Teoria del portafoglio e approccio media varianza

A. Fabretti

Matematica Finanziaria
A.A. 2019/2020

WARNING

Queste slide sono di supporto alla lezione a distanza e NON sostituiscono il libro di testo

Queste slide possono contenere errori che vanno segnalati a **annalisa.fabretti@uniroma2.it**

Table of contents

Cenni di probabilitá

Portafoglio di titoli rischiosi

Insieme possibile e frontiera efficiente

Il modello di Markowitz

Teorema dei due fondi

Inclusione di un titolo non rischioso e teorema di un fondo

Variabile aleatoria discreta

Il valore di un titolo rischioso é incerto. Descriviamo il valore di un titolo rischioso tramite una variabile aleatoria.
Sia X una **variabile aleatoria discreta** che puó assumere un valore nell'insieme $\{x_1, x_2, ...x_n\}$. Supponiamo che ad ogni possibile x_i si puó associare la probabilitá p_i che X assuma quel valore. I valori di p_i sono tali che

$$p_i \geq 0 \quad \forall i \quad e \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Variabile aleatoria continua

Se una variabile aleatoria X puó assumere qualsiasi valore reale in $E \subseteq \mathbb{R}$ diremo che la variabile é **continua** e la sua probabilitá sará descritta da una **funzione di densitá** $f(x)$. La funzione di densitá é tale

$$\int_E f(x)dx = 1$$

La probabilitá che X assuma valori nell'intervallo $(a, b) \subset E$ é data da

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Esempi Variabili aleatorie discrete

Il risultato del lancio di un dado a 6 facce é una variabile aleatoria con possibili valori $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Se il dado é equo ogni valore assume la stessa probabilitá di verificarsi, quindi $p_i = \frac{1}{6}$.

Il risultato del lancio di una moneta é una variabile aleatoria con possibili valori $\{\mathit{Testa},\ \mathit{Croce}\}$. Ogni faccia assume la stessa probabilitá di verificarsi, quindi $p_T = p_C = \frac{1}{2}$.

Valore atteso

Il **valore atteso** é il valore medio assunto dalla variabile aleatoria.
Se X é discreta

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Se X é continua

$$E[X] = \int_E x f(x) dx$$

Proprietá del Valore atteso

Il valore atteso é tale che

- **Valore certo**
  Se Y é un valore certo $E[Y] = Y$.
- **Linearitá**
  Se X e Y sono due variabili aleatorie e a, b due valori reali

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

- **Non negativitá**
  Se X variabile aleatoria con valori non negativi, $E[X]$ assumerá un valore non negativo

Varianza

La **varianza** fornisce una misura della possibile deviazione dalla media.
Data una variabile aleatoria X

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2].$$

Spesso si utilizza la sua radice quadrata detta **deviazione standard**

$$\sigma_X = \sqrt{E[(X - E[X])^2]}.$$

Varianza

La varianza puó anche essere scritta

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 = Var(X) &= E[(X - E[X])^2] \\ &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2.\end{aligned}$$

Due variabili aleatorie

Sia X una v.a. discreta con possibili valori $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ e probabilitá p_i, per $i = 1, .., n$ e sia Y una v.a. con valori $\{y_1, y_2, ...y_m\}$ e probabilitá q_j, per $j = 1, .., m$
Consideriamo la coppia (X, Y) e tutte le possibili coppie di valori assunti (x_i, y_j) con $i = 1, .., n$ e $j = 1, .., m$. La probabilitá

$$P(X = x_i, Y = y_j)$$

si dice probabilitá congiunta.

Due variabili aleatorie

Date due variabili aleatorie X e Y. Se

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

X e Y si dicono **indipendenti**.
Per indicare la dipendenza reciproca di due variabili aleatorie si usa la **covarianza**

Covarianza

Sia X una v.a con valore atteso $\bar{X}$ e varianza σ_X^2 e Y una v.a con valore atteso $\bar{Y}$ e varianza σ_Y^2. Si definisce **covarianza**

$$cov(X, Y) = E[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})] = \sigma_{XY}$$

- $\sigma_{XY} = 0$ si dice che X e Y sono non correlate;
- $\sigma_{XY} > 0$ si dice che X e Y sono correlate **positivamente**;
- $\sigma_{XY} < 0$ si dice che X e Y sono correlate **negavitamente**.

Correlazione

Vale la relazione

$$|\sigma_{XY}| \leq \sigma_X \sigma_Y$$

Se $\sigma_{XY} = \sigma_X \sigma_Y$ le due variabili sono perfettamente correlate positivamente, se $\sigma_{XY} = -\sigma_X \sigma_Y$ le due variabili sono perfettamente correlate negativamente.
Si definisce il **coefficiente di correlazione**

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

vale che $|\rho_{XY}| \leq 1$

Somma di due variabili aleatorie

Sia X una v.a con valore atteso $\bar{X}$ e varianza σ_X^2 e Y una v.a con valore atteso $\bar{Y}$ e varianza σ_Y^2. La loro somma $X+Y$ é ancora una variabile aleatoria con valore atteso

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

e varianza

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= E[(X+Y-E[X+Y])^2] \\ &= E[((X-E[X])+(Y-E[Y]))^2] \\ &= E[(X-E[X])^2] + 2E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \\ &+E[(Y-E[U])^2] \\ &= \sigma_X^2 + 2\sigma_{XY} + \sigma_Y^2 \end{aligned}$$

