ESAME **12 Gennaio 2015** **COMPITO A**	
Cognome	***Nome***
Numero di matricola	

1) ***Approssimare tutti i calcoli alla quarta cifra decimale.***
2) ***Ai fini della valutazione si terrà conto solo ed esclusivamente di quanto riportato negli appositi spazi.***
3) ***Al termine della prova, è OBBLIGATORIO consegnare il presente foglio ed il foglio di brutta (DI CUI NON SI TERRÀ CONTO AI FINI DELLA VALUTAZIONE).***

1. Il preside di una scuola sospetta che gli alunni che frequentano la sua scuola abbiano problemi di apprendimento. In particolare vuole verificare la preparazione in ortografia, propone un dettato a tutti i bambini. Detta un testo di 20 parole e conta gli errori in ciascun testo. Gli alunni di quinta elementare in Italia in un dettato di 20 parole commettono, in media, 2 errori.
Nella tabella seguente sono riportati i risultati ottenuti esaminando il dettato di 100 alunni:

Numero di errori	n_i
0	1
1	2
2	20
3	35
4	24
5	16
6	1
7	1

x	n	x*n	x^2	n*x^2	fi	Fi
0	1	0	0	0	0,01	0,01
1	2	2	1	2	0,02	0,03
2	20	40	4	80	0,2	0,23
3	35	105	9	315	0,35	0,58
4	24	96	16	384	0,24	0,82
5	16	80	25	400	0,16	0,98
6	1	6	36	36	0,01	0,99
7	1	7	49	49	0,01	1
somma	100	336		1266		
					0	
media		3,36		12,66		
			var	1,3704		

a) Determinare media, moda, mediana e varianza del "Numero di errori in un dettato di 20 parole"

Media (1punto) **3,36**	**Mediana (1punto)** **3**	**Moda (1punto)** **3**
Varianza (1punto)		

Var(x)=12,66-3,36^2=1,3704

b) Determinare la frequenza relativa con cui un alunno commette più di 2 errori

Frequenza (1punto)

Freq(X>2)=1-Freq(X≤2)=1-0.23=0.77

Sia ora X la variabile aleatoria "numero di errori", e si assumono non note media e varianza

a) Determinare una stima puntuale di μ, numero medio di errori in un dettato di 20 parole **(1punto)**

Stima μ

$\bar{x} = 3.36$

b) Definire le proprietà dello stimatore utilizzato. **(2punti)**

- Non distorto
- consistente
- asintoticamente normale

c)Utilizzando i dati del campione costruire l'intervallo di confidenza al 99% per μ.**(2punti)**

Intervallo di confidenza

$$99\%CI = \left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{100}}; \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{100}}\right] = \left[3.36 - 2.57\frac{1.1706}{\sqrt{100}}; 3.36 + 2.57\frac{1.1706}{\sqrt{100}}\right] = [3.06, 3.66]$$

$z_{1-\alpha/2} = 2.57$

$S^2 = 1.3704$

$s = 1.1706$

d) Come cambia l'ampiezza dell'intervallo di confidenza se, a parità di altre condizioni, diminuiamo il livello di confidenza? **(1punto)**

Ampiezza dell'intervallo di confidenza diminuisce

e) Verificare, ad un livello di significatività α = 0.01, l'ipotesi che il valore medio del numero di errori nella scuola di interesse sia uguale al valore medio nazionale, contro l'alternativa che sia superiore [H_0: μ = 2 vs H_1: μ > 2] **(2punti)**

e)Verifica di ipotesi

$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - 2}{\frac{s}{\sqrt{100}}} \geq 2.326 \right\} \qquad \frac{\bar{x} - 2}{\frac{s}{\sqrt{100}}} = \frac{3.36 - 2}{\frac{1.1706}{\sqrt{100}}} = 11.618 \quad RIFIUTO$$

$$p - value = P\left(\bar{X} \geq 3.36\right) = P\left(\frac{\bar{X} - 2}{\frac{s}{\sqrt{100}}} \geq \frac{3.36 - 2}{\frac{1.1706}{\sqrt{100}}} \right) = P(Z > 11.618) < 0.01$$

f) Quali conclusioni può trarre il preside? Gli alunni della scuola in questione sono effettivamente meno bravi in ortografia, è quindi necessario incentivare la scrittura? **(1punto)**

Gli studenti della scuola sono meno preparati in ortografia. E' necessario un intervento per incentivare la scrittura

