

Matematica Finanziaria

AA 2022 2023

Annalisa Fabretti

email: annalisa.fabretti@uniroma2.it

N.B. Questo materiale NON sostituisce il libro di testo

Operazione Finanziaria

Un'operazione finanziaria é un contratto che prevede uno scambio di capitali esigibili (o disponibili) in istanti di tempo differenti.

Una operazione finanziaria può essere:

- **certa** quando é caratterizzata da importi certi a scadenza fissa;
- **aleatoria** quando gli importi e/o le scadenze sono incerti.

Esempi di operazioni finanziarie: mutui, investimenti, finanziamenti, rendite, pensioni sociali, assicurazioni, ecc.

Un'operazione finanziaria x/t é rappresentata da

- un **Flusso di Cassa** $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, cioè una successione di importi monetari in entrata o uscita;
- uno **scadenzario** $t = (t_0, t_1, \dots, t_n)$, cioè una successione di tempi che sono le scadenze a cui i relativi importi sono esigibili.



Esempio

Un prestito di 1000 euro ricevuto oggi e restituito in 4 rate di 300 euro ciascuna restituite con cadenza annuale

$$x = (+1000, -300, -300, -300, -300)$$

con

$$t = (0, 1, 2, 3, 4)$$



Problemi

Possiamo affrontare una molteplicitá di problematiche di investimento:

- Date due successioni di flussi quale é preferibile? Quando mi viene proposto un investimento come valuto se é conveniente?
- Quanto sarei disposta a pagare per una determinata successione di flussi di cassa? O quanto vorrei ricevere per cedere una successione di flussi di cassa di cui dispongo?
- Dato un insieme di successioni di flussi di cassa, c' é una combinazione piú favorevole delle altre da preferire?

Investimenti e mercati

”.. l’analisi degli investimenti é un processo che consiste nell’ esaminare delle alternative e decidere quale sia quella preferibile. In questo senso é simile all’analisi di altre decisioni... Tuttavia le problematiche relative agli investimenti differiscono da quelle implicate in altre decisioni per un aspetto importante: la maggior parte degli investimenti viene effettuata nell’ambito di un mercato finanziario, e tali mercati offrono alternative non presenti in altre situazioni decisionali” (cit. Luenberger pag 3)

- **Principio di confronto** Ogni investimento viene valutato confrontandolo con altri investimenti disponibili sul mercato finanziario, che fornisce una base di confronto.
- Si verifica un arbitraggio quando é possibile guadagnare denaro senza investire nulla. Due titoli differenti con proprietà identiche devono avere approssimativamente lo stesso prezzo altrimenti si possono verificare opportunità di arbitraggio. Per questo si adotta l'ipotesi di **assenza di arbitraggio**.

Un **capitale** C produce dopo un tempo t un **montante** M . Si definisce **interesse totale** l'importo

$$I = M - C$$

Con i si indica il **tasso unitario annuo d'interesse**.

La relazione tra I ed i dipende dal regime finanziario utilizzato. I regimi finanziari sono leggi stabilite per la capitalizzazione e per l'attualizzazione, cioè dei modi diversi di risolvere operazioni finanziarie.

Esempio

Un capitale di 600 unità monetarie investito oggi e riscosso tra 2 anni produce un montante di 800. L'interesse totale in 2 anni:

$$I = M - C = 200$$

Qual é l'interesse annuo?

Qual é il tasso di interesse annuo?

Dipende dal regime finanziario di riferimento.

Studieremo 2 regimi :

- **Interesse semplice** dove gli interessi sono proporzionali alla durata dell'investimento
- **Interesse composto** dove gli interessi vengono capitalizzati annualmente andandosi ad aggiungere al capitale iniziale.

Regime dell'interesse semplice

Sia C il capitale iniziale da investire e r il tasso unitario di interesse annuo. Dopo un anno C produrrà un interesse pari a rC . Se $I = rC$ abbiamo il montante

$$M = C + I = C + rC = C(1 + r).$$

Il termine $1 + r$ é detto fattore di capitalizzazione in un anno. Che succede il secondo anno? L'interesse al secondo anno é ancora rC .

