

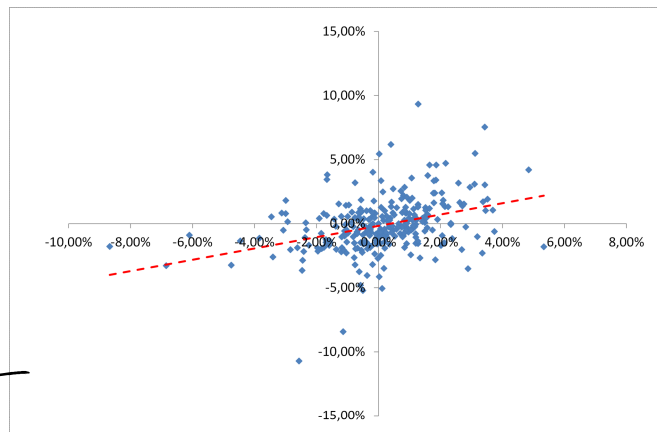
Stime del VaR di un portafoglio composto da due titoli: esempio in excel

VaR INT	€ 23.575,83
VaR VOLKS	€ 19.227,10

Aggregazione?

Quantificazione della correlazione tra i rendimenti dei due titoli

$$\rho \in [-1; +1]$$



$$\rho_{A;B}^{\text{SEMPLE}} = \frac{\text{COV}_{\text{SEMPLE}}(R_A; R_B)}{\sigma_A^{\text{SEMPLE}} \cdot \sigma_B^{\text{SEMPLE}}} = \frac{\sum_{i=1}^T \frac{(R_i^A - \bar{R}_A) \cdot (R_i^B - \bar{R}_B)}{T-1}}{\sigma_A^{\text{SEMPLE}} \cdot \sigma_B^{\text{SEMPLE}}}$$

||

H₀: $\rho = 0$

$$\rho_{A;B}^{\text{SEMPLE}} = \frac{\sum_{i=1}^T \frac{(R_i^A) \cdot (R_i^B)}{T-1}}{\sigma_A^{\text{SEMPLE}} \cdot \sigma_B^{\text{SEMPLE}}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^T \frac{(R_i^A - \bar{R}_A) \cdot (R_i^B - \bar{R}_B)}{T-1}}{\sigma_A^{\text{SEMPLE}} \cdot \sigma_B^{\text{SEMPLE}}}, \text{ con } \bar{R}_A = \bar{R}_B = 0$$

VaR INT	€ 23.575,83
VaR VOLKS	€ 19.227,10

$\Rightarrow \begin{matrix} VAR_1 \\ VAR_2 \end{matrix}$

correlaz	0,36
----------	------

$= \rho_{12}$

$$C = A + B \Rightarrow \sigma_C = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2 \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}}$$

$$VAR_{PORT} = \sqrt{VAR_1^2 + VAR_2^2 + 2 \cdot VAR_1 \cdot VAR_2 \cdot \rho_{12}}$$

Date	Intesa SP	VOLKSW	lim rischio giorn	€ 43.412,16
23/08/2022	1,82%	2,39%	Liv.conf.	99,0%
24/08/2022	0,80%	-0,97%	VM INT	€ 600.000,00
25/08/2022	-1,43%	0,35%	VM Volks	€ 400.000,00
26/08/2022	-3,07%	-0,51%		
29/08/2022	0,97%	-0,43%	sigma INT	1,69%
30/08/2022	1,65%	4,58%	sigma VOLKS	2,07%
31/08/2022	-0,37%	-4,04%	multiplo (k)	2,326
01/09/2022	-1,69%	-1,25%	VaR INT	€ 23.575,83
02/09/2022	2,62%	1,65%	VaR VOLKS	€ 19.227,10
05/09/2022	-2,37%	-1,08%	correlaz	0,36
06/09/2022	0,40%	6,18%	VaR PORTAFOGLIO	€ 35.386,46
07/09/2022	-0,22%	-1,75%		
08/09/2022	2,38%	-1,15%		
09/09/2022	5,33%	-1,80%		

$=RADQ(F9^2+F10^2+2*F9*F10*F11)$

Esempio su excel: Un portafoglio composto da tre titoli

VaR INT	€ 11.787,91	VAR_1
VaR VOLKS	€ 9.613,55	VAR_2
VaR NOKIA	€ 20.957,78	VAR_3

numero $\rho = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ $n=3$ $n_{num} = \frac{3 \cdot (3-1)}{2} = 3$

$n = \text{numero titoli in portafoglio}$

In presenza di molti titoli in portafoglio è opportuno utilizzare una matrice in grado di sintetizzare tutte le correlazioni \Rightarrow

