

**ESAME – 29 Maggio 2018****COMPITO A****Cognome****Nome****Numero di matricola**

- 1) Consegnare dopo un'ora e mezza
- 2) Approssimare tutti i calcoli alla quarta cifra decimale.
- 3) Ai fini della valutazione si terrà conto solo ed esclusivamente di quanto riportato negli appositi spazi.
- 4) Al termine della prova, è **OBBLIGATORIO** consegnare il presente foglio ed il foglio di brutta (**DI CUI NON SI TERRÀ CONTO AI FINI DELLA VALUTAZIONE**).

**1. Enunciare le proprietà della media aritmetica (2 punti)****2. Enunciare e dimostrare il teorema di Bayes (2 punti)**

**3.** Si consideri la variabile casuale continua  $X$  che rappresenta il diametro dei bulloni prodotti da una certa azienda in millimetri. Sapendo che in questa popolazione di riferimento,  $E(X)=12$  e  $Var(X)=0.6$ . Si esamina un campione casuale di  $n = 10$  bulloni. Indicare il valore atteso, varianza della variabile media campionaria  $\bar{X}$  **(1 punti)**

$$E(\bar{X}) = 12$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{0.6}{10} = 0.06$$

Possiamo inoltre indicare la distribuzione della variabile aleatoria media campionaria  $\bar{X}$  **(1 punto)**

No, n non è abbastanza grande per applicare il teorema del limite centrale

**4.** Un portafoglio comprende 30 azioni XXX e 30 azioni YYY. Il prezzo delle azioni XXX è una variabile casuale con media 20 e varianza 9, il prezzo delle azioni YYY è una variabile casuale con media 20 e varianza 16. I prezzi delle due azioni sono correlati negativamente con un coefficiente di correlazione lineare pari a -0.4. Calcolare il valore atteso e la varianza del valore del portafoglio dove XXX e YYY sono equamente presenti. **(2 punti)**

$$E(\text{Portafoglio}) = 30 \times E(\text{XXX}) + 30 \times E(\text{YYY}) = 30 \times 20 + 30 \times 20 = 120$$

$$Var(\text{Portafoglio}) = 30^2 \times Var(\text{XXX}) + 30^2 \times Var(\text{YYY}) + 2 \times 30 \times 30 \times Cov(X, Y)$$

$$\text{Cov}(X,Y)=\rho(X,Y)\times\text{radicequadrata}(\text{Var}(XXX) \times \text{Var}(YYY))$$

$$\text{Cov}(X,Y)=-0.4\times\text{radicequadrata}(16 \times 9)=-4.8$$

$$\text{Var}(\text{Portafoglio})=900\times 9+ 900\times 16-2\times 900 \times 4.8=13860$$

**5.** Data una popolazione con media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$  e un campione casuale semplice di quattro variabili, considerare il seguente stimatore per  $\mu$

$$T_1 = +\frac{1}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2 - X_3 + \frac{2}{5}X_4.$$

Indicare se T è uno stimatore corretto per  $\mu$  **(1 punto)**

$$E(T_1) = +\frac{1}{5}E(X_1) + \frac{2}{5}E(X_2) - E(X_3) + \frac{2}{5}E(X_4)$$

$$E(T_1) = +\frac{1}{5}\mu + \frac{2}{5}\mu - \mu + \frac{2}{5}\mu = 0$$

E' uno stimatore distorto

**6.** Il manager di un fast-food è interessato a valutare se il tempo di attesa per effettuare un ordine da parte dei clienti è diminuito rispetto all'anno scorso, in seguito ad un aumento del 15% del personale. L'anno precedente il tempo medio di attesa prima di ordinare è stato di 4 minuti con una deviazione standard di 1 minuti. Inoltre il manager può ragionevolmente supporre che la distribuzione del tempo sia normale. Vengono misurati i tempi di attesa di 36 clienti, e si osserva un tempo medio di attesa di 3.5 minuti. Il manager può affermare con un livello di significatività del 5% che il tempo medio di attesa per ordinare è significativamente diminuito rispetto al passato? **(2 punti)**

$$R = \left\{ \bar{x} \leq \mu_0 - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

$$R = \left\{ \bar{x} \leq 4 - 1.64 \frac{1}{\sqrt{36}} \right\}$$

$$R = \{ \bar{x} \leq 3.72 \}$$

Si rifiuto l'ipotesi nulla, il tempo medio di attesa per ordinare è significativamente diminuito

7. Dati due eventi A e B con  $0 < P(A) < 1$  e  $0 < P(B) < 1$ : Si indichi se le seguenti affermazioni sono Vere o False (**4 punti**)

Affermazione	Vera / Falsa?
$P(A B)$ è sempre maggiore di $P(A)$	Falsa
Se A è un sottoinsieme (strettamente) di B, $P(A B)$ è maggiore di $P(A)$	Vera
$P(A \cap B)$ è sempre maggiore di 0	Falsa
$P(A)$ è sempre maggiore di $P(B)$ .	Falsa

8. I dati rappresentati nella seguente tabella sono stati raccolti durante un'indagine sull'uso del telefono cellulare su un campione di 10 studenti liceali.

