MATEMATICA FINANZIARIA

Isabella Valdivia

Esercitazione su TIR e VAN con soluzione

1) Calcolare il tasso interno di rendimento i^* del contratto finanziario $x\backslash t = \{-45, -40, 100\}\backslash\{0, 1, 2\}$ essendo il tempo espresso in anni. Determinare, inoltre, l'importo Δx_1 che bisogna sommare alla prima posta del flusso affinchè il tasso interno di rendimento della nuova operazione finanziaria sia $i^* = 12\%$.

Soluzione

Il TIR di un contratto finanziario è quel tasso di interesse i^* per cui il VAN del contratto è pari a zero. Il suo valore si ottiene pertanto risolvendo la seguente equazione

$$-45 - 40\frac{1}{1+i^*} + 100\frac{1}{(1+i^*)^2} = 0$$

Ponendo $v = \frac{1}{1+i^*}$, la precedente equazione del t.i.r. diventa

$$100v^2 - 40v - 45 = 0,$$

la cui risoluzione produce i seguenti valori

$$v_1 = -\frac{90}{100} = -\frac{9}{10} \quad \text{valore negativo, non accettabile}$$

$$_1v_2 = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 4500}}{100} = \frac{-20 \pm 70}{100} =$$

$$v_2 = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5 \quad \text{valore accettabile}$$

Dal momento che $v = \dfrac{1}{1+i^*}$, allora si ha che

$$1 + i^* = \frac{1}{v} \longrightarrow i^* = \frac{1}{v} - 1 = 2 - 1 = 100\%.$$

Per calcolare Δx_1 che bisogna sommare alla prima posta del flusso affinchè il tasso interno di rendimento della nuova operazione finanziaria sia $i^* = 12\%$, imposto l'espressione del VAN con tir $i^* = 12\%$, uguagliandola a zero:

$$-45 + \Delta x_1 - 40 \cdot \frac{1}{1+0,12} + 100 \cdot \frac{1}{(1+0,12)^2} = 0,$$

da cui si ricava

$$\Delta x_1 = \frac{40}{1,12} - \frac{100}{1,12^2} + 45 = 160,4337$$

2) Consideriamo la seguente operazione di finanziamento:

$$F = x \backslash t = \{100; -10; -10; -110g\} \backslash \{0; 1; 2; 3\}$$

Calcolare, se esiste, il TIR di questa operazione.

Soluzione

Come nell'esercizio precedente, impostiamo l'equazione del TIR in termini del fattore di sconto $v = \dfrac{1}{1+i^*}$

$$100 - 10 \cdot v - 10 \cdot v^2 - 110 \cdot v^3 = 0$$

Semplificando il fattore 10 dalla precedente equazione, e riordinando i termini, si ottiene la seguente equazione di terzo grado in d

$$11 \cdot d^3 + d^2 + d - 10 = 0$$

Procediamo alla risoluzione di tale equazione mediante fattorizzazione, riscrivendo il termine $11d^3$ come $10d^3 + d^3$ e applicando la fattorizzazione parziale:

$$10d^3 + d^3 + d^2 + d - 10 = 0 \Longrightarrow (10d^3 - 10) + d \cdot (d^2 + d + 1) = 0 \Longrightarrow 10(d^3 - 1) + d(d^2 + d + 1) = 0$$

$$10(d-1)(d^2+d+1)+d(d^2+d+1) = 0 \Longrightarrow (d^2+d+1)[10(d-1)+d] = 0 \Longrightarrow (11d-10)(d^2+d+1) = 0$$

che ammette la seguente soluzione

$$d = \frac{10}{11},$$

da cui si ricava

$$i^* = \frac{11}{10} - 1 = \frac{1}{10} = 10\%$$

3) Dovendo investire €80000 per 4 anni, Sempronio chiede una consulenza alla propria banca. Le alternative proposte sono le seguenti:

a) investire per 4 anni l'intera somma al $2,8\%$

b) investire per il primo anno al 2% annuo, per il secondo anno e il terzo anno al $3,1\%$ e per il quarto anno al $3,6\%$.

Determinare quale alternativa è più conveniente.

Soluzione

l'alternativa più conveniente è quella che produce un montante maggiore. Si ha quindi

$$M_1 = 80000 \cdot (1 + 0,028)^4 = 89343,39$$

$$M_2 = 80000 \cdot (1 + 0,02) \cdot (1 + 0,031)^2 \cdot (1 + 0,036) = 89860,17$$

pertanto l'alternativa 2 è quella più conveniente.