2. Un'azienda vuole analizzare l'efficacia della campagna pubblicitaria adottata negli ultimi 12 mesi sui propri profitti. A riguardo, sono stati raccolti a fine di ogni mese i dati relativi alla spesa pubblicitaria (X) ed alle vendite (Y) (entrambi espressi in migliaia di euro). I dati a disposizione sono i seguenti:

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 120 \quad \sum_{i=1}^{12} y_i = 246 \quad \sum_{i=1}^{12} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 48 \quad \sum_{i=1}^{12} \left(y_i - \bar{y}\right)^2 = 300 \quad \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 2556$$

		media		
somma x	120	10	covarianza	8
sommay	246	20,5	var x	4
somma (x-media x)^2	48	4	var y	25
somma (y-media y)^2	300	25		
somma xy	2556	213	corr	0,8

b1	2
b0	0,5

a) Specificare un modello di regressione lineare semplice che descriva la relazione tra le vendite (Y) e la spesa pubblicitaria (X) e stimarne i coefficienti con il metodo dei minimi quadrati. **(2punti)**

y=0,5+2*x

b) Calcolare il coefficiente di correlazione tra la spesa pubblicitaria e le vendite. **(2punti)**

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{8}{\sqrt{4 \times 25}} = 0.8$$

c)Sulla base dei risultati, quali conclusioni può trarre l'azienda? **(1punto)**

Le vendite aumentano all'aumentare delle spese

c) secondo il modello, quali sono le vendite attese nel prossimo mese se si pianifica di spendere 8 mila euro in pubblicità? **(1punto)**

$$\hat{y} = 0.5 + 2 \times 8 = 16.5$$

3. Data una popolazione con media μ e varianza σ^2 e un campione casuale semplice di quattro variabili, considerare il seguente stimatore per μ

$$T_1 = -\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2 - X_3 + \frac{5}{3}X_4 .$$

a)Indicare se T è uno stimatore corretto per μ**(1punto)**

b)Calcolare l'errore quadratico medio di T**(1punto)**

a)

$$E(T_1) = -\frac{1}{3}E(X_1) + \frac{2}{3}E(X_2) - E(X_3) + \frac{5}{3}E(X_4) = \mu\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 1 + \frac{5}{3}\right) = \mu$$

a) EQM

$$Var(T_1) = \frac{1}{9}Var(X_1) + \frac{4}{9}Var(X_2) + Var(X_3) + \frac{25}{9}Var(X_4) = \sigma^2\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 1 + \frac{25}{9}\right) = \frac{39}{9}\sigma^2$$

4. Enunciare il teorema del limite centrale**(2punti)**

5. Si indichi se le seguenti affermazioni sono Vere o False**(2punti)**

Affermazione	**Vero / Falsa?**
Due eventi indipendenti con probabilità positiva non possono essere incompatibili.	Vero
La covarianza tra due variabili aleatorie è sempre minore di 1	Falso

6. E' noto che il punteggio – in unità convenzionali - riportato dagli studenti nella prova d'ingresso in una certa Università si distribuisce secondo una legge normale con media pari a 420 e varianza 8100.
a) Si determini la percentuale di individui che ottengono un punteggio superiore a 550; **(1punto)**
b) Se l'Università è interessata ad ammettere l'80% dei candidati, quale dovrà essere il punteggio di soglia perché uno studente sia ammesso? **(1punto)**

a)

$$P(X > 550) = P\left(\frac{X-420}{90} > \frac{550-420}{90}\right) = P(Z > 1.44)$$

0.074

b)

$P(X>x_a)=0.8$
x_a 20-esimo percentile distribuzione X
z_a 20-esimo percentile distribuzione Z
$z_a=-0.84$

$$\frac{x_a - 420}{90} = z_a \qquad \frac{x_a - 420}{90} = -0.84$$

$$x_a = 420 - 0.84 \times 90 = 344.4$$

c) Scegliendo a caso tre studenti che hanno sostenuto la prova d'ingresso, si calcoli la probabilità che almeno due di essi siano stati ammessi. **(1punto)**
d) Scegliendo a caso 100 studenti che sosterranno la prova d'ingresso, ci calcoli la probabilità che non più di 75 studenti verranno ammessi? **(1punto)**

c)

```
dbinom(2,3,.8)
[1] 0.384
> dbinom(3,3,.8)
[1] 0.512
sum(dbinom(2:3,3,.8))
[1] 0.896
```

d)

```
approssimazione della binomiale alla
normale
pnorm(75,100*.8,sqrt(.8*.2)*10)
[1] 0.1056498
```