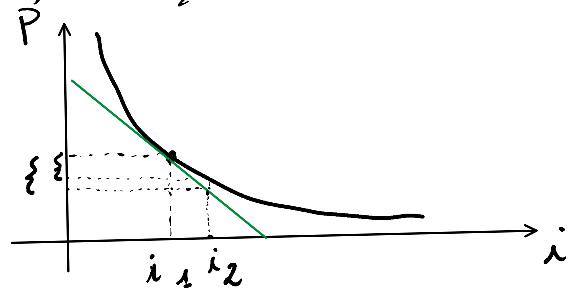
Dall'Asset Normal al Delta (Δ) Normal

Assunzione che la relazione Prezzo - tasso di rendimento di una obbligazione sia LINEARE (ignoriamo la curvatura di questa relazione) ⇒ ~~CONVEXITY~~



Fermiamo al I ordine della serie di Taylor (approssimazione lineare) ⇒ $\Delta P = P \cdot (-DM) \cdot \Delta i \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} = \Delta\% P = (-DM) \cdot \Delta i$

$$\sigma_{TIT} \cong DM_{TIT} \cdot \sigma_i$$

Formule di stima nel modello Δ Normal

Asset:

1 Titolo $VaR_{TIT\ OBBL} = VM_{TIT\ OBBL} \cdot K \cdot \sigma_{TIT\ OBBL}$

Portafoglio $VaR_{PORT\ OBBL} = \sqrt{[VaR_{OBBL\ 1}\ VAR_{OBBL\ 2} \ldots VAR_{OBBL,K}] \cdot \begin{bmatrix} 1 & & K \times K \\ & 1 & \\ \rho_{\text{tra titoli}} & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} VaR_{OBBL\ 1} \\ VAR_{OBBL\ 2} \\ \vdots \\ VaR_{OBBL,K} \end{bmatrix}}$

DELTA:

Titolo: $VaR_{OBBL} = VM_{OBBL} \cdot K \cdot DM_{OBBL} \cdot \sigma_i$ ⇝ Tasso di interesse relativo alla scadenza del titolo

TITOLO QUINQUENNALE → σ tasso di interesse a 5 y

PORTAFOGLIO:

$$VAR_{PORT\ OBBL} = \sqrt{[VAR_{OBBL\ 1}\ VAR_{OBBL\ 2} \ldots VAR_{OBBL\ K}] \cdot \begin{bmatrix} 1 & & K \times K \\ & 1 & \\ \rho_{\text{tra tassi di interesse}} & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} VAR_{OBBL\ 1} \\ VAR_{OBBL\ 2} \\ \vdots \\ VAR_{OBBL\ K} \end{bmatrix}}$$

VAR PORT OBBL = [VAR OBBL 1, VAR OBBL 2, ... OBBL K] [ρ tra tassi di interesse ... 1] [VAR OBBL K]

Questo passaggio dall'asset al delta normal, non è tuttavia sufficiente allo scopo di semplificare adeguatamente il processo di calcolo del VaR di un Portafoglio Obbligazionario

↳ Perché questo passaggio non permette di limitare in modo sufficiente il numero delle variabili aleatorie, in quanto dovremmo essere in grado di stimare tante volatilità quante sono le possibili scadenze per ogni valuta

↳ gg. × ANNI × VALUTE = n° Variab. Aleatorie ⇒ n° Correl.