	T_1	T_2	T_3
T_1	+1	ρ_{12}	ρ_{13}
T_2	ρ_{21}	+1	ρ_{23}
T_3	ρ_{31}	ρ_{32}	+1

Correlazione

Input

Intervallo di input:

Dati raggruppati per: ☒ Colonne ☐ Righe

☒ Etichette nella prima riga

Opzioni di output

☒ Intervallo di output:

☒ Nuovo foglio di lavoro:

☐ Nuova cartella di lavoro

OK Annulla

Var Port 3 Titoli

$$\begin{matrix} VAR_1 & P_{12} \\ VAR_2 & P_{13} \\ VAR_3 & P_{23} \end{matrix}$$

$$VAR_{PORT} = \sqrt{VAR_1^2 + VAR_2^2 + VAR_3^2 + 2 \cdot VAR_1 \cdot VAR_2 \cdot P_{12} + 2 \cdot VAR_1 \cdot VAR_3 \cdot P_{13} + 2 \cdot VAR_2 \cdot VAR_3 \cdot P_{23}}$$

100 titoli

$$\begin{matrix} \text{L} \rightarrow (100) \rightarrow VAR_i^2 \\ (4.950) \rightarrow 2 \cdot VAR_i \cdot VAR_j \cdot P_{ij} \\ \text{L} \rightarrow \sqrt{\dots} \end{matrix}$$

Quando "n" è elevato siamo costretti ad utilizzare l'algebra matriciale

3 Titoli

$$VAR_{PORT} = \sqrt{[VAR_1 \quad VAR_2 \quad VAR_3] \cdot \begin{bmatrix} 1 & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & 1 & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} VAR_1 \\ VAR_2 \\ VAR_3 \end{bmatrix}}$$

=radq(matr.prodotto(matr.prodotto(matr.trasposta(Vcolonna);MatrCorr);Vcolonna))

$$\begin{matrix} \text{L} \rightarrow \text{Invio} \\ \text{L} \rightarrow \text{ctrl} + \uparrow + \text{Invio} \end{matrix}$$

=RADQ(MATR.PRODOTTO(MATR.PRODOTTO(MATR.TRASPOSTA(F10:F12);F16:H18);F10:F12))

Date	Intesa SP	VOLKSW	NOKIA	lim rischio giorn	€ 43.412,16		
23/08/2022	1,82%	2,39%	0,47%	Liv.conf.	99,0%		
24/08/2022	0,88%	0,07%	0,22%	VAR INT	€ 200.000,00		

Date	Intesa SP	VOLKSW	NOKIA	lim rischio giorn	€ 43.412,16		
23/08/2022	1,82%	2,39%	0,47%	Liv.conf.	99,0%		
24/08/2022	0,80%	-0,97%	-0,22%	VM INT	€ 300.000,00		
25/08/2022	-1,43%	0,35%	0,94%	VM Volks	€ 200.000,00		
26/08/2022	-3,07%	-0,51%	-1,33%	VM NOKIA	€ 550.000,00		
29/08/2022	0,97%	-0,43%	-2,85%	sigma INT	1,69%		
30/08/2022	1,65%	4,58%	-0,08%	sigma VOLKS	2,07%		
31/08/2022	-0,37%	-4,04%	4,41%	sigma NOKIA	1,64%		
01/09/2022	-1,69%	-1,25%	-0,66%	multiplo (k)	2,326		
02/09/2022	2,62%	1,65%	1,63%	VaR INT	€ 11.787,91		
05/09/2022	-2,37%	-1,08%	-0,77%	VaR VOLKS	€ 9.613,55		
06/09/2022	0,40%	6,18%	-0,38%	VaR NOKIA	€ 20.957,78		
07/09/2022	-0,22%	-1,75%	0,00%	VaR PORTAFOGLIO	€ 32.204,39	€ 32.204,39	
08/09/2022	2,38%	-1,15%	0,16%		algebra tradizionale	algebra matriciale	
09/09/2022	5,33%	-1,80%	1,20%		Intesa SP	VOLKSW	NOKIA
12/09/2022	3,43%	7,54%	0,67%	Intesa SP	1	0,36	0,30
13/09/2022	-0,78%	-1,51%	-0,82%	VOLKSW	0,36	1	0,34
14/09/2022	1,01%	1,81%	-1,82%	NOKIA	0,30	0,34	1

Le Formule quando in portafoglio v. sono "N" generici titoli.