A ciascun studente è stato chiesto:

SPESA: Spesa media settimanale in Euro

MINUTI: Minuti medi di traffico settimanale

GB: GigaByte di consumo medio di Internet settimanale

SESSO: M=maschio e F= femmina

OPERATORE: Tim/Vodaphone/Wind/

ETA'

SPESA	MINUTI	GB	SESSO	OPERATORE	ETA'	ETA'×GB	Minuti×Spesa
8	120	1	M	Wind	14	14	960
5	150	1,5	F	TIM	18	27	750
6	120	0,8	M	TIM	16	12,8	720
10	80	1,5	M	Vodaphone	15	22,5	800
12	80	2	F	Tim	16	32	960
7	60	0,8	F	Tim	15	12	420
4	40	4	M	Wind	18	72	160
15	100	0,5	F	Wind	13	6,5	1500
12	100	0,7	M	Vodaphone	17	11,9	1200
6	50	1,2	F	Tim	18	21,6	300

Calcolare :

a) Media, mediana e varianze del carattere Consumo Settimanale in GB (**3 punti**)

Media 1,4	MEDIANA 1,1	VARIANZA=0.936
-----------	-------------	----------------

b) Indicare la moda per il carattere Operatore (**1 punto**)

TIM
-----

c) I caratteri Sesso e Operatore sono caratteri indipendenti? Commentare il risultato (1 punto)

OPERATORE	SESSO		
	M	F	
TIM	1	4	5
WIND	2	1	3
VODAPHONE	2	0	2
	5	5	

NO I CARATTERI NON SONO INDIPENDENTI

d) I caratteri "Spesa Settimanale" e Operatore sono dipendenti in media? Commentare i risultati (2 punti)

SI SONO DIPENDENTI IN MEDIA

SPESA	OPERATORE		
5	TIM		
6	TIM		
12	Tim		
7	Tim	SOMMA	MEDIA
6	Tim	36	7,2
10	vodafone	SOMMA	MEDIA
12	Vodafone	22	11
8	Wind		
4	Wind	SOMMA	MEDIA
15	Wind	27	9

e) Confrontare la dipendenza lineare tra Spese Settimanali e Minuti di traffico settimanale con la dipendenza lineare che esiste tra Età e Consumo di GB settimanale (2 punti)

SPESA	MINUTI	GB	ETA'	ETA'x GB	MinxSpes a	SPES A <sup>2</sup>	MINU TI <sup>2</sup>	GB <sup>2</sup>	ETA' <sup>2</sup>
-------	--------	----	------	----------	---------------	------------------------	-------------------------	-----------------	-------------------

Modalità A

	8	120	1	14	14	960	64	1440	1	196
	5	150	1,5	18	27	750	25	2250	2,25	324
	6	120	0,8	16	12,8	720	36	1440	0,64	256
	10	80	1,5	15	22,5	800	100	6400	2,25	225
	12	80	2	16	32	960	144	6400	4	256
	7	60	0,8	15	12	420	49	3600	0,64	225
	4	40	4	18	72	160	16	1600	16	324
	15	100	0,5	13	6,5	1500	225	1000	0,25	169
	12	100	0,7	17	11,9	1200	144	1000	0,49	289
	6	50	1,2	18	21,6	300	36	2500	1,44	324
SOM								<b>9180</b>	<b>28,9</b>	<b>258</b>
MA	<b>85</b>	<b>900</b>	<b>14</b>	<b>160</b>	<b>232,3</b>	<b>7770</b>	<b>839</b>	<b>0</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
MEDI									<b>2,89</b>	<b>258,</b>
A	<b>8,5</b>	<b>90</b>	<b>1,4</b>	<b>16</b>	<b>23,23</b>	<b>777</b>	<b>83,9</b>	<b>9180</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
VAR	<b>11,65</b>	<b>1080</b>	<b>0,936</b>	<b>2,8</b>						
COVARIANZA					0,83	12				
CORRELAZIONE					0,5127	0,1070				
Il legame lineare tra										
Età e consumo di GB è decisamente più forte del legame lineare tra spesa e minuti di traffico										

f) In base ai risultati al punto e) è possibile prevedere la spesa settimanale conoscendo i minuti di traffico settimanale? **(1 punto)**

No perché il legame lineare è troppo debole

g) In base ai risultati al punto e) è possibile prevedere il consumo settimanale in GB conoscendo l'età? Se sì, prevedere il consumo per un ragazzo di 16 anni **(3 punti)**

Consumerà in media 1.4GB settimanale

	GB	ETA'	GB×eta	GB <sup>2</sup>	ETA <sup>2</sup>
	1	14	14	1	196
	1,5	18	27	2,25	324
	0,8	16	12,8	0,64	256
	1,5	15	22,5	2,25	225
	2	16	32	4	256
	0,8	15	12	0,64	225
	4	18	72	16	324
	0,5	13	6,5	0,25	169
	0,7	17	11,9	0,49	289
	1,2	18	21,6	1,44	324
SOMMA	<b>14</b>	<b>160</b>	<b>232,3</b>	<b>28,96</b>	<b>2588</b>
MEDIA	<b>1,4</b>	<b>16</b>	<b>23,23</b>	<b>2,896</b>	<b>258,8</b>
VAR	<b>0,936</b>	<b>2,8</b>			
COVARIANZA			0,83		
CORRELAZIONE			0,5127		
beta1		0,296428571			
beta0		-3,34285714			
16 anni		1,4			

**9.** Nell'ambito di un'indagine sui consumi delle famiglie italiane è stato osservato un campione di 200 unità. E' risultato che le famiglie intervistate spendono mediamente 72 euro al mese per l'acquisto di carne, con una varianza campionaria corretta pari a  $S^2 = 289$

Si costruisca un intervallo di confidenza al 90% per la spesa media di carne ( $\mu$ ) delle famiglie italiane **(2 punti)**

$$\left( \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left( 72 - 1.64 \frac{17}{\sqrt{200}}; 72 + 1.64 \frac{17}{\sqrt{200}} \right)$$

(70.0286; 73.9714)