$260 \times 30 \times 20 = 156.000 \Rightarrow \cong 12$ MILIARDI

⇓

Per risolvere il problema della NUMEROSITA' delle variabili aleatorie, viene applicato il modello del Clumping ⇒ Descrizione di tutti i passaggi necessari × la stima del VaR di un PORTAFOGLIO OBBLIGAZIONARIO APPLICANDO Δ NORMAL + CLUMPING

(I) BTP 1, BTP 2, JAP BOND 1, CCT 1, BOT 1, BUND 1, OAT 1, GILT 1, TBOND 1, TBOND 2, TBILL 1 — Mappare i titoli × valuta di denominazione

Titoli in € · Titoli in \$ · Titoli in ¥ · Titoli in Sterline

(II) Titoli in € — Analizziamo i titoli secondo la logica "zero coupon" ⇓ scomponiamo ogni titolo nelle sue componenti zero coupon ⇓ PORT. OBBL. ⇓ PORT. ZERO COUPON ⇒

Titoli Z.C. in € — DEFINIAMO LE SCADENZE NODALI (NOTCHES)

SCADENZE NODALI: 1 gg, 2 gg, 3 gg, 1 sett, 1M, 2M, 3M, 6M, 1y, 2y, 3y, 5y, 8y, 10y, 15y, 20y, 30y, 50y

(III) Applico il Clumping grazie al quale mi ritrovo con un Basket di obbligazioni zero-coupon con scadenze pari a quelle Nodali ⇒

* Dopo il punto (I) facciamo la descrizione dell'Iter considerando solo la componente dei titoli in €

Z.C. post Clumping: 1 gg, 2 gg, 3 gg, 1 sett, 1M, 2M, 3M, 6M — $VM_{1gg} = \sum VM_{i,1gg}$

(IV) Posso sommare algebricamente i VM di tutti gli Z.C. che condividono la stessa

(segue) ⇒

(V) ⇒ Calcolo del VaR × ...

VM × ogni Nodo: 1 gg, 2 gg, 3 gg, 1 sett, 1M, 2M, 3M — $VAR_{1gg} = VM_{1gg} \cdot K \cdot DM_{1gg} \cdot \sigma_{i\,1gg}$

$[VAR_{1gg}, VAR_{2gg}, \ldots, VaR_{1g}]$ ⇒

(segue) ⇒

- 2M
- 3M
- 6M
- 1y
- 2y
- 3y
- 5y
- 8y
- 10y
- 15y
- 20y
- 30y
- 50y

gli Z.C. che condividono la stessa scadenza

$$VM_{3y} = \sum VM_{J,3y}$$

$$VM_{50y} = \sum VM_{K,50y}$$

(V) ⇒ Calcolo del VaR x ogni Nodo

- 2M
- 3M
- 6M
- 1y
- 2y
- 3y
- 5y
- 8y
- 10y
- 15y
- 20y
- 30y
- 50y

$$VAR_{1y} = VM_{1y} \cdot K \cdot DM_{1y} \cdot \sigma_{i\,1y}$$

$$VAR_{30y} = VM_{30y} \cdot K \cdot DM_{30y} \cdot \sigma_{i\,30y}$$

$$\begin{bmatrix} VaR_{1y} \\ \vdots \\ VaR_{10y} \\ \vdots \\ VaR_{50y} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

(VI) ⇒ (segue) Aggrego i VaR nodali nella base delle correlazioni tra tutti gli interessi nodali

$$VAR_{PORT}\,(€) = \sqrt{\begin{bmatrix} VAR_{1y} & VAR_{2y} & \cdots & VAR_{50y} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \rho_{\text{tra tassi NODALI}} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} VAR_{1y} \\ VaR_{2y} \\ \vdots \\ VaR_{50y} \end{bmatrix}}$$

⇓

Esempio su excel di calcolo del VaR di un portafoglio obbligazionario (semplificato)

Limite operativo Giornaliero	**€ 248.069**

	V. Mkt	Dur. Modificata	Tres
BOT Trimestrale	€ 17.500.000	0,248	0,90%
BTP strip Decennale	€ 16.000.000	9,61	4,05%
Valore di Mercato Portafoglio	**€ 33.500.000**		

Livello di confidenza	99,00%

Input Modello VaR "Var-Cov"	**Tassi 3 mesi**	**Tassi 10 anni**
Rendimento atteso		
Deviazione Standard t. interesse	0,33%	0,10%
Multiplo di Sigma (k)	2,326	2,326
VaR	€ 33.287,1	€ 357.728

⇩

VaR Portafoglio	€ 364.211	No rispetto limite

correlazioni	**asso 3 mes**	**asso 10 ann**
tasso 3 mesi	**1**	
tasso 10 anni	0,15	**1**

VaR della posizione in cambi (Rischio di cambio)

In tal caso non vi è differenza tra modello Asset e Delta Normal; questo perché la volatilità della posizione in valuta estera coincide con la volatilità del fattore di rischio, ossia il tasso di cambio.

