ESERCIZI 17/04/2020
ISABELLA VALDIVIA

1) (Esame 24/06/2014) Considerare un portafoglio composto da q_1 quote di un BTP con prezzo $P_1 = 101{,}3$ e duration $D_1 = 2{,}4$ e q_2 quote di un BTP con prezzo $P_2 = 104{,}2$ e duration $D_2 = 4{,}5$. Il tasso di rendimento di mercato e 7%. Calcolare D la duration del portafoglio e approssimare il nuovo valore del portafoglio se il tasso di rendimento diventa 8%.
(Dati: $q_1 = 50$, $q_2 = 100$)

a) Come si calcola la Duration di Portafoglio?

$$\boxed{D_{pf} = w_1 D_1 + w_2 D_2}$$ dove $$\boxed{w_1 = \frac{q_1 P_1}{q_1 P_1 + q_2 P_2}}$$ e $$\boxed{w_2 = \frac{q_2 P_2}{q_1 P_1 + q_2 P_2}}$$

Si noti che $$\boxed{w_1 + w_2 = 1}$$

b) $$\boxed{\Delta P = -\frac{1}{1+i} \cdot D \cdot P \cdot \Delta i} \longrightarrow \boxed{\widetilde{P} = P + \Delta P}$$

2) (Esame 09/06/2014) La società Alpha sa di dover pagare sia tra 2 che tra 4 anni un importo di 100 euro e decide di coprirsi da eventuali variazioni dello stato del mercato, caratterizzato all'istante iniziale da una struttura piatta con tasso annuo i. Si supponga che sul mercato siano disponibili i seguenti titoli

. BTP con scadenza a 2 anni, cedola annua e TAN = 7%

. BTP con scadenza a 5 anni, cedola annua e TAN = 5%

Determinare le quote a_1 e a_2 da investire rispettivamente nel BTP con scadenza 2 anni e nel BTP con scadenza 5 anni in modo che il flusso costituito dalle attività e dalle passività risulti immunizzato.

(Dati: i = 5%)

Situazione da Immunizzare

Calcolare caratteristiche identificative della situazione da immunizzare

$$VA_\alpha = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot (1+i)^{-t_k}$$

$$D(0.\alpha) = \frac{\sum_{k=0}^{n} t_k \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{VA_\alpha}$$

Gli strumenti per Immunizzare la precedente situazione sono due BTP, di cui pertanto necessito di calcolare le caratteristiche identificative

$$P = \frac{F}{(1+\frac{\lambda}{m})^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{C}{m}}{(1+\frac{\lambda}{m})^k} = \frac{F}{(1+\frac{\lambda}{m})^n} + \frac{C}{\lambda} \cdot \left\{1 + \frac{1}{(1-\frac{\lambda}{m})^n}\right\}$$

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{m} \cdot \frac{c_k}{(1+\frac{\lambda}{m})^k}}{P} = \frac{1+\lambda}{m\lambda} - \frac{1+\lambda+n(c-\lambda)}{mc \cdot [(1+\lambda)^n - 1] + m\lambda}$$

E calcoleremo P_1 e D_1, e P_2 e D_2

Posto $V_1=a_1 P_1$ e $V_2=a_2 P_2$, il sistema per trovare le quote cercate è il seguente

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = VA_\alpha \\ \dfrac{V_1 D_1 + V_2 D_2}{V_1 + V_2} = D(0,\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 + V_2 = VA_\alpha \\ \dfrac{V_1 D_1 + V_2 D_2}{VA_\alpha} = D(0,\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = VA_\alpha \\ V_1 D_1 + V_2 D_2 = D(0,\alpha) VA_\alpha \end{cases}$$