Varianza della somma di due variabili aleatorie

Dato che

$$Var(X+Y) = \sigma_X^2 + 2\sigma_{XY} + \sigma_Y^2$$

vale

- se $\sigma_{XY} = 0$ si ha $Var(X+Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$
- se $\sigma_{XY} > 0$ si ha $Var(X+Y) > \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$
- $\sigma_{XY} < 0$ si ha $Var(X+Y) < \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$

Rendimento di un titolo rischioso

Sia X_0 il valore iniziale di un titolo e X_1 il suo valore finale. Il rendimento é

$$R = \frac{X_1}{X_0}$$

Il relativo tasso di rendimento

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0}$$

con le relazioni

$$R = 1 + r \qquad X_1 = X_0(1 + r)$$

Un titolo é detto rischioso se X_1 é una variabile aleatoria. Se X_1 é una v.a., r anche é una v.a.

Portafoglio di titoli

Consideriamo un portafoglio composto da n titoli rischiosi, sia X_0 il suo valore iniziale avendo investito X_{0i} in ogni titolo $i = 1, ..., n$

$$X_0 = \sum_{1=1}^{n} X_{0i}$$

ogni titolo avrá peso nel portafoglio $w_i = \frac{X_{0i}}{X_0}$ con $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Nota che w_i puó assumere valori positivi e negativi (vendita allo scoperto).

Rendimento del portafoglio

Il rendimento totale e il tasso di rendimento di un portafoglio di titoli sono uguali alla somma pesata dei rendimenti (totale e tasso) dei singoli titoli con peso di ciascun titolo pari al peso che il titolo ha in portafoglio, ossia

$$R = \sum_{1=1}^{n} w_i R_i \quad e \quad r = \sum_{1=1}^{n} w_i r_i$$

Dimostrazione Rendimento del portafoglio

Sia R_i il rendimento del titolo i con $i = 1, ..., n$. A scadenza il titolo i genera la somma $R_i X_{0i} = R_i w_i X_0$, allora il valore finale del portafoglio é

$$X_1 = \sum_{1=1}^{n} R_i w_i X_0$$

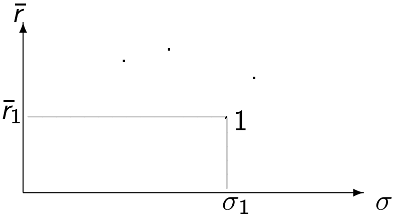
e quindi il rendimento di portafoglio é

$$R = \frac{X_1}{X_0} = \frac{\sum_{1=1}^{n} R_i w_i X_0}{X_0} = \sum_{1=1}^{n} R_i w_i.$$

In modo analogo $r = \sum_{1=1}^{n} r_i w_i$

Diagramma media-varianza

Sia r il tasso di rendimento di un titolo. r é una v.a. con media $\bar{r}$ e deviazione standard σ. Possiamo rappresentare il titolo su un diagramma Media-Deviazione standard



Media di portafoglio

Sono disponibili n titoli con rendimenti aleatori r_1, r_2,..., r_n che hanno valore atteso $E(r_1) = \bar{r}_1$, $E(r_2) = \bar{r}_2$, ...$E(r_n) = \bar{r}_n$. Consideriamo un portafoglio di questi titoli con pesi w_i con $i = 1, ..., n$. Il tasso di rendimento di portafoglio é

$$r = w_1 r_1 + w_2 r_2 + ... + w_n r_n$$

e volendo calcolarne il valore atteso, sfruttando la linearitá del valore atteso abbiamo

$$E(r) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) + ... + w_n E(r_n) = w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 + ... + w_n \bar{r}_n$$

Varianza di portafoglio

Denotiamo con σ_i^2 la varianza del rendimento del titolo i e con σ_{ij} la covarianza tra i rendimento dei titoli i e j.

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= Var(r) = E[(r-\bar{r})^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^n w_i r_i - \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^n w_i (r_i - \bar{r}_i)\right)\left(\sum_{j=1}^n w_j (r_j - \bar{r}_j)\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{i,j=1}^n w_i w_j (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^n w_i w_j E\left[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right] = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}
\end{aligned}$$

Esempio Media e Varianza di portafoglio

Consideriamo 2 titoli con $\bar{r}_1 = 12\%$, $\bar{r}_2 = 15\%$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.18$ e $\sigma_{12} = 0.01$. Prendiamo un portafoglio con pesi $w_1 = \frac{1}{4}$ e $w_2 = \frac{3}{4}$. Calcoliamo media e varianza del portafoglio

$$\bar{r} = w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 = 0.25 \cdot 0.12 + 0.75 \cdot 0.15 = 0.1425$$

e

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= w_1^2 \sigma_1^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12} + w_2^2 \sigma_2^2 \\ &= (0.25)^2 \cdot (0.2)^2 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 0.01 + (0.75)^2 \cdot (0.18)^2 \\ &= 0.024475 \end{aligned}$$

risulta $\sigma = 0.1564$ e notiamo che $\sigma < \sigma_1$ e $\sigma < \sigma_2$.

Diversificazione

La varianza di un titolo o portafoglio é una misura di rischio.
In un portafoglio la varianza puó essere ridotta attraverso una opportuna combinazione di titoli.
Questa operazione si chiama **diversificazione**, cioé si distribuisce il rischio in diversi titoli per diminuirlo.