$ k Conversione tasso SPOT $VM^{€}$

rischio, ossia il tasso di cambio.

$\$_1, \$_2, ¥_1, ¥_2, ¥_3, £_1, £_2$

(I) Mapping $\Longrightarrow$ aggregare le posizioni in valuta estera x valute OMOGENEE

$$\$_1, \$_2, \dots, \$_k \longrightarrow \$_{TOT} = \sum_{i=1}^{k} \$_i \xrightarrow[\text{tasso SPOT}]{\text{Conversione}} VM^{€}_{\$}$$

$$¥_1, ¥_2, \dots, ¥_k \longrightarrow ¥_{TOT} = \sum_{i=1}^{k} ¥_i \xrightarrow[\text{tasso SPOT}]{\text{Conversione}} VM^{€}_{¥}$$

(segue)

(II) Sommare ~~algebricamente~~ le posizioni omogenee x valuta

(III) Fare M-T-M delle posizioni valutarie: convertendo in € la posizione in base al tasso SPOT cambio

$$£_1, £_2, \dots, £_k \longrightarrow £_{TOT} = \sum_{i=1}^{k} £_i \xrightarrow[\text{TASSO SPOT}]{\text{Conversione}} VM^{€}_{£}$$

$$VM^{€}_{\$} \xrightarrow{\text{Calcolo}} VaR_{\$} = VM^{€}_{\$} \cdot K \cdot \sigma_{€/\$}$$

$$VM^{€}_{¥} \xrightarrow{\text{Calcolo}} VaR_{¥} = VM^{€}_{¥} \cdot K \cdot \sigma_{€/¥} \Longrightarrow \begin{bmatrix} VaR_{\$} \\ VaR_{¥} \\ VaR_{AUS\$} \\ VaR_{CAN\$} \\ \vdots \\ VaR_{£} \end{bmatrix}$$

(segue)

(IV) Calcolo del VaR x ogni posizione in valuta estera

$$VM^{€}_{£} \xrightarrow{\text{Calcolo}} VaR_{£} = VM^{€}_{£} \cdot K \cdot \sigma_{€/£}$$

$$\begin{bmatrix} VaR_{\$} \\ VaR_{¥} \\ VaR_{AUS\$} \\ VaR_{CAN\$} \\ \vdots \\ VaR_{y} \end{bmatrix}$$

(V) Aggregazione dei VaR x giungere al VaR complessivo del Desk Exchange $\Rightarrow$

$$VaR_{\text{DESK EXCHANGE}} = \sqrt{\begin{bmatrix} VaR_{\$} & VaR_{¥} & \cdots & VaR_{y} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & & \\ \rho & 1 & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} VaR_{\$} \\ VaR_{¥} \\ \vdots \\ VaR_{y} \end{bmatrix}}$$

ρ tra tassi di cambio

Esempio di stima del VaR per una posizione in valuta

		M-t-M
Posizione in $	$1.000.000	917.431,19 €
Posizione in Y	-60.000.000 JPY	-372.670,81 €
Valore di Mercato Portafoglio	-	
Livello di confidenza	99,00%	

Input Modello VaR "Var-Cov"	€/$	€/Y
Deviazione Standard	0,96%	1,33%
Multiplo di Sigma (k)	2,326	2,326
VaR	€ 20.553	-€ 11.511
VaR Portafoglio	€ 15.208	ok

correlazioni	€/$	€/Y
€/$	1	0,68
€/Y	0,68	1

Eredità di questo esercizio è che: AI FINI DI UNA CORRETTA QUANTIFICAZIONE DEL VAR, IN PRESENZA DI POSIZIONI CORTE (AZIONARIE, OBBLIGAZIONARIE, VALUTARIE) IL VAR DEVE ASSUMERE UN SEGNO NEGATIVO.
Solo in questo modo si riesce a quantificare correttamente l'effetto prodotto dalle correlazioni tra le variabili aleatorie.