Ricavati dal precednte sistema V_1 e V_2, finalmente ricaviamo le quote a_1 e a_2

$$a_1 = \frac{V_1}{P_1} \qquad a_2 = \frac{V_2}{P_2}$$

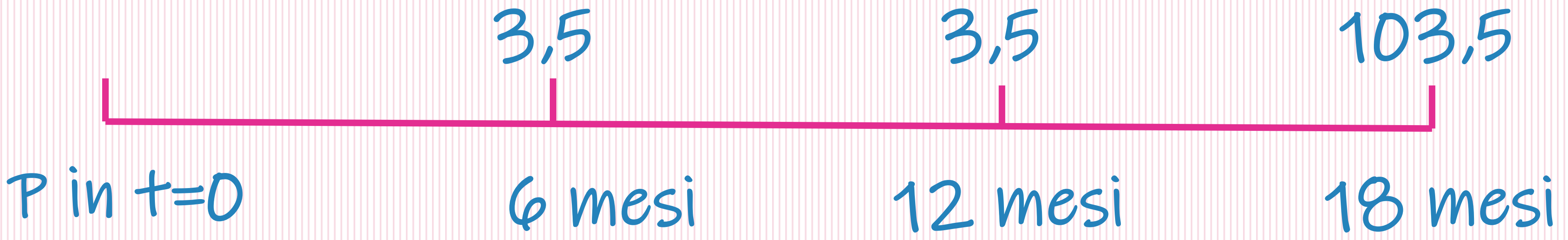
3) (Test di autovalutazione 2010) Una ditta prevede di dover pagare un capitale C_1 tra 2 anni e un capitale C_2 tra 4 anni. Intende immunizzarsi dal rischio di tasso con un'obbligazione zero coupon che scade tra un anno e il cui costo è P_1 e con un coupon bond che quota alla pari e ha duration 5 anni. Quante quote deve acquistare delle due obbligazioni? Assumere un interesse annuo $r = 10\%$.
($C_1 = 50000$; $C_2 = 100000$; $P_1 = 95$)

Come nell'esercizio precedente

4) (Compito Test 2013-2014) Si consideri un BTP con vita residua 18 mesi che paga cedole semestrali al tasso nominale 7%. Sapendo che gli ZCB con scadenza 6 mesi, 1 anno e 18 mesi hanno rispettivamente prezzo P_1, P_2, e P_3, determinare il prezzo P e la duration del BTP. Si assume per tutti i titoli un valore nominale pari a 100.
(Dati: $P_1 = 97{,}56$; $P_2 = 95{,}13$; $P_3 = 92{,}75$)

Costruiamo il flusso temporale del BTP da prezzare, ricordando che il valore delle cedole è il seguente

$$\frac{C}{m} = \frac{c \cdot F}{2} = \frac{7\% \cdot 100}{2} = 3,5$$



Per ricavare P, quindi per prezzare, devo ricavare la struttura dei prezzi a pronti, vale a dire i prezzi degli ZCB unitari, con cui sconterò le varie poste del BTP

$$d(0, t_k) = \frac{P_k}{F_k}$$

E finalmente posso ricavare P e D del BTP tramite le seguenti formule

$$P = \sum_{k=1}^{3} x_k d(0, t_k)$$

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{3} t_k x_k d(0, t_k)}{P}$$

5) Consideriamo un mercato in cui opera una banca ideale con tasso annuo r e capitalizzazione degli interessi mensile. A quali prezzi sarebbe conveniente acquistare un titolo che rimborsa un importo costante I al termine di ogni mese da oggi in poi, per sempre? Investire un capitale in tale titolo è più o meno rischioso (dal punto di vista della sensibilità alle variazioni di tasso di interesse) che investirlo in uno zero coupon bond che rimborsa il capitale dopo 7 anni? Motivare la risposta
(Dati I = 10, r = 10%)

a)

$$r_m = \frac{r}{12}$$

$$V_0 = \frac{I}{r_m}$$

Se $P \leq V_0$ allora è conveniente l'acquisto

b)

$$D = 1 + \frac{1}{r_m}$$

Se D è maggiore della duration dello ZCB messo come alternativa, allora l'investimento è più rischioso