4) Calcolare, se esiste, il TIR della seguente operazione finanziaria, approssimandolo alla terza cifra decimale:

$$O = x \backslash t = \{-100; 20; 30; 40; 50\} \backslash \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

Soluzione

L'equazione del TIR diventa

$$F(d) = 50d^4 + 40d^3 + 30d^2 + 20d - 100 = 0$$

Per la risoluzione di questa equazione di quarto grado, applichiamo il metodo delle approssimazioni successive sull'intervallo $(0, 1)$. Dal momento che $F(0) = -100$ e $F(1) = 40$, notiamo che la funzione F assume valori discordi agli estremi dell'intervallo $(0, 1)$, calcolo pertanto la funzione in corrsipondenza del punto medio di tale intervallo,

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = -74,375$$

pertanto considero l'intervallo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e calcolo il valore di F nel punto medio di questo secondo intervallo, $d = \frac{3}{4} = 0,75$

$$F\left(\frac{3}{4}\right) = -35,4297,$$

pertanto considero il punto medio dell'intervallo $(0.75,\ 1)$, $d = 0,875$

$$F(0,875) = -3,425$$

pertanto considero il punto medio dell'intervallo $(0.875,\ 1)$, $d = 0,9375$

$$F(0,9375) = 16,699$$

pertanto considero il punto medio dell'intervallo $(0.875,\ 0.9375)$, $d = 0,90625$

$$F(0,90625) = 6,261$$

pertanto considero il punto medio dell'intervallo $(0.875,\ 0.90625)$, $d = 0,890625$

$$F(0,890625) = 1,326$$

pertanto considero il punto medio dell'intervallo $(0.875,\ 0.890625)$, $d = 0,8828125$

$$F(0,8828125) = -1,071$$

pertanto considero il punto medio dell'intervallo $(0.8828125,\ 0.890625)$, $d = 0,88671875$

$$F(0,88671875) = 0,121,$$

sappiamo pertanto che la soluzione giace tra 0.8828125 e 0,88671875, e tali due cifre, che hanno prima e seconda cifre decimali uguali, ci informano che abbiamo identificato le prime due cifre decimali certe. Procediamo per individuare anche la terza cifra, dimezzando via via l'intervallo

$$F(0,884765625) = -0,476$$

$$F(0,8857421875) = -0,177$$

$$F(0,88623046875) = -0,028,$$

quindi, fermandoci alla terza cifra decimale, il valore di d per cui $F(d) = 0$ è circa $0,886$ vale a dire

$$i^* = \frac{1}{d} - 1 = 12,86\%,$$

che è il TIR cercato.

5) Siano dati i seguenti progetti finanziari

A: $x \backslash t = \{-4000; C; 1874,6\} \backslash \{0; 1; 2\}$

B: $x \backslash t = \{-4000; 2100; 20150\} \backslash \{0; 1; 2\}$

a) Determinare l'importo C tale che il progetto A abbia T.I.R.= 3%

b) Utilizzando il criterio del T.I.R. determinare il miglior progetto tra A e B.

Soluzione

a) Il TIR di un progetto è quel tasso che rende il suo VAN uguale a zero, pertanto l'importo C può essere calcolato come segue

$$-4000 + \frac{C}{1+0,03} + \frac{1874,6}{(1+0,03)^2} = 0$$

da cui si ricava che

$$C = 1,03 \cdot \left[4000 - \frac{1874,6}{(1,03)^2}\right] = 2300$$

b) Noto il TIR di A, basta calcolare il TIR di B e confrontare il risultato ottenuto, allora si ha

$$-4000 + \frac{2100}{1+i^*} + \frac{2050}{(1+i^*)^2} = 0 \Longrightarrow -4000(1+i^*)^2 + 2100(1+i^*) + 2050 = 0,$$

e posto $x = i + i^*$, si ha

$$-4000x^2 + 2100x + 2050 = 0 \Longrightarrow -80x^2 + 42x + 41 = 0$$

$$x_1 = -\frac{40}{-80} = -\frac{1}{2}$$ valore negativo, non accettabile

$$_1x_2 = \frac{-21 \pm \sqrt{441 + 3280}}{-80} = \frac{-21 \pm 61}{-80} =$$

$$x_2 = \frac{-82}{-80} = 1,025$$ valore accettabile

pertanto $1 + i^* = 1,025$ e allora $i^* = 0,025 = 2,5\%$. Dal confronto dei TIR risulta preferibile il progetto A.

6) Si consideri l'operazione finanziaria $x \backslash t = \{87; -50; -40\} \backslash \{0; 2; 4\}$, essendo il tempo espresso in mesi; si determini:

(a) il tasso interno di rendimento i^* su base annua dell'operazione;

(b) la rata R di una rendita semestrale perpetua anticipata che in base al tasso i^* ha valore 87 euro.