Esempio su Excel per sedimentare il concetto di VaR in presenza di posizioni "CORTE".

Date	IBM	APPLE	S&P 500
23/08/2022	-0,60%	-0,20%	-0,22%
24/08/2022	-1,12%	0,18%	0,29%
25/08/2022	0,56%	1,49%	1,41%
26/08/2022	-2,69%	-3,77%	-3,37%
29/08/2022	-0,05%	-1,37%	-0,67%
30/08/2022	-0,56%	-1,53%	-1,10%
31/08/2022	-0,87%	-1,06%	-0,78%
01/09/2022	0,94%	0,47%	0,30%
02/09/2022	-1,44%	-1,36%	-1,07%
05/09/2022	0,00%	0,00%	0,00%
06/09/2022	-0,84%	-0,82%	-0,41%
07/09/2022	0,78%	0,93%	1,83%
08/09/2022	0,60%	-0,96%	0,66%
09/09/2022	0,56%	1,88%	1,53%
12/09/2022	1,14%	3,85%	1,06%
13/09/2022	-2,61%	-5,87%	-4,32%
14/09/2022	0,35%	0,96%	0,34%
15/09/2022	-1,72%	-1,89%	-1,13%
16/09/2022	1,42%	-1,10%	-0,72%
19/09/2022	0,36%	2,51%	0,69%
20/09/2022	-1,12%	1,57%	-1,13%
21/09/2022	-1,08%	-2,03%	-1,71%
22/09/2022	0,30%	-0,64%	-0,84%
23/09/2022	-2,07%	-1,51%	-1,72%
26/09/2022	-0,57%	0,23%	-1,03%

lim rischio giorn	€ 43.412,16		Tasso €/$	1,09		
Liv.conf.	99,0%					
VM IBM	€ 275.229,36	USD 300.000,00				
VM APPLE	€ 148.623,85	USD 162.000,00				
VM FUTURE	-€ 229.357,80	-USD 250.000,00			Posiz in $	
	€ 194.495,41				€ 194.495,41	VM €
Sigma Mercato	1,10%	trasferimento rischio cambio al desk valutario			2,326	k
multiplo (k)	2,326				0,96%	sigma
VaR IBM	€ 4.610,98					VaR
VaR APPLE	€ 4.894,06					
VaR Future	-€ 5.856,39					
VaR PORTAFOGLIO	€ 3.648,65					
Beta IBM	Beta APPLE	Beta S&P 500				
0,656	1,290	1,00				

↳ $\boxed{\text{Fine Corso MTGR} \rightarrow \text{6 C.F.U.}}$

Modello parametrico: Aggregazione dei VaR stimati per ogni *singolo desk*

↳ VaR dell'Intero $\boxed{\text{TRADING BOOK}}$

Soluzione 1: Ipotesi di perfetta correlazione positiva (+1) tra i desk

↳ Sovrastima del VaR, in quanto questa soluzione assume che siano perfettamente correlate in modo positivo variabili aleatorie (tassi di interesse, tassi di cambio e mkt azionari) la cui correlazione è nelle evidenze pratiche molto distante dal +1