Algebra tradizionale:
$$VAR_{PORT} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N VAR_i \cdot VAR_j \cdot \rho_{ij}}$$

Algebra Matriciale:
$$VAR_{PORT} = \sqrt{[VAR_1 \quad VAR_2 \quad \dots \quad VAR_N] \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} VAR_1 \\ VAR_2 \\ \vdots \\ VAR_N \end{bmatrix}}$$

Rimozione dell'ipotesi di stazionarietà nei modelli varianze-covarianze

Mod. Var-Cov → Assunzioni

- Normalità della Distribuzione
- Media Nulle

↳ Pro → Possibilità di rimuovere l'ipotesi di stazionarietà

Al momento il modello descritto assume la stazionarietà della distribuzione dei rendimenti

$$\sigma_{SEMPL} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})^2}{T-1}}, \text{ con } \bar{R} = 0$$

$$\rho_{SEMPL} = \frac{\sum_{i=1}^T (R_i^A - \bar{R}_A)(R_i^B - \bar{R}_B)}{\sigma_{SEMPL}^A \cdot \sigma_{SEMPL}^B}, \text{ con } \bar{R}_A = \bar{R}_B = 0$$

$$\sigma_{SEMPLE} = \sqrt{\sigma_{SEMPLE}^2}$$

La rimozione dell'ipotesi di stazionarietà della distribuzione dei rendimenti passa attraverso una stima alternativa a quella semplice (simple) sia della deviazione standard che della correlazione

$$\begin{aligned} \sigma_{SEMPLE} &\Rightarrow \sigma_{EXP} \\ \rho_{SEMPLE} &\Rightarrow \rho_{EXP} \end{aligned}$$

Stima della deviazione standard esponenziale \rightarrow EWMA: EXPONENTIAL WEIGHTED MOVING AVERAGE

X rimovere l'ip. che la volatilità sia costante nel tempo (HOMOGENEITY) riconoscendo così che σ varia nel tempo (HETEROGENEITY)

Stima di σ attribuendo alle osservazioni campionarie un peso diverso attribuendo un peso $>$ alle osservazioni + recenti che assumo avere $>$ potere informativo al fine della stima delle σ FUTURA

• ~~Tecnico econometrico molto complesso~~ (GARCH complesso)

• EWMA $\rightarrow \sigma_{EXP}$ (GARCH SEMPLIFICATO)

$$\sigma_{SEMPLE} = \sqrt{\sum_{i=1}^T \frac{(R_i - \bar{R})^2}{T-1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^T \left(\frac{1}{T-1} \right) \cdot (R_i - \bar{R})^2}$$

\hookrightarrow Sostituire questo coefficiente con un modello che permetta di valutare la probabilità in funzione della posizione del rendimento nel campione

$$\sigma_{Exp} = \sqrt{\sum_{i=1}^T (1-\lambda) \cdot \lambda^{i-1} (R_i - \bar{R})^2}, \quad \text{con } \bar{R} = \phi$$

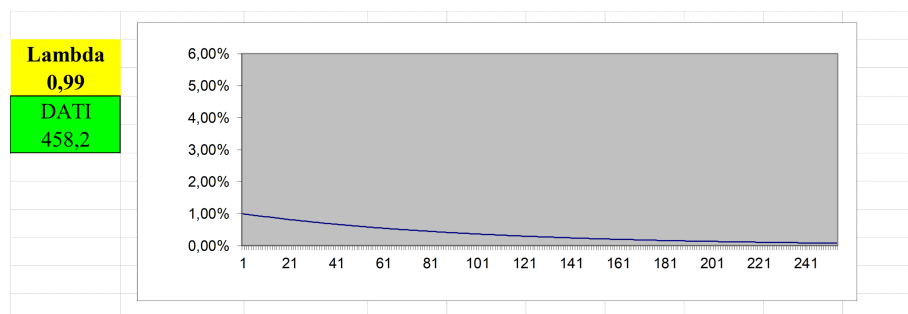
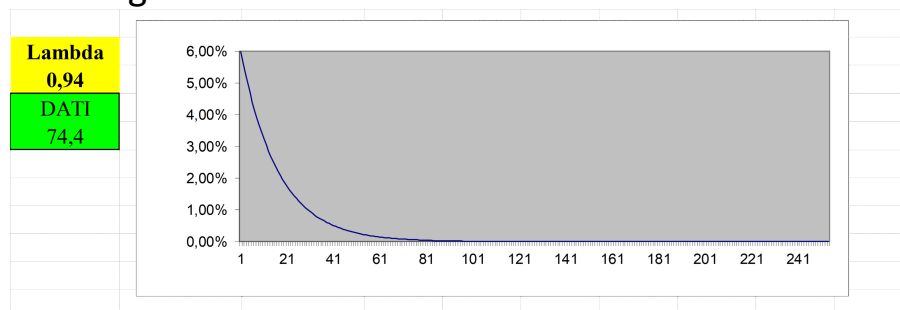
Focus sulla variabile λ (decay factor - fattore di decadimento)