Soluzione

a) il calcolo del TIR si effettua risolvendo l'equazione

$$-40 \cdot (1+i^*)^{-\frac{4}{12}} - 50 \cdot (1+i^*)^{-\frac{2}{12}} + 87 = 0$$

ponendo $v = (1+i^*)^{-\frac{2}{12}}$, l'equazione diventa

$$40v^2 + 50v - 87 = 0$$

che ammette come soluzione finanziariamente significativa $v = 0,97676$ (ottenuta risolvendo la precedente equazione di secondo grado), da cui si ricava

$$i^* = v^{-\frac{12}{2}} - 1 = 15,15458\%$$

b) sfruttando la relazione da cui si ricava il valore attuale di una rendita anticipata perpetua $V(0, \mathbf{r}) = R \cdot \frac{1+i}{i}$, si ha

$$87 = R \cdot \frac{1+i_s^*}{i_s^*}$$

dove i_s^* è il tasso semestrale equivalente al TIR calcolato nel punto a), nel regime dell'interesse composto

$$i_s^* = (1+i^*)^{\frac{1}{2}} - 1 = 7,3101\%.$$

Pertanto

$$R = 87 \cdot \frac{1_s^*}{1+i_s^*} = 5,92655$$

7) Calcolare il tasso interno di rendimento i^* del contratto finanziario $x \backslash t = \{-30; 18; 25\} \backslash \{0; 1; 2\}$, essendo il tempo espresso in anni. Si determini inoltre l'importo Δx_1 che bisogna sommare alla prima posta del flusso affinchè il tasso interno di rendimento della nuova operazione finanziaria sia $i^* = 11,5\%$.

Soluzione

L'esercizio ha la medesima risoluzione dell'esercizio 1) del presente file.

8) Un'operazione finanziaria consiste in un esborso iniziale di €150, e di 3 rimborsi successivi annuali di entità rispettive $R, 2R, 7R - 50$ €. Quanto deve valere almeno R affinchè si abbia TIR positivo? Successivamente, calcolare il TIR nel caso in cui $R = 50$ approssimandolo alla seconda cifra decimale.

Soluzione

Vale il seguente Teorema

Teorema 1. *Data l'operazione finanziaria*

$$x \backslash t = \{x_1, ..., x_m\} \backslash \{t_1, ..., t_m\}$$

se valgono le seguenti ipotesi

- $x_1 < 0$
- $x_k > 0, k = 2, ..., m$
- $x_1 + x_2 + ... + x_m > 0$

allora $x\backslash t$ *possiede TIR positivo.*

Nell'operazione finanziaria

$$x\backslash t = \{-150; R; 2R, 7R - 50\}\backslash\{0, 1, 2, 3\}$$

il TIR risulta positivo quando l'operazione finanziaria è un investimento, allora possiamo garantire positività se $R > 0$ e anche $7R - 50 > 0$, e queste due condizioni si verificano se $R > \frac{50}{7}$. Inoltre dovremmo verificare anche l'ipotesi di positività della somma di tutti gli importi dell'operazione

$$-150 + R + 2R + (7R - 50) > 0 \Longrightarrow 10R > 200 \Longrightarrow R > 20.$$

Se $R = 50$, allora si ha

$$x\backslash t = \{-150; 50; 100, 300\}\backslash\{0, 1, 2, 3\}$$

il calcolo del TIR comporta la risoluzione dell'equazione $150 + 50v + 100v^2 + 300v^3 = 0$, che con le opportune semplificazioni diventa

$$F(v) = 6v^3 + 2v^2 + v - 3 = 0.$$

Procediamo alla risoluzione di tale equazione con il metodo della bisezione, calcolando F nel punto medio di $(0, 1)$ e continuando per bisezione dell'intervallo per cui la funzione F assume valori discordi agli estremi

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = -1,25$$

e allora dimezzo l'intervallo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, e calcolo F nel suo punto medio

$$F\left(\frac{3}{4}\right) = 1,40625,$$

e quindi applico il metodo all'intervallo $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ ecc:

$F(0,625) = -012890625$

$F(06875) = 0,58251553$

$F(0,65625) = 0,21331787$

$F(0,640625) = 0,21331787$

$F(0,6328125) = -0,04581928$

$F(0,63671875) = -0,00366389$

Poichè la soluzione è compresa tra $0,63671875$ e $0,640625$, allora dimezzo tale intervallo e ottengo

$$F(0,638671875) = 0,0175677$$

e allora $v^* = 0,63 \Longrightarrow i^* = \dfrac{1}{0,63} - 1 \simeq 0,58$.