VAR BOND	€ 364.211		
VAR EQUITY	€ 32.204		
VAR EXCHANGE	€ 15.208		
VAR TRADING BOOK	€ 411.623		

	VAR BOND	VAR EQUITY	VAR EXCHANGE
VAR BOND	1	1	1
VAR EQUITY	1	1	1
VAR EXCHANGE	1	1	1

Soluzione 2: Ipotesi di correlazione nulla (0) tra i desk

↳ Rischio di stimare un VaR del Trading Book che è [illegible] a quello effettivo, in quanto ipotizza nulla una,

↳ Rischio di stimare un VaR del Trading Book che è inferiore a quello effettivo, in quanto ipotizza nulla una correlazione che potrebbe essere positiva (se pur certamente distante dal +1)

VAR BOND	€ 364.211		
VAR EQUITY	€ 32.204		
VAR EXCHANGE	€ 15.208		
VAR TRADING BOOK	€ 365.948		
	VAR BOND	VAR EQUITY	VAR EXCHANGE
VAR BOND	1	0	0
VAR EQUITY	0	1	0
VAR EXCHANGE	0	0	1

Bond = Bond decennali in €
Exch = tasso €/$
Equ = Azioni USA

Soluzione 3: Dopo aver identificato il "main risk factor" per ogni desk, Assumiamo che la correlazione tra desk sia equivalente alla correlazione Esistente tra i "main risk factor"

↳ Semplificazione: la ρ tra "main risk factor" è solo una proxy della "vera" correlazione tra Desk, la quale dipende dal "comovement" di una pluralità di fattori di rischio

	BOND 10Y€	AZ USA	€/$
Bond10Y€	1	-0,1	+0,2
AZ.USA	-0,1	1	-0,3
€/$	+0,2	-0,3	1

→

	VAR BOND	VAR EQUITY	VAR EXCHANGE
VAR BOND	1	-0,1	+0,2
VAR EQUITY	-0,1	1	-0,3
VAR EXCHANGE	+0,2	-0,3	1

VAR BOND	€ 364.211
VAR EQUITY	€ 32.204
VAR EXCHANGE	€ 15.208
VAR TRADING BOOK	€ 365.368

Soluzione 4: E' la soluzione più precisa perché non fa semplificazioni sulla struttura delle correlazioni. Stima il VaR del Trading Book calcolando le correlazioni tra tutti i fattori di rischio, anche tra quelli eterogenei

Soluzione 4. E' la soluzione più precisa perché non fa semplificazioni sulla struttura delle correlazioni. Stima il VaR del Trading Book calcolando le correlazioni tra tutti i fattori di rischio, anche tra quelli eterogenei.

↳ n° Variabili aleatorie
- EQUITY → 50
- EXCHANGE → 40
- BOND → 15 × 40 = 600

V.A. TOT 690 → n° $\rho = \frac{690 \times 689}{2} \cong 237.000$

Calcolo del VaR del Trading Book

$$VaR_{TB} = \sqrt{\Big[\underbrace{VaR_{€}^{1gg}\; VaR_{€}^{2gg} \cdots VaR_{€}^{50y}}_{\text{DESK BOND}}\;\; \underbrace{VaR_{IT}\; VaR_{JAP} \cdots VaR_{USA}}_{\text{DESK Equ}}\;\; \underbrace{VaR_{\$} \cdots VaR_{¥}}_{\text{DESK Exch}}\Big] \times \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \rho_{BOND} \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} & \rho_{COPPIE\,(BOND;Equ)} & \rho_{COPPIE\,(BOND;Exch)} \\ \rho_{COPPIE\,(BOND;Equ.)} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \rho_{Equ.} & & 1 \end{bmatrix} & \rho_{COPPIE\,(Equ;Exch)} \\ \rho_{COPPIE\,(BOND;Exch)} & \rho_{COPPIE\,(Equ;Exch)} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \rho_{Exch} & & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} VaR_{€}^{1gg} \\ \vdots \\ VaR_{€}^{50y} \\ VaR_{IT} \\ \vdots \\ VaR_{USA} \\ VaR_{\$} \\ \vdots \\ VaR_{¥} \end{bmatrix}}$$