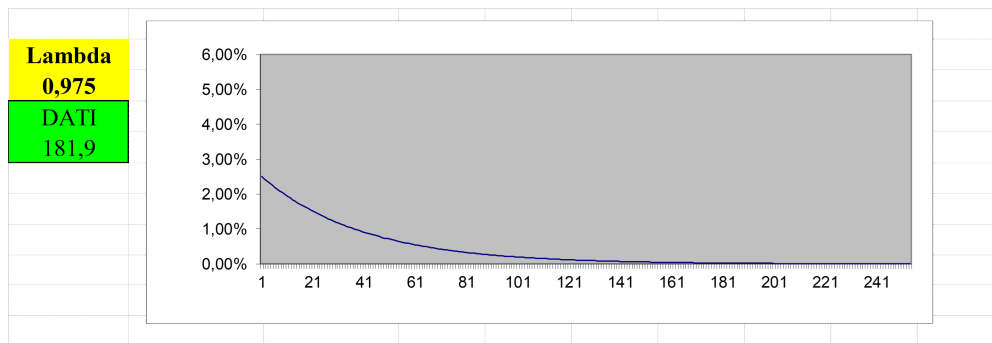
TEORICO $\lambda \in (0; 1)$ \longrightarrow PRATICO $\lambda \in [0,94; 0,99]$
↓ ↓
BASSO ALTO

Effetto del valore λ sui pesi attribuiti alle osservazioni
 Lo Fattore $\sum_{i=1}^T (1-\lambda) \cdot \lambda^{i-1}$

Quanto più noi riteniamo che le osservazioni più recenti debbano influenzare la stima della volatilità, tanto più basso dovrà essere il valore attribuito al decay factor

Analisi grafica





Guardate con attenzione
le legge di decadimento esponenziale...

$$\sum_{i=1}^T (1-\lambda) \cdot \lambda^{i-1}$$

.... affinché $\sum \text{pesi} = 100\%$, $T \rightarrow +\infty$

Ma x noi è necessario definire un campione "FINITO" di osservazioni:

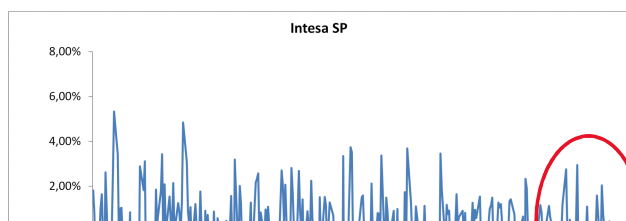
↓
Fissiamo un valore ϵ piccolo $\Rightarrow \epsilon = 1\%$

- ϵ è il peso cumulado che attribuiremmo alle osservazioni che noi trascuriamo fissando un campione di dimensione T
- $(1-\epsilon)$ è il peso che attribuiamo alle osservazioni del campione di dimensione T

T^* prezzo al quale il campione ha una importanza tale da attribuire peso alle osservazioni la cui somma è $(1-\epsilon)$

$$T^* = \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(\lambda)}$$

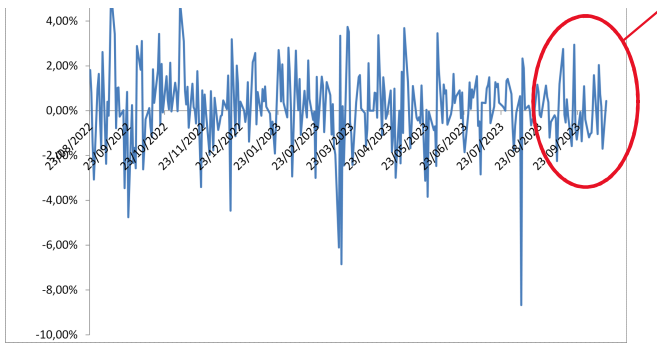
Un esempio di stima della deviazione standard esponenziale:



Velocità inferiore e quelle medio pesate del titolo nell'intero periodo campionario