9) Considerare il flusso di cassa $\{-100; 5; x; 115\}\backslash\{0; 2; 4; 5\}$ dove il tempo è misurato in mesi. Per quale valore di x il VAN del flusso è zero, rispetto al tasso annuo nominale $r = 12\%$ e regime di capitalizzazione mensile? Quale valore deve avere x perchè il TIR risulti uguale a 12% annuo? Calcolando il VAN del flusso rispetto a un tasso r maggiore del TIR si troverebbe un valore maggiore o minore di zero? (Rispondere senza eseguire i calcoli).

Soluzione

Per calcolare x tale che il VAN sia nullo al tasso annuo nominale $r = 12\%$ e regime di capitalizzazione mensile, ottengo da r il tasso mensile $i_{\frac{1}{12}} = \dfrac{r}{12} = \dfrac{0,12}{12} = 0,01$, con cui esprimo l'equazione del TIR

$$-100 + \frac{5}{(1+0,01)^2} + \frac{x}{(1+0,01)^4} + \frac{115}{(1+0,01)^5} = 0$$

e si trova $x = -14,9015$.
Per calcolare x tale che il il TIR risulti uguale a 12% annuo

$$-100 + \frac{5}{(1+0,012)^{\frac{2}{12}}} + \frac{x}{(1+0,012)^{\frac{4}{12}}} + \frac{115}{(1+0,012)^{\frac{5}{12}}} = 0$$

e si trova $x = -15,1645$.
Se $r > 0$ allora il Van < 0.

10) Consideriamo le due seguenti operazioni dia finanziamento:

> A: si riceve un prestito di €800 al tempo iniziale e lo si rimborsa in 2 rate distinte, la prima che ammonta a €600 dopo un anno, e la seconda di €500 dopo 2 anni.
>
> B: si ricevono in prestito inizialmente €700, che vengono rimborsati in 3 rate, una di €300 alla fine del primo anno, una di €300 alla fine del secondo e una di €1000 alla fine del terzo.

Stabilire col criterio del TIR quale dei due finanziamenti è più conveniente.

Soluzione

Scriviamo le due operazioni finanziarie in forma estesa

$$A = \{800, -600, -500\}\backslash\{0, 1, 2\}$$

$$B = \{700, -300, -300, -1000\}\backslash\{0, 1, 2, 3\}$$

Calcoliamo separatamente i due TIR,

- A: $800 - 600v - 500v^2 = 0 \Longleftrightarrow 5v^2 + 6v - 8 = 0$

$$v_1 = -2 \quad \text{valore negativo, non accettabile}$$

$$_1v_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{5} = \frac{-3 \pm 7}{5} =$$

$$v_2 = \frac{4}{5} \quad \text{valore accettabile}$$

pertanto $i_A^* = \frac{1}{d} - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%.$

- B:$700 - 300v - 300v^2 - 1000v^3 = 0 \Longleftrightarrow 10d^3 + 3d^2 + 3d - 7 = 0$ fattorizziamo l'espressione a primo membro, spezzando $10v^3$ in $7v^3 + 3v^3$

$$7v^3 + 3v^3 + 3v^2 + 3v - 7 = 7(v^3 - 1) + 3v(v^2 + v + 1) = 7(v-1)(v^2 + v + 1) + 3v(v^2 + v + 1)$$

$$(v^2 + v + 1)[7(v-1) + 3v] = (v^2 + v + 1)(10v - 7);$$

Pertanto l'equazione del TIR diventa

$$(v^2 + v + 1)(10v - 7) = 0$$

la cui unica soluzione Reale è $D = \frac{7}{10}$ da cui si ha che $i_B^* = \frac{10}{7} - 1 = \frac{3}{7} = 42,85\%.$

si ha pertanto che $i_A^* < i_B^*$, ed essendo le due operazioni finanziarie, due progetti di finanziamento, allora è preferibile il progetto A.

11) Consideriamo le due seguenti operazioni di investimento

$$I_1 = x\backslash t = \{-1000, 400, 400, 500\}\backslash\{0, 1, 2, 3\}$$

$$I_2 = y\backslash t\{-1500, 500, 500, 800\}\backslash\{0, 1, 2, 3\}$$

e supponimao di valutare al taso del 5%. Quale delle due è preferibile in base al criterio del VAN?

Soluzione

Calcoliamo i due VAN delle due operazioni

$$VAN(I_1, 5\%) = -1000 + 400 \cdot \frac{1}{1,05} + 400 \cdot \frac{1}{(1,05)^2} + 500 \cdot \frac{1}{(1,05)^3} = 175,681$$

$$VAN(I_2, 5\%) = -1500 + 500 \cdot \frac{1}{1,05} + 500 \cdot \frac{1}{(1,05)^2} + 800 \cdot \frac{1}{(1,05)^3} = 120,7746$$

allora $VAN(I_1, 5\%) > VAN(I_2, 5\%)$ e pertanto I_1 è preferibile.