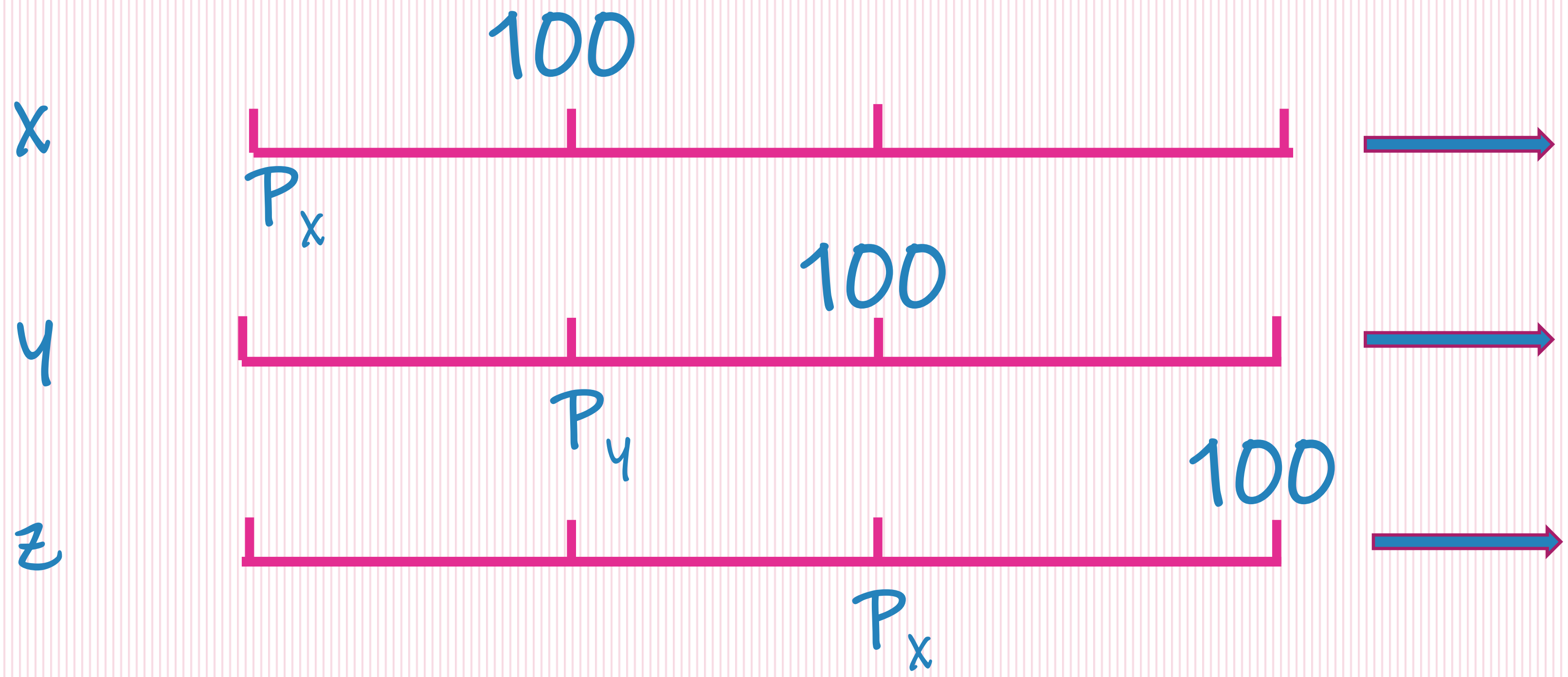
6) In un mercato obbligazionario strutturato su uno scadenzario $t = \{180; 240; 360\}$ giorni, al tempo $t_0 = 0$, sono presenti tre titoli:

. un contratto a pronti x che garantisce 100 in t_1 e prezzo $P_x = 98{,}2$;

. un contratto a termine y che garantisce 100 in t_2 al prezzo $P_y = 97{,}5$ pattuito in $t_0 = 0$ e pagabile in t_1;

. un contratto a termine z che garantisce 100 in t_3 al prezzo $P_z = 95$ pattuito in $t_0 = 0$ e pagabile in t_2.

Determinare le strutture per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine, implicati dalle strutture dei prezzi corrispondenti, indicandoli in forma percentuale e su base annua, rispetto alla durata effettiva dell'anno (360 giorni). Calcolare il valore di equilibrio di un BTP con valore facciale $C = 100$, tasso nominale $j_n = 6\%$ su base annua, scadenza in $s = 1$ anno e cedole semestrali.