sigma semplice	ewma 0,99	ewma 0,94
----------------	-----------	-----------



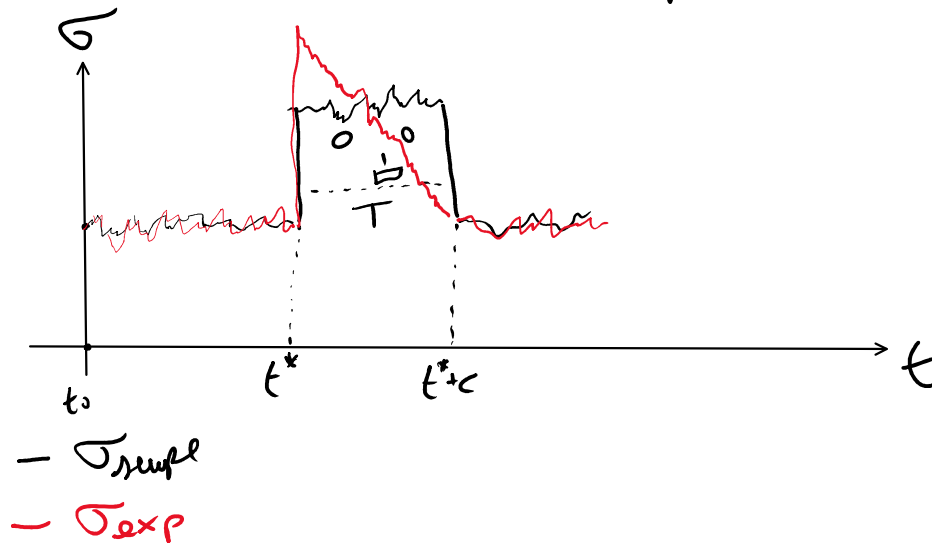
↓

sigma semplice	ewma 0,99	ewma 0,94
1,69%	1,55%	1,24%

Analisi della proprietà più apprezzata della volatilità esponenziale:

LA CAPACITA' DI ELIMINARE L'EFFETTO ECHO

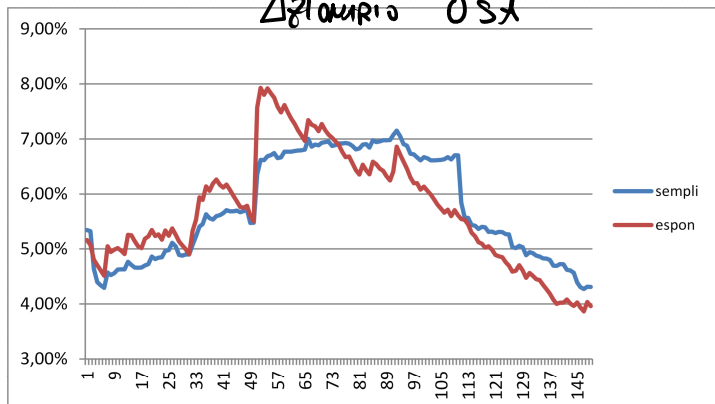
Lo effetto indesiderato di cui "soffre"
 - VaR VaR-Cov applicato con σ e ρ semplici
 - VaR simulazioni storiche



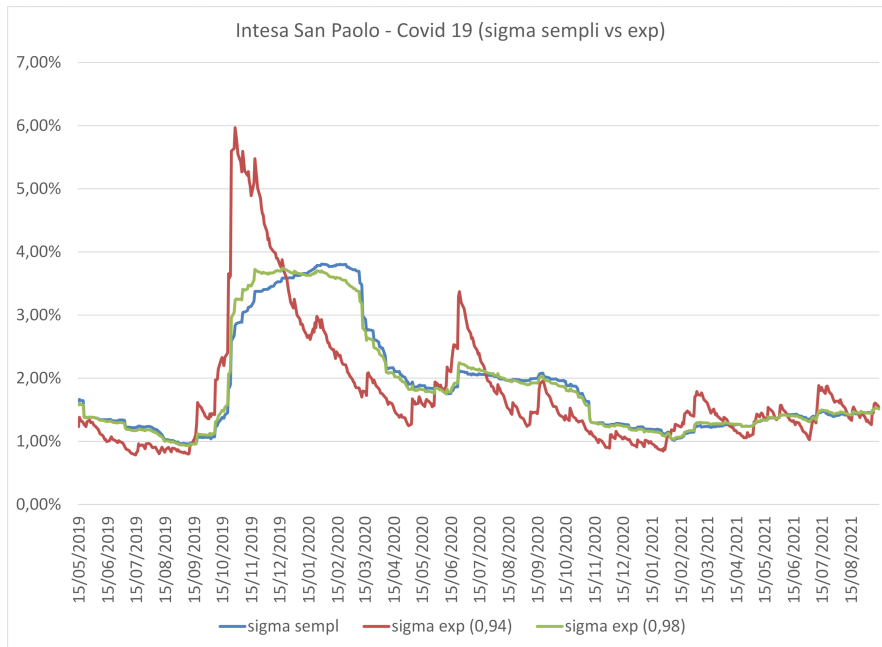
Due casi concreti di manifestazione dell'effetto echo e capacità del σ_{exp} di ELIMINARLO

"CRISI DI WALL STREET"