Esempio 1 Diversificazione

Supponiamo di prender n titoli uguali non correlati tra di loro. Quindi poniamo $\bar{r}_i = m$ e $\sigma_i^2 = \sigma^2$ e $\sigma_{ij} = 0\ \forall i, j$ e prendiamo un portafoglio equidistribuito con $w_i = \frac{1}{n}$, $\forall i$. Abbiamo

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} m = m$$

e

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Ipoteticamente si puó mandare la varianza e quindi il rischio a zero prendendo n molto grande, questo é possibile perché i titoli sono non correlati.

Esempio 2 Diversificazione

Supponiamo una situazione in cui i titoli sono correlati.
Consideriamo n titoli uguali con stesso rendimento atteso e stessa varianza $\bar{r}_i = m$ e $\sigma_i^2 = \sigma^2$ e covarianza $\sigma_{ij} = 0.3\sigma^2$ per $i \neq j$.
Prendiamo il portafoglio equidistribuito, il suo rendimento é m, la varianza

$$
\begin{aligned}
Var(r) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(r_i - \bar{r}_i)\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=j} \sigma_{ij} + \sum_{i \neq j} \sigma_{ij}\right] = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2 + 0.3(n^2 - n)\sigma^2) \\
&= \frac{\sigma^2}{n} + 0.3\sigma^2(1 - \frac{1}{n}) = \frac{0.7\sigma^2}{n} + 0.3\sigma^2
\end{aligned}
$$

Diagramma di portafoglio

Consideriamo 2 titoli con rendimento medio $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$, varianza σ_1^2, σ_2^2 e covarianza σ_{12}. Preso un portafoglio con peso $1-\alpha$ nel titolo 1 e α nel titolo 2 vogliamo rappresentare il portafoglio in un diagramma media-deviazione standard studiando la sua media e varianza al variare di α e e σ_{12}.
Abbiamo

$$\bar{r} = w_1\bar{r}_1 + w_2\bar{r}_2 = (1-\alpha)\bar{r}_1 + \alpha\bar{r}_2$$

$$\sigma^2 = (1-\alpha)^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{12} + \alpha^2\sigma_2^2$$

Diagramma di portafoglio

Da $\bar{r} = (1-\alpha)\bar{r}_1 + \alpha\bar{r}_2$ ricaviamo $\alpha = \frac{\bar{r}-\bar{r}_1}{\bar{r}_2-\bar{r}_1}$ e sostituiamo in σ^2

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= (1-\alpha)^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{12} + \alpha^2\sigma_2^2 \\
&= \left(1 - \frac{\bar{r}-\bar{r}_1}{\bar{r}_2-\bar{r}_1}\right)^2 \sigma_1^2 + 2\frac{\bar{r}-\bar{r}_1}{\bar{r}_2-\bar{r}_1}\left(1 - \frac{\bar{r}-\bar{r}_1}{\bar{r}_2-\bar{r}_1}\right)\sigma_{12} + \left(\frac{\bar{r}-\bar{r}_1}{\bar{r}_2-\bar{r}_1}\right)^2 \sigma_2^2 \\
&= \left(\frac{\bar{r}_2-\bar{r}}{\bar{r}_2-\bar{r}_1}\right)^2 \sigma_1^2 + 2\frac{(\bar{r}-\bar{r}_1)(\bar{r}_2-\bar{r})}{(\bar{r}_2-\bar{r}_1)^2}\sigma_{12} + \left(\frac{\bar{r}-\bar{r}_1}{\bar{r}_2-\bar{r}_1}\right)^2 \sigma_2^2
\end{aligned}$$

Diagramma di portafoglio (2)

Ponendo $\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$ si ha

$$(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)^2\sigma^2 = \bar{r}^2(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)+$$

$$+\bar{r}(-2\bar{r}_2\sigma_1^2 + 2\bar{r}_2\rho\sigma_1\sigma_2 + 2\bar{r}_1\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\bar{r}_1\sigma_2^2)+$$

$$+\bar{r}_2^2\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\bar{r}_1\bar{r}_2 + \bar{r}_1^2\sigma_2^2$$

posto $a = (\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$, $b = \bar{r}_2\sigma_1^2 - (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)\rho\sigma_1\sigma_2 + \bar{r}_1\sigma_2^2$, $c = \bar{r}_2^2\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\bar{r}_1\bar{r}_2 + \bar{r}_1^2\sigma_2^2$ e $d = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)^2$ si ha

$$a\bar{r}^2 - 2b\bar{r} + c - d\sigma^2 = 0$$

Diagramma di portafoglio (3)

Da $a\bar{r}^2 - 2b\bar{r} + c - d\sigma^2 = 0$ otteniamo la curva

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{a\bar{r}^2 - 2b\bar{r} + c}{d}}$$

che puó essere rappresentata e studiata sul diagramma media-deviazione standard al variare di α e ρ.