Indichiamo con I_i l'interesse maturato nell'anno t e M_t il relativo montante allora

$$M_2 = M_1 + I_2 = C + I_1 + I_2 = C + rC + rC = C + 2rC = C(1 + 2r)$$

Regime dell'interesse semplice

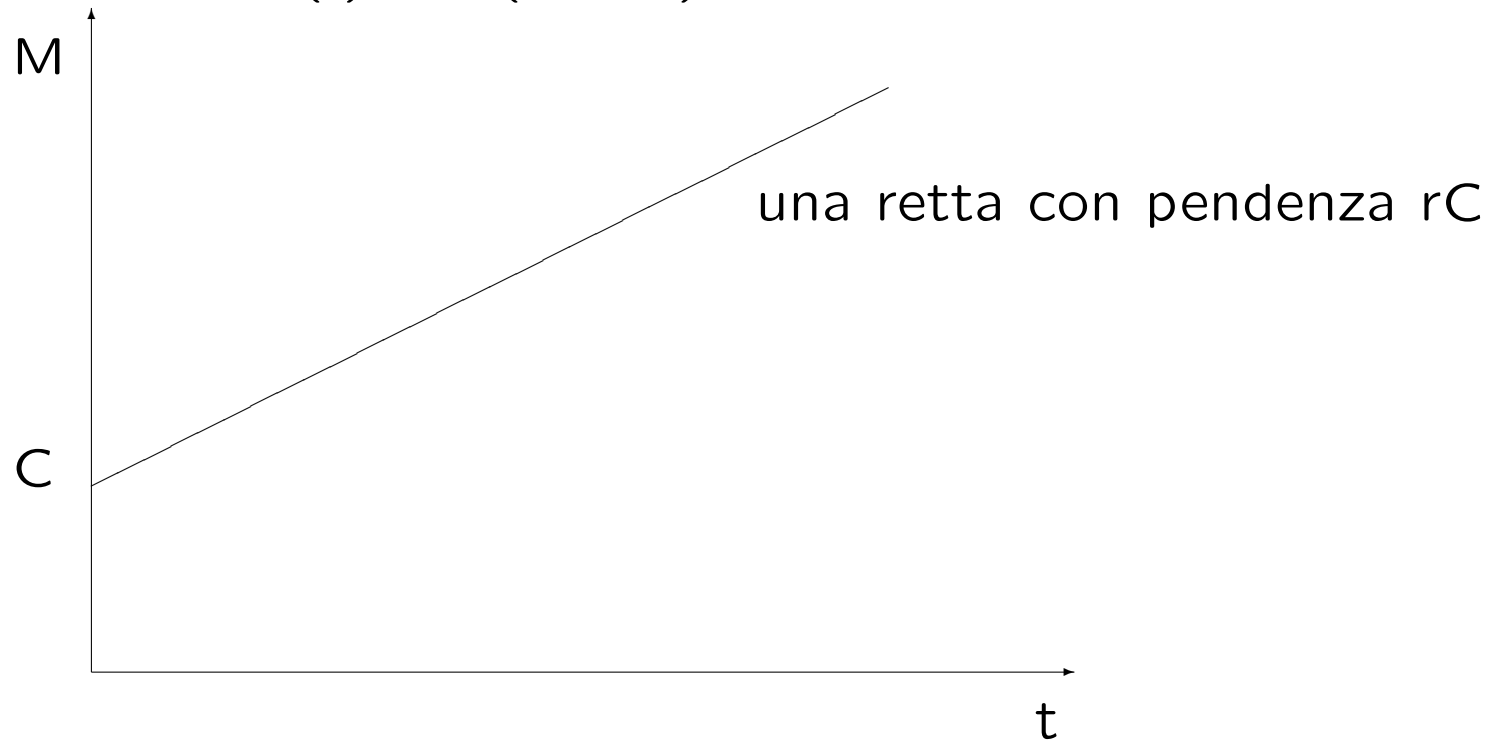
Dopo 3 anni $M_3 = C(1 + 3r)$, dopo 4 anni $M_4 = C(1 + 4r)$ e così via ...

quindi il montante al tempo t :

$$M_t = C(1 + rt)$$

con $(1 + rt)$ detto **fattore di capitalizzazione**.

Studiamo $M(t) = C(1 + rt)$ come funzione del tempo:



Esempi interesse semplice

Sia $C = 1000$ Euro investiti al tasso $r = 5\%$ per 3 anni.

- Trovare il montante dopo 3 anni.
- Quanto vale il montante dopo un anno e mezzo?

Come si "scrivono" le frazioni dell'anno?

- 1 semestre: 6 mesi su 12 mesi in un anno quindi

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

- 1 trimestre: 3 mesi su 12 mesi in un anno quindi

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

- 2 mesi e 4 giorni: usando l'anno di 360 giorni e il mese di 30 giorni quindi

$$\frac{30 \cdot 2 + 4}{360} = \frac{64}{360}$$

Esempi interesse semplice

Calcolare l'interesse prodotto da un capitale di 800 euro investito in regime di interesse semplice al tasso 7% per 2 anni e 5 mesi

Esempi interesse semplice

Conviene investire (opzione A) 1000 euro per 4 anni al tasso 4% oppure (opzione B) 900 euro per 4 anni al tasso 6%? E se il periodo di investimento raddoppiasse?