Aziario USA



CASO "COVID 19" → Marzo-Aprile 2020



Stima della correlazione esponenziale

Analiticamente:

$$\rho_{\text{SEMPLI}} = \frac{\sum_{i=1}^T \frac{(R_i^A - \bar{R}_A)(R_i^B - \bar{R}_B)}{T-1}}{\sigma_{\text{SEMPLI}}^A \cdot \sigma_{\text{SEMPLI}}^B}, \text{ con } \bar{R}_A = \bar{R}_B = \phi$$

↓

$$\rho_{\text{EXP}} = \frac{\text{COV}_{\text{EXP}}(A;B)}{\sigma_{\text{EXP}}^A \cdot \sigma_{\text{EXP}}^B} = \frac{\sum_{i=1}^T (1-\lambda) \cdot \lambda^{i-1} (R_i^A - \bar{R}_A) \cdot (R_i^B - \bar{R}_B)}{\sigma_{\text{EXP}}^A \cdot \sigma_{\text{EXP}}^B}, \text{ con } \bar{R}_A = \bar{R}_B = \phi$$

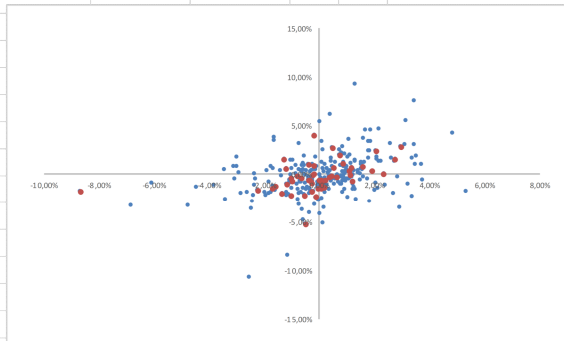
Esempio di calcolo della ρ_{EXP} :

Date	Intesa SP	VOLKSW
16/10/2023	0,44%	-0,16%
13/10/2023	-1,70%	-1,45%
12/10/2023	0,18%	-1,43%
11/10/2023	0,74%	1,95%
10/10/2023	2,04%	2,41%
09/10/2023	-1,04%	-0,46%
06/10/2023	1,59%	0,71%
05/10/2023	0,06%	-0,66%
04/10/2023	-0,98%	-0,74%
03/10/2023	-1,04%	-2,29%
02/10/2023	-1,19%	-1,03%
29/09/2023	-0,39%	1,00%
28/09/2023	1,09%	0,28%
27/09/2023	-0,12%	-2,36%
26/09/2023	-1,36%	-2,00%
25/09/2023	-0,06%	-1,48%
22/09/2023	-1,28%	1,54%
21/09/2023	-0,82%	-0,23%
20/09/2023	2,95%	2,85%
19/09/2023	0,47%	2,72%
18/09/2023	-1,58%	-1,32%

CORR SEMPLICE	
1	0,36
0,36	1

CORR ESPON	
1	0,56
0,56	1

COV ESPON (0,94)	
0,000154092	0,000108772
0,000108772	0,000246102



Il modello Varianze-Covarianze: dall'Asset Normal al Delta Normal

↳ Modello VaR VaR-cov precedentemente applicato a quello Asset NORMAL

$$VAR_{PORT} = \sqrt{[VAR_1 \quad VAR_2 \quad \dots \quad VAR_N] \cdot \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}_{N \times N} \cdot \begin{bmatrix} VAR_1 \\ VAR_2 \\ \vdots \\ VAR_N \end{bmatrix}}$$

N TITOLI IN PORTAFOGLIO

↳ $E \approx 35.000$ Azioni Quotate \Rightarrow Stima VaR $\rightarrow 35.000 \sigma$
 $\rho : \frac{35000 \cdot 3,999}{2} \approx 612 \text{ MLN}$

Allo scopo di limitare gli input necessari per la stima del VaR, passiamo ad un modello noto come **Delta Normal**

D2: Asset Normal \Rightarrow A: Delta Normal
 Le variabili storiche sono i rendimenti dei singoli titoli
 ρ tra i rend. dei titoli
 Le variabili storiche sono i rendimenti dell'MKT nei quali le azioni sono quotate
 ρ tra i rend. dell'MKT

Stima del VaR di un solo titolo Azionario con il modello Delta (Δ) Normal

↳ CAPM (Capital Asset Pricing Model)