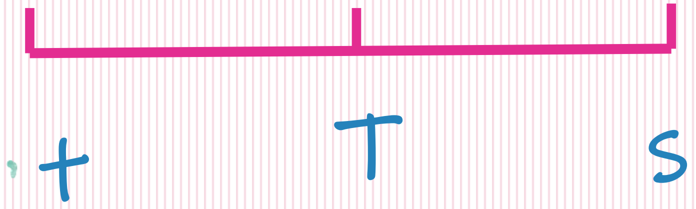


$$d(0,t_1) = \frac{P_x}{100}$$

$$d(0,t_1,t_2) = \frac{P_y}{100}$$

$$d(0,t_2,t_3) = \frac{P_z}{100}$$

Teorema dei Prezzi Impliciti



In un mercato privo di arbitraggio vale la seguente relazione tra prezzi spot (prezzi a pronti) e prezzi forward (prezzi a termine)

$$\boxed{d(t,s) = d(t,T)\,d(t,T,s)}$$

Dal Teorema dei Prezzi Impliciti posso calcolare:

$$\boxed{d(0,t_2) = d(0,t_1)d(0,t_1,t_2)}$$

$$\boxed{d(0,t_3) = d(0,t_2)d(0,t_2,t_3)}$$

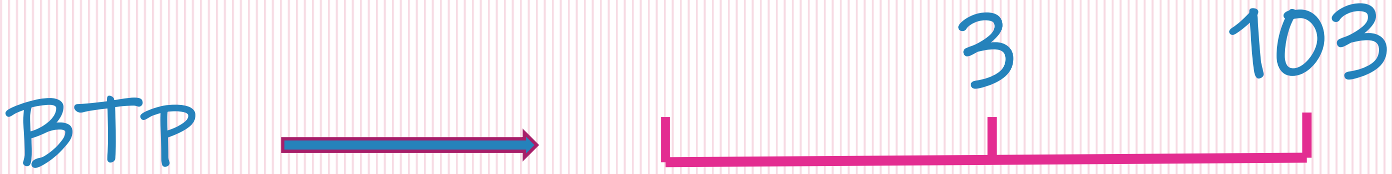
Inoltre

$$\boxed{d(0,t_k) = \frac{1}{[1+i(0,t_k)]^{t_k}} \implies [1+i(0.t_k)]^{t_k} = \frac{1}{d(0,t_k)} \implies i(0,t_k) = \left[\frac{1}{d(0,t_k)}\right]^{\frac{1}{t_k}} - 1}$$

Infine, sfruttando il fatto che $\boxed{d(t,T,s) = \dfrac{d(t,s)}{d(t,T)}}$

Calcoliamo $\boxed{i(t,T,s) = \left[\dfrac{1}{d(t,T,s)}\right]^{\frac{1}{s-T}} - 1}$

Calcolare il valore di equilibrio di un BTP con valore facciale C = 100, tasso nominale j_n = 6% su base annua, scadenza in s = 1 anno e cedole semestrali.



Con la struttura dei prezzi calcolato precedentemente, riesco a calcolare il valore richiesto

$$\boxed{P = 3 \cdot d(0, t_1) + 103 \cdot d(0, t_2)}$$

7) Si consideri un mercato definito al tempo $t = 0$ sullo scadenzario $t = \{t_1; t_2; t_3\} = \{1; 2; 3\}$ anni; siano trattati sul mercato tre titoli obbligazionari:

. uno zero coupon bond con valore di rimborso $x = 100$ euro in t_1 e prezzo a pronti di 95,75euro;

. uno zero coupon bond con valore di rimborso $y = 200$ euro in t_2 e prezzo a termine, pattuito in t e pagabile in t_1, di 188 euro;

. uno zero coupon bond con valore di rimborso $z = 200$ euro in t_3 e prezzo a termine, pattuito in t e pagabile in t_1, di 173,5 euro.

(a) Si calcolino le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali corrispondenti ai prezzi di mercato osservati in t, esprimendo i tassi su base annua.

(b) Volendo emettere, in $t = 0$, un titolo a cedola fissa con scadenza 3 anni, che paghi un tasso annuo cedolare uguale al tasso di parità, determinare il livello della cedola I del titolo, considerando un valore di rimborso di 100 euro.

Come nell'esercizio precedente