Montante OpA: $1000(1 + 4 \cdot 0.04) = 1000(1 + 0.16) = 1160$

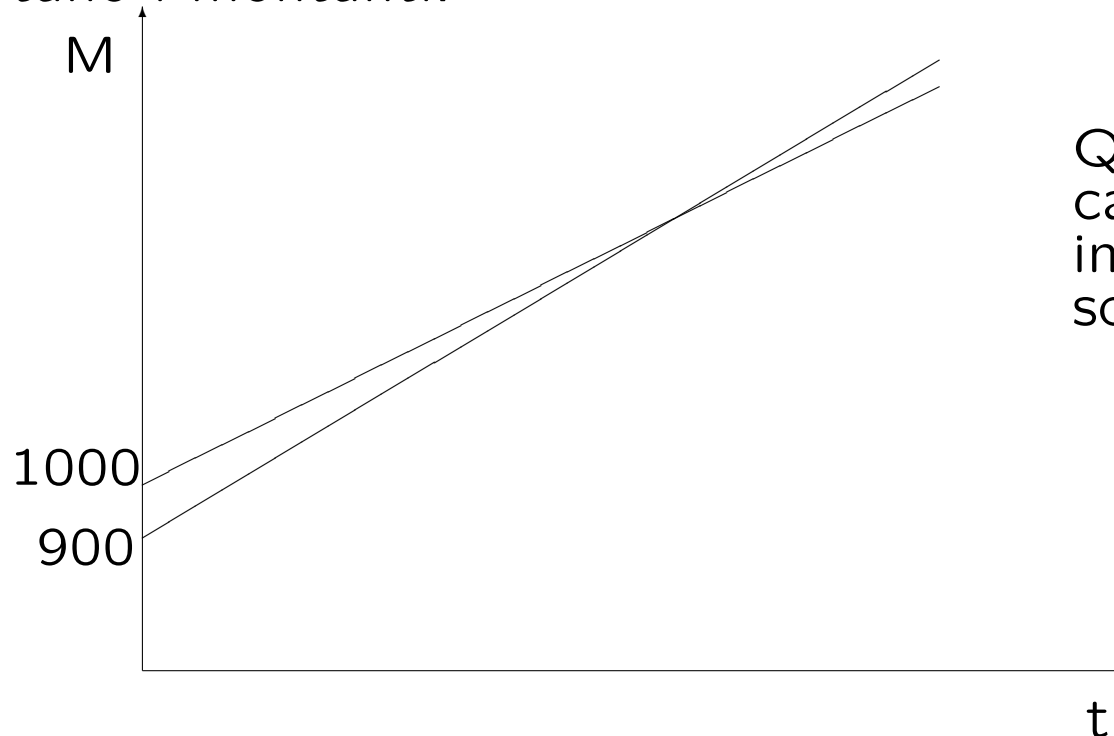
Montante OpB: $900(1 + 4 \cdot 0.06) = 900(1 + 0.24) = 1116$

Risposta:

E su 8 anni?

Osservazioni Esempio precedente

L'opzione A ha un interesse annuo di 40 euro mentre l'operazione B di 54, queste sono le pendenze delle due rette che rappresentano i montanti.



Quesito:
calcolare t^* il tempo
in cui le 2 opzioni
sono equivalenti

Risposta al quesito

Quesito: calcolare t^* il tempo in cui le 2 opzioni sono equivalenti.

Sono equivalenti quando producono lo stesso montante, quindi

$$1000(1 + t \cdot 0.04) = 900(1 + t \cdot 0.06)$$

risulta

$$t = \frac{1}{0.14} = 7.14 \text{ anni}$$

Come convertire 7.14 anni in mesi e giorni? 7 anni e 0.14 di un anno.

0.14 equivale $(0.14 \cdot 365)$ in giorni a circa 51 giorni, che equivale a un mese e 21 giorni o un mese e 3 settimane.

Sintesi sull'interesse semplice

Gli interessi sono proporzionali alla durata dell'investimento.

Posto r il tasso di interesse annuo, dopo t anni un'unità di capitale produrrà un interesse $I(t) = rt$.

Sia C il capitale investito, dopo t anni si avrà

$$M(t) = C(1 + rt)$$

Il fattore $(1 + rt)$ é detto **fattore di capitalizzazione** e rappresenta il montante prodotto da una unità monetaria investita al tasso r per il tempo t .

Esercizi

- 1) Calcolare il montante prodotto da un capitale di 4000 dollari investito in regime di interesse semplice al tasso $i = 6\%$ per 3 anni e 42 giorni.
- 2) Vi viene proposto di investire 2000 euro al tasso $r = 4\%$. Dopo 3 anni disinvestite per investire tutto il ricavato in un'operazione che produce il 5%. Qual é il montante dopo 10 anni?

Alcune volte può risultare utile rispondere a domande del tipo:

- qual é il tasso di interesse che ha prodotto il montante M avendo investito C per t anni?
- per quanto tempo devo investire il capitale C al tasso i per ottenere un montante M ?
- quale capitale é stato investito al tasso r per ottenere un montante M dopo t anni?