Diagramma di portafoglio $\rho = 1$

Supponiamo che i due titoli siano perfettamente correlati positivamente

$$a = (\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) = \sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2$$
$$b = \bar{r}_2\sigma_1^2 - (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)\rho\sigma_1\sigma_2 + \bar{r}_1\sigma_2^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)(\bar{r}_2\sigma_1 - \bar{r}_1\sigma_2)$$
$$c = \bar{r}_2^2\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\bar{r}_1\bar{r}_2 + \bar{r}_1^2\sigma_2^2 = (\bar{r}_2\sigma_1 - \bar{r}_1\sigma_2)^2$$

notiamo che a e c sono quadrati e b é il prodotto di $\sqrt{a}\sqrt{c}$.
Quindi $a\bar{r}^2 - 2b\bar{r} + c = (\sqrt{a}\bar{r} - \sqrt{c})^2$ e risulta

$$\sigma = \pm\frac{(\sqrt{a}\bar{r} - \sqrt{c})}{(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}$$

Diagramma di portafoglio $\rho = 1$ (2)

Posto $\bar{r}_2 > \bar{r}_1$ studiamo

$$\sigma = \pm \frac{|(\sigma_2 - \sigma_1)\bar{r} - (\bar{r}_2\sigma_1 - \bar{r}_1\sigma_2)|}{(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}$$

se $\bar{r} > \frac{\bar{r}_2\sigma_1 - \bar{r}_1\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}$, $\sigma = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)\bar{r} - (\bar{r}_2\sigma_1 - \bar{r}_1\sigma_2)}{(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}$ ed invertendo rispetto a $\bar{r}$ risulta

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{\sigma_2 - \sigma_1}\sigma + \frac{\bar{r}_1\sigma_2 - \bar{r}_2\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

Diagramma di portafoglio $\rho = 1$ (3)

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{\sigma_2 - \sigma_1}\sigma + \frac{\bar{r}_1\sigma_2 - \bar{r}_2\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

é la retta che collega i 2 punti del piano che rappresentano i titoli

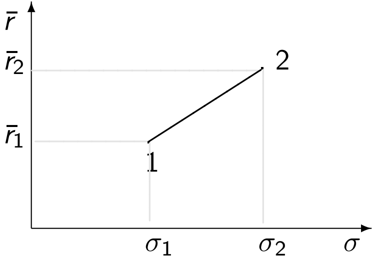


Diagramma di portafoglio $\rho = -1$

Supponiamo che i due titoli siano perfettamente correlati negativamente

$$a = (\sigma_1 + \sigma_2)^2$$
$$b = \bar{r}_2\sigma_1^2 + (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)\sigma_1\sigma_2 + \bar{r}_1\sigma_2^2$$
$$c = (\bar{r}_2\sigma_1 + \bar{r}_1\sigma_2)^2$$

Quindi risulta

$$\sigma = \frac{|(\sigma_1 + \sigma_2)\bar{r} - (\bar{r}_2\sigma_1 + \bar{r}_1\sigma_2)|}{(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}$$

Diagramma di portafoglio $\rho = -1$

Posto $A = \frac{(\bar{r}_2\sigma_1 + \bar{r}_1\sigma_2)}{\sigma_1+\sigma_2}$, con $\bar{r}_1 < A < \bar{r}_2$ si ha

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\sigma + \frac{(\bar{r}_2\sigma_1 + \bar{r}_1\sigma_2)}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad se \quad \bar{r} > A$$

cioé la retta tra il punto $(0, A)$ e il punto $(\sigma_2, \bar{r}_2)$;

$$\bar{r} = -\frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\sigma + \frac{(\bar{r}_2\sigma_1 + \bar{r}_1\sigma_2)}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad se \quad \bar{r} < A$$

cioé la retta tra il punto $(0, A)$ e il punto $(\sigma_1, \bar{r}_1)$.

Diagramma di portafoglio $\rho = -1$

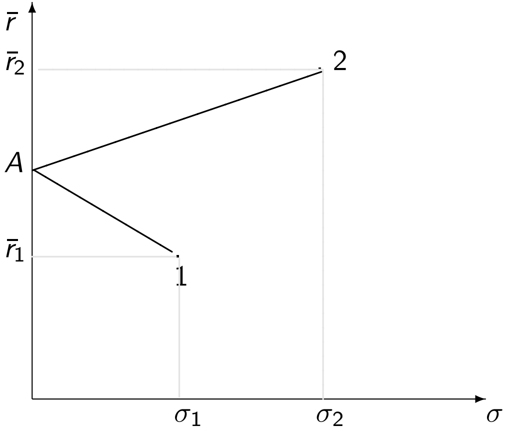


Diagramma di portafoglio $\rho = 0$

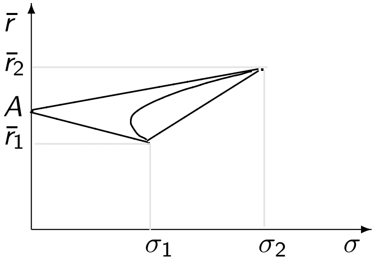
Se i due titoli non sono correlati

$$\begin{aligned} a &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ b &= \bar{r}_2\sigma_1^2 + \bar{r}_1\sigma_2^2 \\ c &= \bar{r}_2\sigma_1^2 + \bar{r}_1\sigma_2^2 \end{aligned}$$

la curva che risulta é un ramo di iperbole tra il punto $(\sigma_1, \bar{r}_1)$ e $(\sigma_2, \bar{r}_2)$

Diagramma di portafoglio (sintesi)

Le possibili curve individuate dal portafoglio di due titoli sono tutti i rami di iperbole racchiusi dal triangolo individuato dalle rette con $\rho = 1$ e $\rho = -1$



