

ESAME – 29 Maggio 2018

COMPITO A

Cognome

Nome

Numero di matricola

- 1) *Consegnare dopo un'ora e mezza*
- 2) *Approssimare tutti i calcoli alla quarta cifra decimale.*
- 3) *Ai fini della valutazione si terrà conto solo ed esclusivamente di quanto riportato negli appositi spazi.*
- 4) *Al termine della prova, è OBBLIGATORIO consegnare il presente foglio ed il foglio di brutta (DI CUI NON SI TERRÀ CONTO AI FINI DELLA VALUTAZIONE).*

1. Enunciare le proprietà della media aritmetica (2 punti)

2. Enunciare e dimostrare il teorema di Bayes (2 punti)

3. Si consideri la variabile casuale continua X che rappresenta il diametro dei bulloni prodotti da una certa azienda in millimetri. Sapendo che in questa popolazione di riferimento, $E(X)=12$ e $Var(X)=0.6$. Si esamina un campione casuale di $n = 10$ bulloni. Indicare il valore atteso, varianza della variabile media campionaria \bar{X} (1 punti)

$$E(\bar{X}) = 12$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{0.6}{10} = 0.06$$

Possiamo inoltre indicare la distribuzione della variabile aleatoria media campionaria \bar{X} (1 punto)

No, n non è abbastanza grande per applicare il teorema del limite centrale

4. Un portafoglio comprende 30 azioni XXX e 30 azioni YYY. Il prezzo delle azioni XXX è una variabile casuale con media 20 e varianza 9, il prezzo delle azioni YYY è una variabile casuale con media 20 e varianza 16. I prezzi delle due azioni sono correlati negativamente con un coefficiente di correlazione lineare pari a -0.4. Calcolare il valore atteso e la varianza del valore del portafoglio dove XXX e YYY sono equamente presenti. (2 punti)

$$E(\text{Portafoglio})=30 \times E(\text{XXX})+ 30 \times E(\text{YYY})= 30 \times 20+30 \times 20=120$$

$$Var(\text{Portafoglio})=30^2 \times Var(\text{XXX})+ 30^2 \times Var(\text{YYY})+2 \times 30 \times 30 \times Cov(X, Y)$$

$$\text{Cov}(X,Y)=\rho(X,Y)\times\text{radicequadrata}(\text{Var}(XXX) \times \text{Var}(YYY))$$

$$\text{Cov}(X,Y)=-0.4\times\text{radicequadrata}(16 \times 9)=-4.8$$

$$\text{Var}(\text{Portafoglio})=900\times 9+ 900\times 16-2\times 900 \times 4.8=13860$$

5. Data una popolazione con media μ e varianza σ^2 e un campione casuale semplice di quattro variabili, considerare il seguente stimatore per μ

$$T_1 = +\frac{1}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2 - X_3 + \frac{2}{5}X_4.$$

Indicare se T è uno stimatore corretto per μ (1 punto)

$$E(T_1) = +\frac{1}{5}E(X_1) + \frac{2}{5}E(X_2) - E(X_3) + \frac{2}{5}E(X_4)$$

$$E(T_1) = +\frac{1}{5}\mu + \frac{2}{5}\mu - \mu + \frac{2}{5}\mu = 0$$

E' uno stimatore distorto

6. Il manager di un fast-food è interessato a valutare se il tempo di attesa per effettuare un ordine da parte dei clienti è diminuito rispetto all'anno scorso, in seguito ad un aumento del 15% del personale. L'anno precedente il tempo medio di attesa prima di ordinare è stato di 4 minuti con una deviazione standard di 1 minuti. Inoltre il manager può ragionevolmente supporre che la distribuzione del tempo sia normale. Vengono misurati i tempi di attesa di 36 clienti, e si osserva un tempo medio di attesa di 3.5 minuti. Il manager può affermare con un livello di significatività del 5% che il tempo medio di attesa per ordinare è significativamente diminuito rispetto al passato? (2 punti)

$$R = \left\{ \bar{x} \leq \mu_0 - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

$$R = \left\{ \bar{x} \leq 4 - 1.64 \frac{1}{\sqrt{36}} \right\}$$

$$R = \{ \bar{x} \leq 3.72 \}$$

Si rifiuto l'ipotesi nulla, il tempo medio di attesa per ordinare è significativamente diminuito

7. Dati due eventi A e B con $0 < P(A) < 1$ e $0 < P(B) < 1$: Si indichi se le seguenti affermazioni sono Vere o False (**4 punti**)

Affermazione	Vera / Falsa?
$P(A B)$ è sempre maggiore di $P(A)$	Falsa
Se A è un sottoinsieme (strettamente) di B, $P(A B)$ è maggiore di $P(A)$	Vera
$P(A \cap B)$ è sempre maggiore di 0	Falsa
$P(A)$ è sempre maggiore di $P(B)$.	Falsa

8. I dati rappresentati nella seguente tabella sono stati raccolti durante un'indagine sull'uso del telefono cellulare su un campione di 10 studenti liceali.