Ricavare il tasso

Qual é il tasso di interesse che ha prodotto il montante M avendo investito C per t anni? Invertiamo la formula

$$M = C(1 + rt)$$

rispetto a r

$$1 + rt = \frac{M}{C} \rightarrow rt = \frac{M}{C} - 1$$

quindi

$$r = \frac{1}{t} \left(\frac{M}{C} - 1 \right)$$

Ricavare il tasso: Esempio

Un capitale di 2500 euro é stato investito per 3 anni e ha prodotto un montante di 2900 euro. Quale é il tasso di investimento?

Usiamo

$$r = \frac{1}{t} \left(\frac{M}{C} - 1 \right)$$

quindi

$$r = \frac{1}{3} \left(\frac{2900}{2500} - 1 \right) = 0.053333$$

Risposta: $r = 5.33\%$ (approssimare alla 4 cifra decimale)

Ricavare il capitale

Quale capitale é stato investito al tasso r per ottenere un montante M dopo t anni?

Invertiamo la formula

$$M = C(1 + rt)$$

rispetto a C e viene

$$C = \frac{M}{(1 + rt)}$$

Ricavare il capitale: Esempio

Depositando X su un conto corrente che offre il 5%, dopo 10 anni ho ottenuto un saldo di 11250 euro. Quanto capitale X é stato depositato inizialmente?

Usiamo

$$C = \frac{M}{(1 + rt)} = \frac{11250}{(1 + 0.05 \cdot 10)} = 7500$$

Risposta: $X = 7500$.

Ricavare il tempo

Per quanto tempo devo investire il capitale C al tasso i per ottenere un montante M ? Invertiamo la formula

$$M = C(1 + rt)$$

rispetto a t

$$1 + rt = \frac{M}{C} \rightarrow rt = \frac{M}{C} - 1$$

quindi

$$t = \frac{1}{r} \left(\frac{M}{C} - 1 \right)$$

Ricavare il tempo: Esempio

Possiedo oggi una somma di 500 Euro che desidero depositare in un fondo che offre il tasso $r = 8\%$ annuo. Dopo quanto tempo potr  disporre di 1000 euro?

Usiamo

$$t = \frac{1}{r} \left(\frac{M}{C} - 1 \right) = \frac{1}{0.08} \left(\frac{1000}{500} - 1 \right) = 12.5$$

Risposta: dopo 12 anni e 6 mesi.

Sintesi sulle formule inverse nel regime interesse semplice

Per ricavare il capitale C che ha prodotto il montante M investito al tasso r per t anni:

$$C = \frac{M}{(1 + rt)}$$

Per ricavare il tasso d'interesse a cui é stato investito il capitale C che ha prodotto il montante M dopo t anni:

$$r = \frac{1}{t} \left(\frac{M}{C} - 1 \right)$$

Per ricavare il tempo per cui é stato investito il capitale C al tasso r che ha prodotto il montante M :

$$t = \frac{1}{r} \left(\frac{M}{C} - 1 \right)$$

Esercizi

- 1) Un capitale di 2000 euro investito 10 anni fa in un'operazione finanziaria ha prodotto un montante di 3750. Quale é il tasso di rendimento annuo dell'operazione?
- 2) Un investimento di 1500 ha prodotto dopo 5 anni un montante di 2000, ci viene proposto di disinvestire il ricavato per investirlo in un'operazione che produce il 7% annuo, é conveniente?
- 3) Disponiamo di 1000 euro che vogliamo investire per un progetto futuro che richiede un capitale di 1500 euro. Se depositiamo i 1000 euro su un conto che produce il 7% annuo tra quanto tempo potremo investire nel progetto?

Regime dell'interesse composto

Il regime dell'interesse composto permette di capitalizzare gli interessi. Dopo un anno il capitale C produce, al tasso r , l'interesse rC . Nel secondo anno gli interessi saranno calcolati sul capitale $C + rC$ quindi $I_2 = r(C + rC)$ e

$$M_2 = C + rC + r(C + rC) = C + 2rC + r^2C = C(1 + 2r + r^2) = C(1 + r)^2$$

Dopo 3 anni:

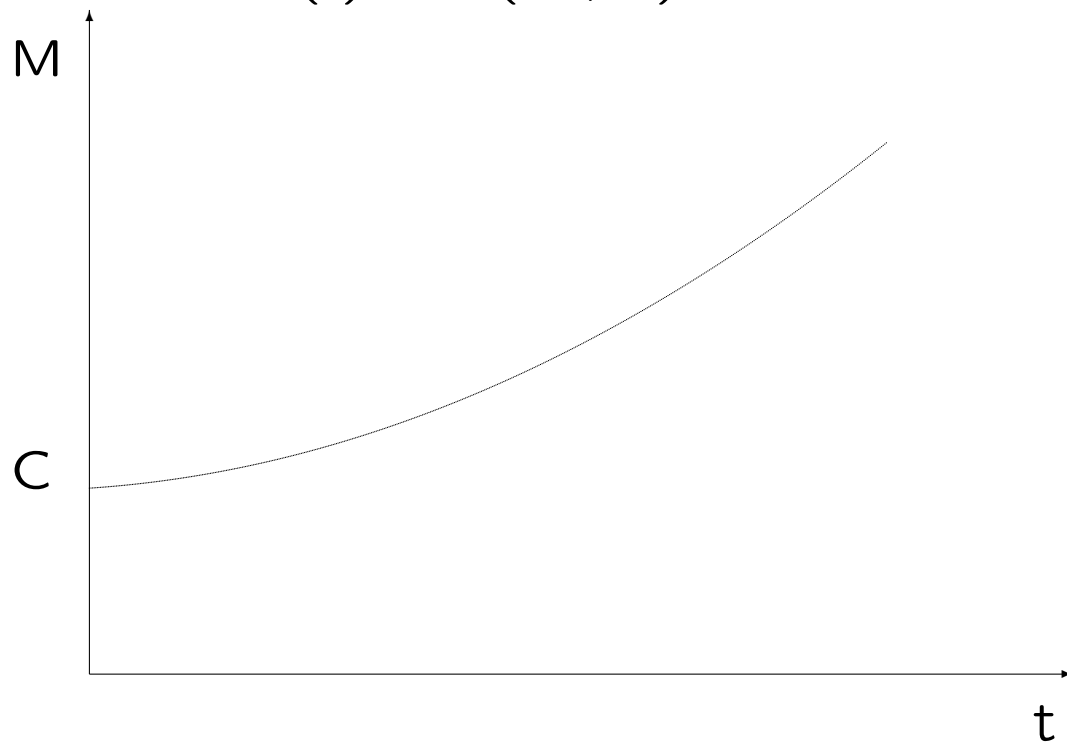
$$M_3 = C(1 + r)^2 + rC(1 + r)^2 = C(1 + r)^3$$

e così via... si ottiene all'anno t

$$M_t = C(1 + r)^t$$

Il fattore $(1 + r)^t$ è detto fattore di capitalizzazione e rappresenta il montante prodotto da una unità monetaria investita al tasso i per il tempo t .

Studiamo $M(t) = C(1 + r)^t$ come funzione del tempo:



Esempi interesse composto

Sia $C = 1000$ Euro investiti al tasso $r = 5\%$ per 3 anni.

- Trovare il montante dopo 3 anni.

$$M(t) = C(1 + r)^t = 1000(1.05)^3 = 1157,62$$

- Quanto vale il montante dopo un anno e mezzo?

$$M(t) = C(1 + r)^t = 1000(1.05)^{1.5} = 1075.93$$

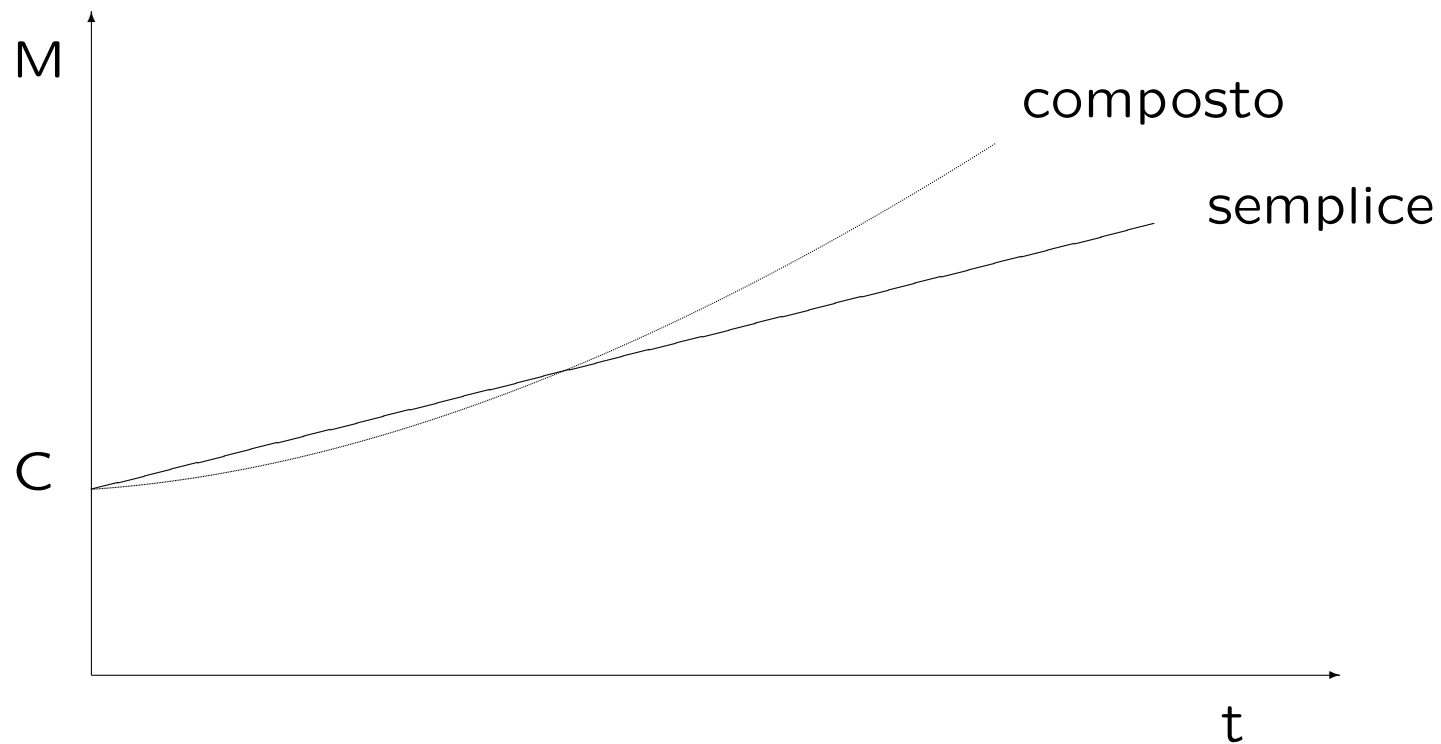
Confronto tra interesse semplice e composto