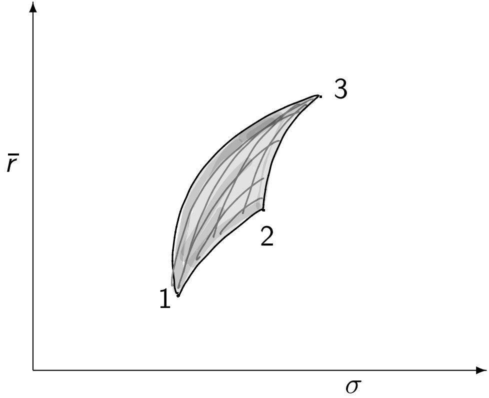
Insieme Possibile

Supponiamo di avere n titoli e di volerli comporre in un portafoglio. Possiamo rappresentare il rendimento e la deviazione standard del portafoglio su un diagramma media-deviazione standard. Al variare dei pesi w_i (con $\sum_i w_i = 1$) l'insieme dei punti é detto **insieme possibile** o regione possibile.

Che forma ha l'insieme possibile?

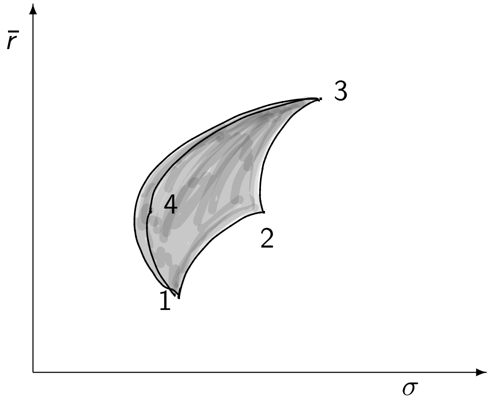
Insieme Possibile

Consideriamo l'insieme possibile con 3 titoli



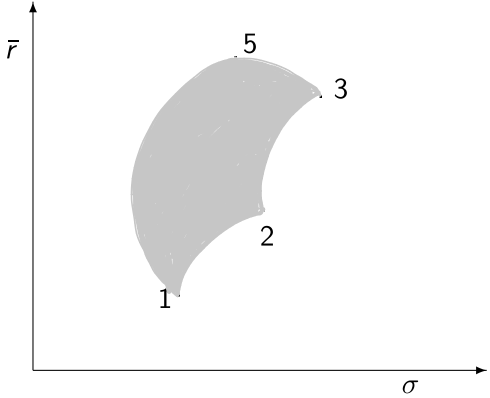
Insieme Possibile

Consideriamo l'insieme possibile con 4 titoli



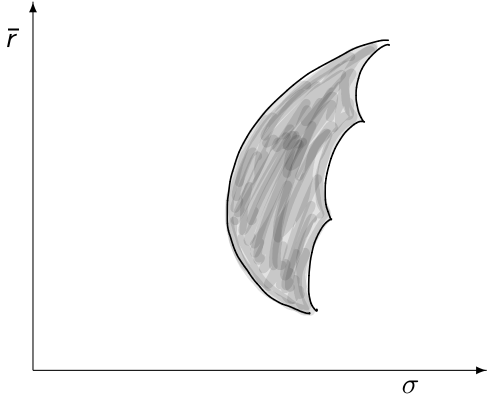
Insieme Possibile

Consideriamo l'insieme possibile con 5 titoli



Insieme Possibile

Estendendo a n titoli otteniamo una regione ad "ombrello"

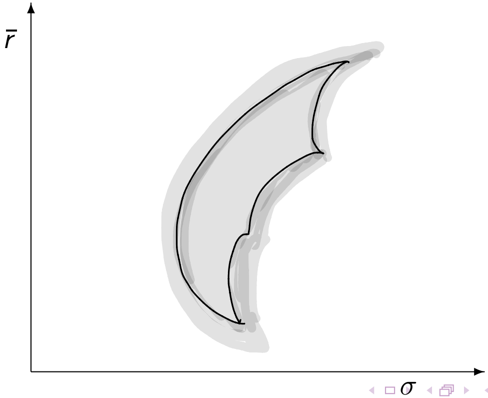


Proprietá dell'Insieme Possibile

- La regione é continua, nessun punto interno di questa regione é esclusa, quindi i punti interni sono tutti portafogli possibili
- La regione é convessa verso sinistra. Cioé presi 2 punti della regione, la retta che li unisce non "esce" dal bordo sinistro. Questo avviene perché presi due punti i possibili portafogli sono a sinistra della retta che li unisce o al massimo coincidono con questa.

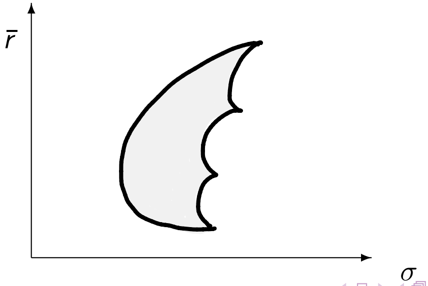
Insieme Possibile con vendite allo scoperto

In caso di vendite allo scoperto l'insieme possibile si estende oltre i titoli e quindi ne risulta un ombrello piú ampio



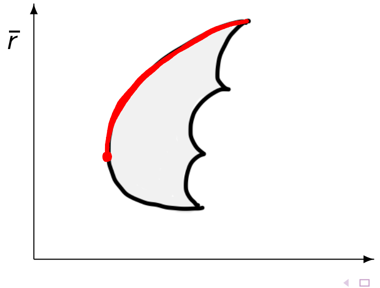
Insieme Minima Varianza

Prendiamo l'insieme possibile. Una persona *avversa al rischio* a paritá di rendimento preferirá il portafoglio con la varianza minore. I punti che soddisfano questa condizione sono, a paritá di rendimento, quelli piú a sinistra. Il bordo sinistro é detto **insieme di minima varianza**.