Rischio Azionario

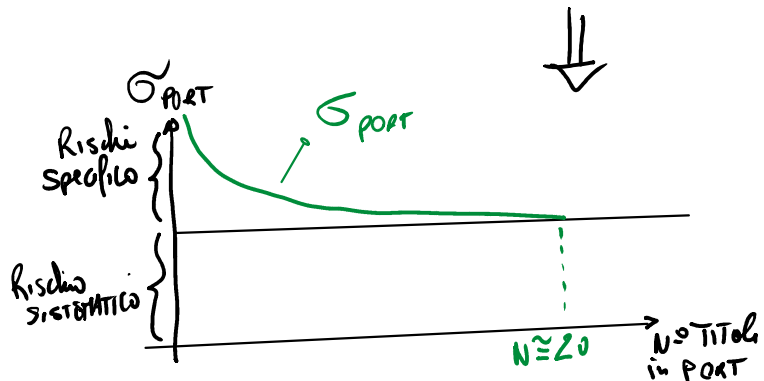


$$\Rightarrow \text{Rischio}_{\text{Azionario}}^{\text{TOT}} = f(\text{Rischio}_{\text{spec}}; \text{Rischio}_{\text{sistemico}})$$

$$\sigma_{\text{TIT}} = \sqrt{(\beta_{\text{TIT}} \cdot \sigma_{\text{MKT}})^2 + \sigma_{\epsilon}^2 + 2(\beta_{\text{TIT}} \cdot \sigma_{\text{MKT}}) \cdot \sigma_{\epsilon} \cdot \rho_{\epsilon, \text{MKT}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_{\text{TIT}} = \sqrt{(\beta_{\text{TIT}} \cdot \sigma_{\text{MKT}})^2 + \sigma_{\epsilon}^2}$$



Da quanto detto, desumiamo che qualora il portafoglio azionario sia ben diversificato, possiamo ipotizzare che il rischio specifico si azzeri e che pertanto quest'ultimo può essere ignorato ai fini della stima della volatilità del portafoglio azionario.

↳ CONDIZIONE NECESSARIA: PORTAF. ben diversificato

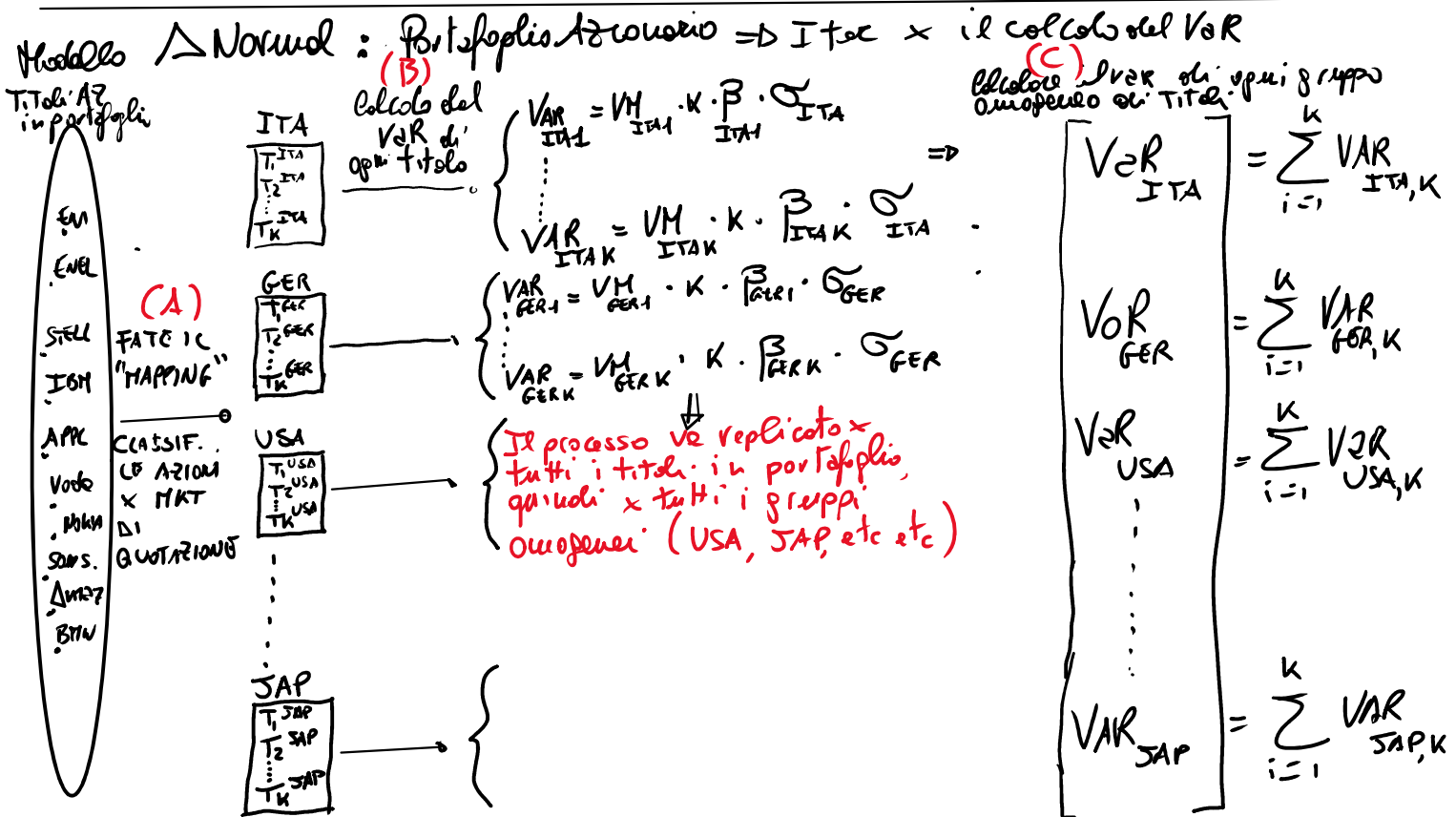
$$\sigma_{\text{TIT}} = \sqrt{(\beta_{\text{TIT}} \cdot \sigma_{\text{MKT}})^2 + \cancel{\sigma_{\epsilon}^2}} = \sqrt{(\beta_{\text{TIT}} \cdot \sigma_{\text{MKT}})^2} \cong \beta_{\text{TIT}} \cdot \sigma_{\text{MKT}}$$