Preso il capitale $C = 1000$ investiti al tasso $r = 5\%$

- dopo 3 anni in interesse semplice produce un interesse di 150 e un montante di 1150 mentre in composto un interesse di 157,62 e un montante di 1157,62
- dopo un anno e mezzo in interesse semplice produce un interesse di 75 e un montante di 1075 mentre in composto $I = 75,93$ e montante 1075,93

A differenza dell'interesse semplice, nell'interesse composto gli interessi non sono proporzionali alla durata dell'investimento

La parit  avviene per $t = 1$, prima dell'anno   vantaggioso l'interesse semplice mentre dopo un anno   pi  vantaggioso l'interesse composto.



Sintesi su regime dell'interesse composto

Gli interessi vengono capitalizzati annualmente andandosi ad aggiungere al capitale iniziale. Posto r il tasso di interesse annuo, investendo il capitale C dopo t anni si avrà

$$M = C(1 + r)^t$$

Il fattore $(1 + r)^t$ é detto **fattore di capitalizzazione** e rappresenta il montante prodotto da una unità monetaria investita al tasso r per il tempo t .

Esercizio

Un capitale $X = 100$ viene investito per 2 anni in un conto che rende il 7% con regime d'interesse semplice. Allo scadere dei 2 anni l'investitore ritira il denaro per depositarlo per ulteriori 3 anni su un conto che rende il 6% ma in regime di interesse composto. Quanto é il montante alla fine dei 5 anni? Quanto sarebbe stato se non avesse cambiato? É stato conveniente cambiare?

Anche per l'interesse composto risulta utile rispondere a domande del tipo:

- qual é il tasso di interesse che ha prodotto il montante M avendo investito C per t anni?
- per quanto tempo devo investire il capitale C al tasso r per ottenere un montante M ?
- quale capitale é stato investito al tasso r per ottenere un montante M dopo t anni?

Ricavare il tasso

Qual é il tasso di interesse che ha prodotto il montante M avendo investito C per t anni? Invertiamo la formula

$$M = C(1 + r)^t$$

rispetto a r

$$(1 + r)^t = \frac{M}{C} \rightarrow 1 + r = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}}$$

quindi

$$r = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

Ricavare il tasso: Esempio

Un capitale di 2500 euro é stato investito per 3 anni e ha prodotto un montante di 2900 euro. Quale é il tasso di investimento?

Usiamo

$$r = \left(\frac{M}{C} \right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

quindi

$$r = \left(\frac{2900}{2500} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.0507$$

Risposta: $r = 5.07\%$ (approssimare alla 4 cifra decimale)

Ricavare il capitale

Quale capitale é stato investito al tasso r per ottenere un montante M dopo t anni?

Invertiamo la formula

$$M = C(1 + r)^t$$

rispetto a C e viene

$$C = \frac{M}{(1 + r)^t}$$

Ricavare il capitale: Esempio

Depositando X su un conto corrente che offre il 5%, dopo 10 anni ho ottenuto un saldo di 11250 euro. Quanto capitale X é stato depositato inizialmente?