Frontiera efficiente

Prendiamo l'insieme di minima varianza. A paritá di rischio un individuo preferisce il portafoglio con maggiore rendimento. Quindi prendiamo solo la parte alta della curva e otteniamo la **frontiera efficiente**. I portafogli che giacciono su questa parte di curva sono detti *portafogli efficienti*.



Esercizio 1

In un mercato con 2 titoli A e B con rendimento e varianza $(\bar{r}_A, \sigma_A^2)$ e $(\bar{r}_B, \sigma_B^2)$ rispettivamente e correlazione $\rho = -1$, determinare il rendimento atteso del portafoglio a varianza minima. Dati: $\bar{r}_A = 2$, $\sigma_A = 1$ e $\bar{r}_B = 1$ e $\sigma_B = 2$.

Soluzione: poniamo α come peso di A e $1-\alpha$ peso di B. Dato $\rho = -1$

$$\sigma^2 = \alpha^2\sigma_A^2 - 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_A\sigma_B + (1-\alpha)^2\sigma_B^2 = (\alpha\sigma_A + (1-\alpha)\sigma_B)^2$$

cerchiamo il valore di α che da il valore minimo di σ^2... (soluzione $\alpha = \frac{2}{3}$)

Esercizio 2

Considerate un mercato con 3 titoli con rendimento atteso $\bar{r} = 10\%$ tutti uguali e matrice di varianza e covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcolare rendimento atteso E e varianza V di un portafoglio ottenuto investendo 3500 euro nel primo titolo, 4000 euro nel secondo e -2500 euro nel terzo.
Soluzione: $E = 10\%$, $V = 1.72$

Modello di Markowitz

Supponiamo siano disponibili n titoli con rendimenti medi $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, ... $\bar{r}_n$ e covarianza σ_{ij}. Un portafoglio é individuato dai pesi w_i per $i = 1, 2, ..., n$. Il portafoglio di minima varianza con rendimento atteso $\bar{r}$ sará dato dalla soluzione del problema di minimizzazione vincolata

$$\min_w \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$\textit{con} \quad \textit{vincoli}$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i = \bar{r}$$
$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Soluzione problema di Markowitz

Scriviamo la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - \bar{r} \right) - \mu \left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1 \right).$$

Si calcolano le derivate prime rispetto a w_i, $\forall i = 1, .., n$, λ e μ e si pongono uguali a zero (condizioni del primo ordine), la soluzione sará data dalle soluzioni del sistema di $n + 2$ equazioni che ne deriva.

Soluzione problema di Markowitz con $n = 2$

Consideriamo solo 2 titoli, abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \quad & \tfrac{1}{2}\left(w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + w_2^2\sigma_2^2\right) \\ & -\lambda\left(w_1\bar{r}_1 + w_2\bar{r}_2 - \bar{r}\right) - \mu\left(w_1 + w_2 - 1\right)\end{aligned}$$

condizioni del primo ordine

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w_1} &= \frac{1}{2}\left(2w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_{12}\right) - \lambda\bar{r}_1 - \mu \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w_2} &= \frac{1}{2}\left(2w_1\sigma_{12} + 2w_2\sigma_2^2\right) - \lambda\bar{r}_2 - \mu \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} &= w_1\bar{r}_1 + w_2\bar{r}_2 - \bar{r} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \mu} &= w_1 + w_2 - 1\end{aligned}$$

Soluzione problema di Markowitz con $n = 2$ (2)

Uguagliando a zero si ottiene il sistema di 4 equazioni e in 4 incognite

$$\begin{cases} w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_{12} - \lambda\bar{r}_1 - \mu = 0 \\ w_1\sigma_{12} + w_2\sigma_2^2 - \lambda\bar{r}_2 - \mu \\ w_1\bar{r}_1 + w_2\bar{r}_2 - \bar{r} = 0 \\ w_1 + w_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che va risolto rispetto a w_1, w_2, λ e μ.