↳ Assumo che il titolo sia parte di un portafoglio ben diversificato e quindi non esposto al rischio specifico dei titoli

$$\dots \propto \frac{1}{M} \cdot K \cdot (\beta \cdot \sigma_{\text{MKT}})$$

$$VAR_{AZ} = VM_{AZ} \cdot K \cdot \sigma_{TIT} = VM_{AZ} \cdot K \cdot (\beta_{TIT} \cdot \sigma_{MKT})$$

$$\beta_{TIT} = \frac{Cov(R_{TIT}; R_{MKT})}{\sigma_{R_{MKT}}^2}$$



$$\sigma_{PORT} = \sqrt{\begin{bmatrix} VAR_{ITA} & VAR_{GER} & VAR_{USA} & \dots & VAR_{JAP} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho_{TIT, MKT} \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} VAR_{ITA} \\ VAR_{GER} \\ VAR_{USA} \\ \vdots \\ VAR_{JAP} \end{bmatrix}}$$

Un esempio di calcolo su excel del modello Delta Normal

lim rischio giorn	€ 43.412,16				
Liv.conf.	99,0%				
VM INT	€ 200.000	ITALIA	INT		
VM UNICREDIT	€ 260.000		UNICREDIT		
VM BMW	€ 300.000				
VM VOLKS	€ 340.000	GERMANIA	BMW		
PORT	€ 1.100.000,00		VOLKS		
K	2,326				
SIGMA MKT IT	1,09%				
SIGMA MKT GERM	1,00%				
BETA ITALIANI		BETA TEDESCHI			
INTESA	1,28	BMW	0,84		
UNICREDIT	1,40	VOLKS	1,07		
VaR Intesa SP	€ 6.513,81	VaR BMW	€ 5.887,08		
VaR uncredit	€ 9.247,37	VaR VOLKS	€ 8.498,54		
VaR ITALIA	€ 15.761,17	Var GERMANIA	€ 14.385,62		
	corr(IT,Germ)		0,87		
	var PORT (delta norma		€ 29.118,31		

La stima del VaR di un portafoglio obbligazionario \Rightarrow Perdita potenziale causata dalle variazioni dei tassi di interesse

VaR Desk Bond \Rightarrow Modello Asset Normal

1 Titolo
$$VaR_{\text{OBBL}}^{\text{IT}} = VM_{\text{OBBL}}^{\text{IT}} \cdot K \cdot \sigma_{\text{OBBL}}^{\text{IT}}$$

Portafoglio
$$VaR_{\text{PORT OBBL}} = \sqrt{\begin{bmatrix} VaR_{\text{OBBL}1} & VaR_{\text{OBBL}2} & \dots & VaR_{\text{OBBL},K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} VaR_{\text{OBBL}1} \\ VaR_{\text{OBBL}2} \\ \vdots \\ VaR_{\text{OBBL},K} \end{bmatrix}}$$

Questo modello amplifica le problematiche computazionali già discusse nella analisi del Desk Equity, in quanto il numero di obbligazioni in circolazione è addirittura superiore al numero della azioni

↳ Per il Desk Bond il problema del numero esorbitante di correlazioni da calcolare è addirittura superiore rispetto al Desk Equity

de calcolo è addiz. nuovo superamento ...



Dall'Asset Normal al Delta (Δ) Normal

Assunzione che la relazione Prezzo - tassi di rendimento di una obbligazione sia LINEARE (ignoriamo la curvatura di questa relazione) \Rightarrow CONVEXITY

(SEGUE PARTO IV)