Usiamo

$$C = \frac{M}{(1 + r)^t} = \frac{11250}{(1.05)^{10}} = 6906.5$$

Risposta: $X = 6906.5$.

Ricavare il tempo

Per quanto tempo devo investire il capitale C al tasso i per ottenere un montante M ? Invertiamo la formula

$$M = C(1 + r)^t$$

rispetto a t

$$\frac{M}{C} = (1 + r)^t \rightarrow \log\left(\frac{M}{C}\right) = \log(1 + r)^t \rightarrow \log\left(\frac{M}{C}\right) = t \log(1 + r)$$

quindi

$$t = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1 + r)}$$

Ricavare il tempo: Esempio

Possiedo oggi una somma di 500 Euro che desidero depositare in un fondo che offre il tasso $r = 8\%$ annuo. Dopo quanto tempo potr  disporre di 1000 euro?

Usiamo

$$t = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1 + r)} = \frac{\log\left(\frac{1000}{500}\right)}{\log(1.08)} = 9.0065$$

Risposta: dopo 9 anni

Sintesi su formule inverse nell' interesse composto (1)

Per ricavare il capitale C che ha prodotto il montante M investito al tasso r per t anni:

$$C = \frac{M}{(1 + r)^t}$$

Per ricavare il tasso d'interesse a cui é stato investito il capitale C che ha prodotto il montante M dopo t anni:

$$r = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

Sintesi su formule inverse nell' interesse composto (2)

Per ricavare il tempo per cui é stato investito il capitale C al tasso r che ha prodotto il montante M :

$$t = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1 + r)}$$

Esercizi

- 1) Un capitale di 3500 euro ha prodotto un montante di 7000 euro in 7 anni. Quale é il tasso di rendimento annuo dell'operazione?
- 2) Dopo quanto tempo un capitale C raddoppia se investito al 5%?
- 3) Quanto capitale bisogna investire oggi per ottenere 13000 euro tra 5 anni al tasso 3.5%?
- 4) Il capitale $C = 25000$ é stato investito su un fondo per 4 anni e mezzo fruttando un montante di 27000. Quale é il tasso di rendimento annuo del fondo?
- 5) Quanto tempo é necessario investire il capitale di 1500 euro affinché al tasso 4% diventi 2000 euro?

Regola 7-10

Una somma di denaro investita al 7% annuo raddoppia in circa 10 anni. Una somma investita al 10% raddoppia in circa 7 anni.

Infatti

$$(1 + 0.07)^{10} \approx 1.97$$

e

$$(1 + 0.10)^7 \approx 1.95$$

Capitalizzazione a vari intervalli

L'interesse può essere pagato con una frequenza maggiore rispetto all'anno. Per esempio trimestralmente, mensilmente o giornalmente. Lo stesso avviene per i prestiti o mutui dove gli interessi sono pagati mensilmente.

Il tasso che la banca comunica in questi casi è un tasso annuale ma detto **tasso nominale convertibile m volte l'anno** e viene indicato con j_m .

Tasso periodale

Il tasso (effettivo) periodale, indicato con i_m o $i_{\frac{1}{m}}$, é il tasso che si riferisce al periodo di riferimento e con il quale si capitalizza.

Per ottenere i_m si divide per m :

$$i_m = \frac{j_m}{m}$$

Esempio: La banca A offre un mutuo al 3.4% (nominale) annuo, quale é il tasso mensile usato per calcolare gli interessi?

$$i_{12} = \frac{3.4\%}{12} \approx 0.28\%$$

Esempio

Un c/c offre un tasso (nominale) del 2% e una capitalizzazione trimestrale. Se depositiamo 1000 euro quanto sarà il montante tra 2 anni?

In un anno ci sono 4 trimestri quindi si capitalizza 4 volte l'anno, risulta $m = 4$ e il tasso effettivo periodale e'

$$i_4 = \frac{2\%}{4} = 0.5\%$$

In 2 anni ci sono 8 trimestri, quindi

$$M = 1000(1 + 0.005)^8 = 1040.7$$

Principio di Equivalenza

Due operazioni si dicono equivalenti se a parità di tempo e capitale investito producono lo stesso montante.

Uguualmente due tassi si dicono equivalenti se producono lo stesso montante.

Equivalenza tra tassi

Due tassi i_k e i_h relativi a periodi diversi si dicono equivalenti se applicati a capitali uguali nello stesso tempo t producono lo stesso montante:

$$(1 + i_k)^{kt} = (1 + i_h)^{ht}$$

Sia r il tasso annuo, r é equivalente al tasso periodale i_m se soddisfa

$$(1 + r) = (1 + i_m)^m$$

da cui si ricava

$$r = (1 + i_m)^m - 1 \qquad i_m = (1 + r)^{\frac{1}{m}} - 1$$

e

$$j_m = m \ i_m = m((1 + r)^{\frac{1}{m}} - 1)$$

Esempio

Qual é l'equivalente annuale di un tasso trimestrale del 3%?