Equazioni dell'insieme efficiente

Un portafoglio efficiente, con possibilitá di vendita allo scoperto, tasso di rendimento $\bar{r}$, ha pesi w_i e moltiplicatori di Lagrange λ e μ che soddisfano il seguente sistema di $n+2$ equazioni

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0 \qquad per \quad i = 1, \dots, n \\ \\ \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r} \\ \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{cases}$$

Esempio portafoglio efficiente

Prendiamo 3 titoli non correlati con rendimenti medi 1, 2 e 3. Le varianze $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$ e $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ le equazioni del sistema sono

$$\begin{cases} w_1 - \lambda - \mu = 0 \\ w_2 - 2\lambda - \mu = 0 \\ w_3 - 3\lambda - \mu = 0 \\ w_1 + 2w_2 + 3w_3 = \bar{r} \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

Esempio portafoglio efficiente (2)

Risolvendo il sistema si ottiene

$$w_1 = \frac{4}{3} - \frac{\bar{r}}{2}, \quad w_2 = \frac{1}{3}, \quad w_3 = \frac{\bar{r}}{2} - \frac{2}{3}$$

con

$$\lambda = \frac{\bar{r}}{2} - 1, \quad \mu = \frac{2}{3} - \bar{r}$$

che corrisponde ad un portafoglio con rendimento $\bar{r}$ e deviazione standard $\sigma = \sqrt{\frac{7}{3} - 2\bar{r} + \frac{\bar{r}^2}{2}}$

Esercizi

1) Dati 3 titoli con rendimento medio $\bar{r}_1 = 4\%$, $\bar{r}_2 = 5\%$, $\bar{r}_3 = 7\%$ e matrice di varianza e covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trovare il portafoglio efficiente con rendimento $\bar{r} = 6\%$.

2) Dati 3 titoli con rendimento medio $\bar{r}_1 = 5\%$, $\bar{r}_2 = 7\%$, $\bar{r}_3 = 9\%$ e matrice di varianza e covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare rendimento $\bar{r}$ e varianza σ^2 del portafoglio $w = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$ e stabilire motivando la risposta se il portafoglio é efficiente.

3) Un mercato é composto da 3 titoli rischiosi aventi rendimenti perfettamente correlati negativamente. I rendimenti attesi sono $\bar{r}_1 = 2$, $\bar{r}_2 = 1$, $\bar{r}_3 = 1$, e le deviazioni standard sono $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 1$. L'investimento di 10000 nel secondo titolo e di 10000 nel terzo titolo é efficiente? Motivare la risposta.

Teorema dei due fondi

L'insieme di minima varianza gode di una proprietá importante che semplifica la ricerca dei portafogli efficienti. Ogni portafoglio efficiente puó essere riprodotto, in termini di media e varianza, come combinazione lineare di 2 portafogli efficienti.

Teorema

Siano $\mathbf{w}^A = (w_1^A, w_2^A, ..., w_n^A)$ *e* $\mathbf{w}^B = (w_1^B, w_2^B, ..., w_n^B)$ *due portafogli efficienti composto da n titoli con rendimenti medi* $\bar{r}_1, \bar{r}_2, ..., \bar{r}_n$ *e matrice varianza covarianza* Σ*.*
Allora il portafoglio

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{w}^A + (1 - \alpha)\mathbf{w}^B$$

é un portafoglio efficiente.

Dimostrazione

Sappiamo che $\mathbf{w}^A$, $\mathbf{w}^B$ sono efficienti e quindi soddisfano le equazioni di Markowitz

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0 \qquad per \quad i = 1, ..., n$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Il portafoglio $\mathbf{w}$ é efficiente se soddisfa le equazioni di Markowitz, verifichiamolo.

Dimostrazione (2)

1) Dimostriamo che $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{w}^A + (1-\alpha)\mathbf{w}^B$ é tale che $\sum_{i=1}^n w_i = 1$

$$\sum_{i=1}^n \alpha w_i^A + (1-\alpha) w_i^B = \alpha \sum_{i=1}^n w_i^A + (1-\alpha) \sum_{i=1}^n w_i^B = \alpha + (1-\alpha) = 1$$

2) Proviamo che, per qualche $\bar{r}$, $\mathbf{w}$ é tale che $\sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i = \bar{r}$

$$\sum_{i=1}^n (\alpha w_i^A + (1-\alpha) w_i^B)\bar{r}_i = \alpha \sum_{i=1}^n w_i^A \bar{r}_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^n w_i^B \bar{r}_i = \alpha \bar{r}^A (1-\alpha)\bar{r}^B$$

la condizione é verificata per $\bar{r} = \alpha \bar{r}^A (1-\alpha)\bar{r}^B$.

Dimostrazione (3)

3) Dimostriamo che $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{w}^A + (1-\alpha)\mathbf{w}^B$ soddisfa

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{ij} - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0 \qquad per \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(\alpha w_j^A + (1-\alpha) w_j^B) - \lambda \bar{r}_i - \mu =$$

$$\alpha \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j^A + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j^B - \lambda \bar{r}_i - \mu$$

Dato che i portafogli A e B soddisfano le equazioni abbiamo $\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j^A = \lambda \bar{r}_i + \mu$ e $\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j^B = \lambda \bar{r}_i + \mu$.

Dimostrazione (4)

Sostituendo si ha

$$\alpha \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j^A + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j^B - \lambda \bar{r}_i - \mu =$$

$$\alpha(\lambda \bar{r}_i + \mu) + (1-\alpha)(\lambda \bar{r}_i + \mu) - \lambda \bar{r}_i - \mu =$$

$$\lambda \bar{r}_i(\alpha + 1 - \alpha) + \mu(\alpha + 1 - \alpha) - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0$$

Abbiamo verificato che $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{w}^A + (1-\alpha)\mathbf{w}^B$ soddisfa le equazioni di Markowitz.

Esempio

In un mercato con 3 titoli con rendimenti $\bar{r}_1 = 20\%$, $\bar{r}_2 = 10\%$, $\bar{r}_3 = 40\%$, i portafogli $\mathbf{w}^A = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ e $\mathbf{w}^B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ sono efficienti.
Determinare il portafoglio efficiente che ha rendimento atteso $\bar{r} = 25\%$.