Approfondimenti sul calcolo del VaR

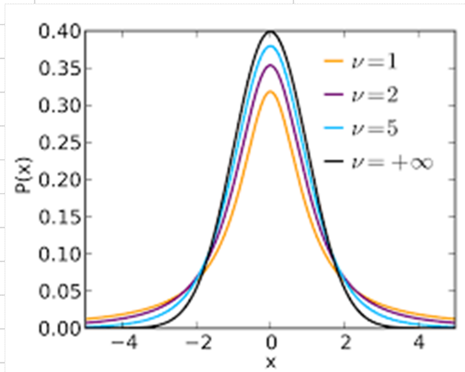
(I) Assumiamo che le variabili aleatorie si distribuiscano come una t-student

↳
- occorre sempre e solo la stima $\cancel{\mu}$ e σ
- le formule utilizzate x il modello VaR-Cov sono confermate
- occorre stimare il K (multiplo di σ)
- assumendo che le V.a. si distribuisca come una t-student con N gradi di libertà

Esempio concreto di stima del VaR con Hp distr. t-student:

Date	Intesa SP
16/10/2023	0,44%
13/10/2023	-1,70%
12/10/2023	0,18%
11/10/2023	0,74%
10/10/2023	2,04%
09/10/2023	-1,04%
06/10/2023	1,59%
05/10/2023	0,06%
04/10/2023	-0,98%
03/10/2023	-1,04%
02/10/2023	-1,19%
29/09/2023	-0,39%
28/09/2023	1,09%
27/09/2023	-0,12%
26/09/2023	-1,36%
25/09/2023	-0,06%
22/09/2023	-1,28%
21/09/2023	-0,82%
20/09/2023	2,95%
19/09/2023	0,47%
18/09/2023	-1,58%

lim rischio giorn	€ 43.412,16
Valore di Mercato	**€ 900.000,00**
Livello di confidenza	**99%**
Gradi libertà	**7**
k	**3,50**
Sigma	**1,69%**
VaR (99%)	€ 53.197,04



(II) Espansione Cornish-Fisher

Con questa metodologia il multiplo della deviazione standard (*k*) viene stimato attraverso una formula che ha tra i suoi input l'asimmetria (*S* o *Sk*) e la curtosi (*K* o *Ku*).
Intuitivamente, l'espansione Cornish-Fisher riesce a trovare il multiplo della deviazione standard in modo che la produttoria k*sigma riesca a misurare eventi estremi che incorporano anche fenomeni di asimmetria e code "spesse" o "sottili"

K FINALE   Asimm.   Curtosi

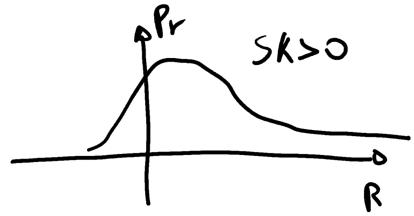
$$\boxed{Z_{Ad} = z + (z^2 - 1)\frac{S}{6} + (z^3 - 3z)\frac{K}{24} - (2z^3 - 5z)\frac{S^2}{36}}$$

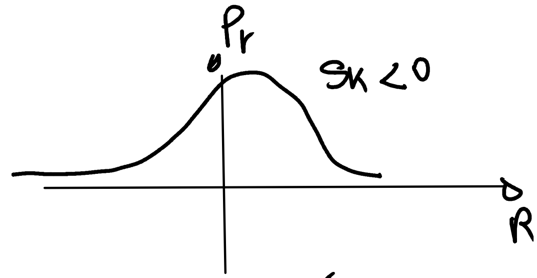
K Distr. Norm

$$VaR = VM \cdot K^* \cdot \sigma = VM \cdot Z_{Ad} \cdot \sigma$$

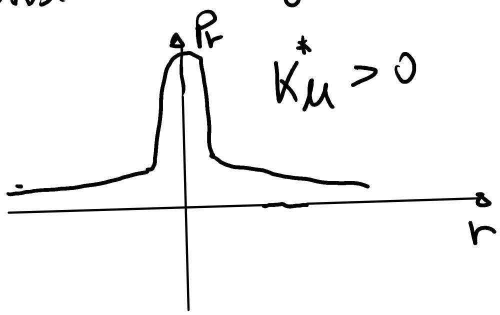
Esempio di calcolo del VaR con l'espansione Cornish-Fisher