A ciascun studente è stato chiesto:

SPESA: Spesa media settimanale in Euro

MINUTI: Minuti medi di traffico settimanale

GB: GigaByte di consumo medio di Internet settimanale

SESSO: M=maschio e F=femmina

OPERATORE: Tim/Vodaphone/Wind/

ETA'

SPESA	MINUTI	GB	SESSO	OPERATORE	ETA'	ETA'×GB	Minuti×Spesa
8	120	1	M	Wind	14	14	960
5	150	1,5	F	TIM	18	27	750
6	120	0,8	M	TIM	16	12,8	720
10	80	1,5	M	Vodaphone	15	22,5	800
12	80	2	F	Tim	16	32	960
7	60	0,8	F	Tim	15	12	420
4	40	4	M	Wind	18	72	160
15	100	0,5	F	Wind	13	6,5	1500
12	100	0,7	M	Vodaphone	17	11,9	1200
6	50	1,2	F	Tim	18	21,6	300

Calcolare :

a) Media, mediana e varianze del carattere Consumo Settimanale in GB (**3 punti**)

Media 1,4	MEDIANA 1,1	VARIANZA=0.936
-----------	-------------	----------------

b) Indicare la moda per il carattere Operatore (**1 punto**)

TIM

--

c) I caratteri Sesso e Operatore sono caratteri indipendenti? Commentare il risultato (1 punto)

OPERATORE	SESSO		
	M	F	
TIM	1	4	5
WIND	2	1	3
VODAPHONE	2	0	2
	5	5	

NO I CARATTERI NON SONO INDIPENDENTI

d) I caratteri "Spesa Settimanale" e Operatore sono dipendenti in media? Commentare i risultati (2 punti)

SI SONO DIPENDENTI IN MEDIA

SPESA	OPERATORE		
5	TIM		
6	TIM		
12	Tim		
7	Tim	SOMMA	MEDIA
6	Tim	36	7,2
10	vodaphone	SOMMA	MEDIA
12	Vodaphone	22	11
8	Wind		
4	Wind	SOMMA	MEDIA
15	Wind	27	9

e) Confrontare la dipendenza lineare tra Spese Settimanali e Minuti di traffico settimanale con la dipendenza lineare che esiste tra Età e Consumo di GB settimanale (2 punti)

SPESA	MINUTI	GB	ETA'	ETA'x GB	MinxSpes a	SPES A ²	MINU TI ²	GB ²	ETA' ²
-------	--------	----	------	----------	------------	---------------------	----------------------	-----------------	-------------------

Modalità A

	8	120	1	14	14	960	64	1440	0	1	196
	5	150	1,5	18	27	750	25	2250	0	2,25	324
	6	120	0,8	16	12,8	720	36	1440	0	0,64	256
	10	80	1,5	15	22,5	800	100	6400	2,25		225
	12	80	2	16	32	960	144	6400	4		256
	7	60	0,8	15	12	420	49	3600	0,64		225
	4	40	4	18	72	160	16	1600	16		324
	15	100	0,5	13	6,5	1500	225	1000	0	0,25	169
	12	100	0,7	17	11,9	1200	144	1000	0	0,49	289
	6	50	1,2	18	21,6	300	36	2500	1,44		324
SOM								9180	28,9	258	
MA	85	900	14	160	232,3	7770	839	0	6	8	
MEDI									2,89	258,	
A	8,5	90	1,4	16	23,23	777	83,9	9180	6	8	
VAR	11,65	1080	0,936	2,8							
COVARIANZA					0,83			12			
CORRELAZIONE					0,5127			0,1070			

Il legame lineare tra

Età e consumo di GB è decisamente più forte del legame lineare tra spesa e minuti di traffico

f) In base ai risultati al punto e) è possibile prevedere la spesa settimanale conoscendo i minuti di traffico settimanale? **(1 punto)**

No perché il legame lineare è troppo debole

g) In base ai risultati al punto e) è possibile prevedere il consumo settimanale in GB conoscendo l'età? Se sì, prevedere il consumo per un ragazzo di 16 anni **(3 punti)**

Consumerà in media 1.4GB settimanale

Modalità A

	GB	ETA'	GB×eta	GB²	ETA²
	1	14	14	1	196
	1,5	18	27	2,25	324
	0,8	16	12,8	0,64	256
	1,5	15	22,5	2,25	225
	2	16	32	4	256
	0,8	15	12	0,64	225
	4	18	72	16	324
	0,5	13	6,5	0,25	169
	0,7	17	11,9	0,49	289
	1,2	18	21,6	1,44	324
SOMMA	14	160	232,3	28,96	2588
MEDIA	1,4	16	23,23	2,896	258,8
VAR	0,936	2,8			
COVARIANZA			0,83		
CORRELAZIONE			0,5127		
beta1	0,296428571				
beta0	-3,34285714				
16 anni		1,4			

9. Nell'ambito di un'indagine sui consumi delle famiglie italiane è stato osservato un campione di 200 unità. E' risultato che le famiglie intervistate spendono mediamente 72 euro al mese per l'acquisto di carne, con una varianza campionaria corretta pari a $S^2 = 289$

Si costruisca un intervallo di confidenza al 90% per la spesa media di carne (μ) delle famiglie italiane (2 punti)

$$\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left(72 - 1.64 \frac{17}{\sqrt{200}}; 72 + 1.64 \frac{17}{\sqrt{200}} \right)$$

(70.0286; 73.9714)