$W(m) = [X - H + \beta V(m_{+1})]$$

dove

$$X + \phi m_{+1} = H + \phi m - T$$

e T sono le tasse lump sum

- Sosituendo

$$W(m) = \phi m - T - \phi m_{+1} + \beta V(m_{+1})$$

- Nel DM i payoffs dall'essere un compratore o un venditore sono

$$u(q) + W(m-d)$$
$$-c(\hat{q}) + W(m+\hat{d})$$

Con probabilità σ mi piace il bene che l'altro produce. Scambio e continuo con meno moneta.
Con probabilità $1-\sigma$ all'altro piace il bene che io produco. Scambio e continuo con più moneta.

- Il payoff atteso nel periodo $t+1$ è

$$\begin{aligned} V(m_{+1}) &= \sigma \left[u(q_{+1}) + W(m_{+1} - d_{+1})\right] \\ &\quad + (1-\sigma)\left[-c(\hat{q}_{+1}) + W(m_{+1} + \hat{d}_{+1})\right] \end{aligned}$$

N.B. Quando produco, la quantità dipenderà dalla moneta che l'altro agente ha che, in linea di principio è diversa dalla mia. Ecco perché $V(m_{+1})$ dipende anche da $\hat{q}, \hat{d}$.

- Sostituendo avremo

$$\begin{aligned} V(m_{+1}) &= \left[\sigma\left(u(q_{+1}) - \phi_{+1} d_{+1}\right) + (1-\sigma)\left(-c(\hat{q}_{+1}) + \phi_{+1}\hat{d}_{+1}\right)\right] \\ &\quad +\phi_{+1} m_{+1} - T - \phi_{+1} m_{+2} + \beta V(m_{+2}) \end{aligned}$$

- Sostituendo adesso in $W(m)$, otteniamo

$$\begin{aligned} W(m) &= \phi m - T - \phi m_{+1} \\ &\quad +\beta\left\{\left[\sigma\left(u(q_{+1}) - \phi_{+1} d_{+1}\right) + (1-\sigma)\left(-c(\hat{q}_{+1}) + \phi_{+1}\hat{d}_{+1}\right.\right.\right. \\ &\quad + \phi_{+1} m_{+1} - T - \phi_{+1} m_{+2} + \beta V(m_{+2})\Big\} \end{aligned}$$

dove $q_{t+1} = \phi_{+1} d_{+1} \leq \phi_{+1} m_{+1}$

- Dobbiamo adesso determinare le ragioni di scambio (q, d).
- Ad ogni t i compratori fanno ai venditori un'offerta "prendere o lasciare", e cioè risolvono il seguente problema:

$$\max_{q,d} u(q) + W(m-d) - W(m)$$

$$sub \quad -c(q) + W(m+d) - W(m) = 0$$

Sostituendo $W(m)$ e $W(m+d)$ nel vincolo otteniamo

$$c(q) = \phi d \text{ o } q = c^{-1}(\phi d)$$

DERIVAZIONE ALTERNATIVA:

Dal problema nel mercato centralizzato (CM) si nota che il payoff marginale dal portare un'unità in più di moneta nel mercato decentralizzato (DM) è ϕ. Questo payoff è costante perché l'utilità del bene, nel CM, è lineare. Il payoff atteso dell'agente nel mercato decentralizzato, pertanto, è dato da:

$$V(m_{+1}) = \sigma\left[u(q_{+1}) + \phi(m_{+1} - d_{+1}) + W(0)\right] + (1-\sigma)\left[-c(\hat{q}_{+1}) + \phi(m_{+1} + \hat{d}_{+1}) + W(0)\right]$$

$$= \sigma\left[u(q_{+1}) - \phi d_{+1}\right] + (1-\sigma)\left[-c(\hat{q}_{+1}) + \hat{d}_{+1}\right] + \phi m_{+1} + W(0)$$

Il problema di contrattazione nel DM, dove vengono determinate le ragioni di scambio è

$$\max_{q,d} \; u(q) - \phi d$$
$$\text{sub.} \quad -c(q) + \phi d = 0$$

Sostituendo in $W(m)$ otteniamo la funzione che l'agente massimizza.

- Il problema dell'individuo pertanto diventa quello di scegliere i valori di d_{+1} e m_{+1} che massimizzano

$$
\begin{aligned}
&\phi m - T - \phi m_{+1} + \beta \left[\left\{ \sigma \left(u(c^{-1}(\phi_{+1} d_{+1})) - \phi_{+1} d_{+1} \right) \right.\right. \\
&\left.+ (1-\sigma) \left(-c(\hat{q}_{+1}) + \phi_{+1} \hat{d}_{+1} \right) \right] \\
&\left.+ \phi_{+1} m_{+1} - T - \phi_{+1} m_{+2} + \beta V(m_{+2}) \right\}
\end{aligned}
$$

$$sub \quad d_{+1} \leq m_{+1}$$

- Caso 1: $d_{+1} < m_{+1}$

$$
\begin{aligned}
u'(q_{+1}) &= c'(q_{+1}) \\
\frac{\phi}{\phi_{+1}} &= \beta
\end{aligned}
$$

- Caso 2: $d_{+1} = m_{+1}$
- La funzione obiettivo diventa

$$\begin{aligned}
&\phi m - T - \phi m_{+1} + \beta \left[\left\{ \sigma \left(u(c^{-1}(\phi_{+1} m_{+1})) - \phi_{+1} m_{+1} \right) \right. \right. \\
&+ (1-\sigma) \left(-c(\hat{q}_{+1}) + \phi_{+1} \hat{d}_{+1} \right) \big] \\
&\left. + \phi_{+1} m_{+1} - T - \phi_{+1} m_{+2} + \beta V(m_{+2}) \right\}
\end{aligned}$$

- Le condizioni del primo ordine implicano

$$-\phi + \beta \phi_{+1} \left[\sigma \left(\frac{u'(q_{+1})}{c'(q_{+1})} - 1 \right) + 1 \right] = 0$$

- In un equilibrio stazionario $\phi M = \phi_{+1} M_{+1}$ e cioè $\frac{\phi}{\phi_{+1}} = 1 + \pi = \gamma$
- Il vincolo $\delta \leq m$ non sarà stringente (caso 1) quando $\gamma = \beta$. In questo caso si ha l'allocazione ottimale

$$u'(q) = c'(q)$$

- Quando $\gamma \geq \beta$ avremo $d = m$ e il livello di output è definito da

$$\frac{\gamma}{\beta} - 1 = \sigma \left(\frac{u'(q_{+1})}{c'(q_{+1})} - 1 \right)$$

- Possiamo ridefinire questa equazione in termini di tasso d'interesse nominale i definito da $1 + i = (1 + r)(1 + \pi)$ dove $\pi = \gamma - 1$ e $\beta = \frac{1}{1+r}$. In questo caso

$$i = \frac{\gamma}{\beta} - 1$$

- In questo modello l'allocazione ottimale può essere raggiunta quando $\gamma = \beta$, e cioè quando $i = 0$.REGOLA DI FRIEDMAN
- Noi abbiamo soltanto considerato il caso in cui i compratori hanno tutto il potere di mercato. Lagos e Wright (2005) dimostrano che se anche i venditori hanno un po' di potere di mercato l'allocazione ottimale non può essere raggiunta neppure alla regola di Friedman.
- In generale, come nel modello OLG anche qui l'inflazione è costosa in termini di output
- Il modello può essere esteso in diverse dimensioni, introducendo altri asset, il capitale. Si possono ottenere gli stessi risultati del modello di Lucas se la politica monetaria è soggetta a shock stocastici.