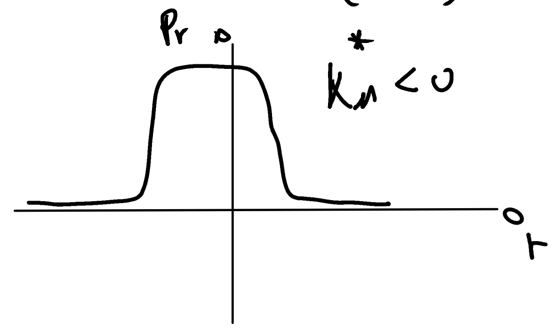
Asimmetria - Skewness - SK - S





Curtosi - Kurtosys - Ku - K → standardizzata (-3)





Date	Intesa SP
16/10/2023	0,44%
13/10/2023	-1,70%
12/10/2023	0,18%
11/10/2023	0,74%
10/10/2023	2,04%
09/10/2023	-1,04%
06/10/2023	1,59%
05/10/2023	0,06%
04/10/2023	-0,98%
03/10/2023	-1,04%
02/10/2023	-1,19%
29/09/2023	-0,39%
28/09/2023	1,09%
27/09/2023	-0,12%
26/09/2023	-1,36%
25/09/2023	-0,06%
22/09/2023	-1,28%
21/09/2023	-0,82%

lim rischio giorn	€ 43.412,16
Valore di Mercato	**€ 900.000,00**
Livello di confidenza	**99%**
k (norm) - z	**-2,326**
Sigma	**1,69%**
Asimmetria	**-0,78**
Curtosi stand	**0,66**
k* - ZAd	**-2,825**

$$Z_{Ad} = z + (z^2 - 1)\frac{S}{6} + (z^3 - 3z)\frac{K}{24} - (2z^3 - 5z)\frac{S^2}{36}$$

VaR (99%)	€ 42.945,33

(III) Modello Ibrido

E' un modello che apporta delle modifiche al modello delle *simulazioni storiche* allo scopo di rimuovere l'ipotesi della stazionarietà.

Modello Ibrido ⇒ $\boxed{\text{SIMULAZIONI STORICHE}}$ + $\boxed{\text{Ponderazione Esponenziale } (1-\lambda)\cdot\lambda^{i-1}}$

Questo modello si differenzia da quello delle simulazioni

Questo modello si differenzia da quello delle simulazioni storiche per il fatto di attribuire alle osservazioni passate una probabilità di manifestazione diversa. Nello specifico, questo modello attribuisce, secondo una legge esponenziale, una probabilità superiore alle osservazioni più recenti.

Esempio di Stima del VaR con il Modello Ibrido

Oltre il VaR .... il Conditional VaR / Expected Shortfall

C-VaR

Lower Partial Moment 1° grado

Hp. calcolo con il metodo delle SIMULAZIONI STORICHE

Date	Intesa SP
08/08/2023	-8,67%
15/03/2023	-6,85%
13/03/2023	-6,10%
23/09/2022	-4,75%
15/12/2022	-4,46%
24/05/2023	-3,84%
20/09/2022	-3,46%
21/11/2022	-3,41%
22/05/2023	-3,12%
26/08/2022	-3,07%

lim rischio giorn	€ 43.412,16
Valore di Mercato	€ 900.000,00
VaR (99%)	€ 42.764,58
C-VaR (99%)	€ 64.879,68
	-7,21%

(FINO) → In bocca al lupo.....