Soluzione: usando il teorema dei due fondi, $\alpha = \frac{\bar{r} - \bar{r}^B}{\bar{r}^A - \bar{r}^B} = \frac{2}{3}$, dove $\bar{r}^A = 30\%$ e $\bar{r}^B = 15\%$ e risulta $\mathbf{w} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$

Esercizi

1) Usando i dati dell'esempio precedente stabilire se $\mathbf{w}^C = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ é efficiente.

2) Considerando 3 titoli con rendimenti attesi $\bar{r}_1 = 4\%$, $\bar{r}_2 = 5\%$, $\bar{r}_3 = 10\%$, i portafogli $\mathbf{w}^A = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ e $\mathbf{w}^B = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ sono efficienti. Si vogliono investire 5000 euro in un portafoglio con rendimento atteso $\bar{r} = 5\%$. Determinare quanto denaro X_2 occorre investire nel titolo 2.

3) Dati tre titoli A, B e C efficienti in media e varianza calcolare la varianza dei rendimenti di C sapendo che

1) Il rendimento atteso di C è uguale alla somma di 1/3 del rendimento medio di A e di 2/3 del rendimento medio di B
2) La correlazione tra i rendimenti di A e B è 0.6, le loro deviazioni standard sono a σ_A e σ_B.

Dati:$\sigma_A = 40\%$, $\sigma_B = 20\%$

Inclusione di un titolo non rischioso

Consideriamo un titolo non rischioso con rendimento r_f e $\sigma = 0$ e un titolo rischioso con rendimento medio $\bar{r}_1$ e σ_1. Un portafoglio con peso α nel titolo non rischioso e $1 - \alpha$ nel titolo rischioso ha rendimento medio e varianza

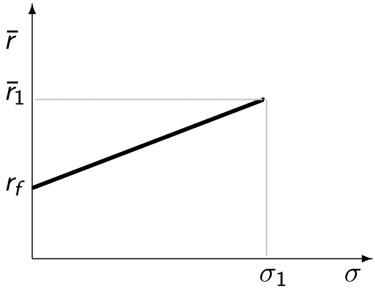
$$\bar{r} = \alpha r_f + (1-\alpha)\bar{r}_1 \qquad \sigma^2 = (1-\alpha)^2\sigma_1^2$$

ne deriva la curva (in forma parametrica)

$$\begin{cases} \bar{r} = \alpha r_f + (1-\alpha)\bar{r}_1 \\ \sigma = (1-\alpha)\sigma_1 \end{cases}$$

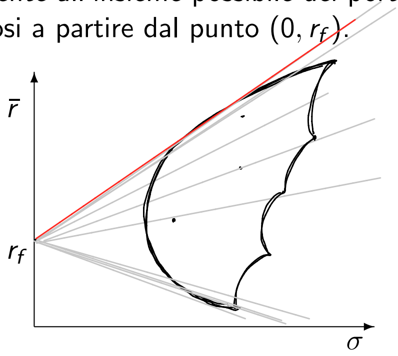
Inclusione di un titolo non rischioso (2)

Sostituendo $\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1}$ si ottiene $\bar{r} = \frac{\bar{r}_1 - r_f}{\sigma_1}\sigma + r_f$ che é la retta che unisce i punti$(0, r_f)$ e $(\sigma_1, \bar{r}_1)$.



Insieme possibile e frontiera efficiente

Consideriamo n titoli rischiosi e uno non rischioso. L'insieme possibile risulta un triangolo infinito e la frontiera efficiente una retta, la retta tangente all'insieme possibile dei portafogli composti dagli n titoli rischiosi a partire dal punto $(0, r_f)$.



Teorema di un fondo

Teorema

Esiste un unico fondo F di titoli rischiosi tale che qualsiasi portafoglio efficiente puó essere costruito come combinazione del fondo F e del titolo non rischioso.

Per trovare F possiamo scrivere per ogni portafoglio $\sigma_P, \bar{r}_P$ la retta che unisce il portafoglio a $(0, r_f)$. Il coefficiente angolare di questa retta al variare di $\bar{r}_P$ é $tg(\theta) = \frac{\bar{r}_P - r_f}{\sigma_P}$.
Il portafoglio F si ottiene risolvendo

$$\max_{\mathbf{w}_P} \frac{\bar{r}_P - r_f}{\sigma_P}$$

con $\bar{r}_P = \sum_i w_i \bar{r}_i$ e $\sigma^2 = \sum_{i,j} w_i w_j \sigma_{ij}$.

Esempio

Dato il portafoglio di mercato con rendimento atteso $\bar{r}_m = 7\%$ e deviazione standard $\sigma_m = 0.20$ e un titolo risk free con $r_f = 3\%$. Trovare il portafoglio con rendimento $\bar{r} = 6\%$.

Soluzione: Il portafoglio si ottiene cercando peso α nel risk free e peso $1 - \alpha$ nel portafoglio di mercato tale che $= \alpha r_f + (1 - \alpha)\bar{r}_m = \bar{r}$ cosi si ottiene $\alpha = \frac{\bar{r}_m - \bar{r}}{\bar{r}_m - r_f} = \frac{1}{4}$.