Partiamo da $i_4 = 3\%$ applichiamo $r = (1 + i_m)^m - 1$ quindi

$$r = (1 + i_4)^4 - 1 = (1.03)^4 - 1 = 12.56\%$$

$r = 12.56\%$ é il tasso annuo effettivo equivalente al 3% trimestrale.

Il tasso nominale $j_4 = 4 \cdot r_4 = 12\%$.

Nota: il tasso nominale e quello effettivo equivalente sono sempre in relazione

$$j_m < r$$

Tasso d'interesse effettivo e tasso d'interesse nominale

Quando il tasso annuo r é

- effettivo, il periodale é

$$i_m = (1 + r)^{\frac{1}{m}} - 1$$

- nominale, il periodale é

$$i_m = \frac{r}{m}$$

Esempio

Calcolare il montante dopo 2 anni di un capitale $C = 1000$ euro investito al tasso nominale 6% con capitalizzazione trimestrale.

Soluzione: se il tasso é nominale e la capitalizzazione é trimestrale:

$$m = 4 \quad j_4 = 6\%$$

tasso periodale $i_4 = \frac{6\%}{4} = 1.5\%$, 2 anni corrispondono a 8 trimestri, allora

$$M = 1000(1 + 0.015)^8 = 1126,5$$

Quanto vale il tasso effettivo equivalente?

$$r = (1 + i_4)^4 - 1 = (1.015)^4 - 1 = 6.14\%$$

Esercizi

- 1) Calcolare il montante di un capitale di 850 euro investito al tasso semestrale 3% per 8 anni. Calcolare il tasso annuo effettivo.
- 2) Calcolare il montante di un capitale di 600 euro investito per 5 anni e 6 mesi ad un tasso nominale convertibile trimestralmente pari al 6%
- 3) Calcolare quale capitale impiegato per 9 anni al 7.5% annuo nominale convertibile semestralmente ha generato un montante di 2500 euro.
- 4) Calcolare dopo quanto tempo il capitale di 1640 impiegato al 3% semestrale produce un montante di 2640,80.

Esercizi

5) Tre anni e due mesi fa, la signora Carli ha versato la somma di 3750 euro presso una banca che applica la capitalizzazione semestrale degli interessi al 4,5% semestrale. Oggi ritira il montante che reimpiega per altri due anni e otto mesi al tasso annuo nominale del 12% convertibile semestralmente. Quale somma ritirerà alla scadenza? A quale tasso annuo equivalente è risultato complessivamente impiegato il capitale iniziale?

Esercizi

6) Una persona può investire la somma di 3500 scegliendo tra:

- (op 1) un contratto finanziario che prevede la capitalizzazione degli interessi al 6% effettivo annuo
- (op 2) un contratto finanziario che prevede la capitalizzazione trimestrale al tasso 1,4674% trimestrale.

Determinare quale dei due contratti é più conveniente supponendo che l'operazione in ogni caso duri 4 anni.

Forza istantanea d'interesse

Posto j_m il tasso nominale annuo, cosa succede se mandiamo m all'infinito?

j_m diventa un tasso istantaneo cioè un tasso che rappresenta l'interesse istantaneo (base annua).

Sia

$$\lim_{m \rightarrow \infty} j_m = \delta$$

δ é definito **tasso (o forza) istantaneo d'interesse**

Come si determina δ ?

Forza istantanea d'interesse

Calcoliamo δ come limite di j_m quando m va a infinito

$$\lim_{m \rightarrow \infty} j_m = \lim_{m \rightarrow \infty} m i_m = \lim_{m \rightarrow \infty} m((1+r)^{\frac{1}{m}} - 1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1}{1/m}$$

Posto $\frac{1}{m} = x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+r)^x - 1}{x} = \frac{0}{0}$$

$\frac{0}{0}$ é una fomra indeterminata e possiamo applicare il Teorema di De l'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+r)^x \log(1+r)}{1} = \log(1+r) = \delta$$

Capitalizzazione continua

Suddividendo l'anno in periodi sempre piú piccoli e applicando via via la capitalizzazione mensile, settimanale, giornaliera, oraria e mandando m all'infinito si "ottiene" la capitalizzazione continua:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + i_m)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m = e^\delta$$

Il montante prodotto da un capitale C investito in capitalizzazione continua al tasso (istantaneo) δ per il tempo t é:

$$M = Ce^{\delta t}$$

Esempio

Data la forza d'interesse $\delta = 3\%$ calcolare

- il montante unitario prodotto in 2 anni

Soluzione: si usa la formula $M = Ce^{\delta t}$ con $C = 1$ e $t = 2$

$$M_2 = e^{\delta \cdot 2} = e^{0.03 \cdot 2} = 1.06183$$

- il tasso annuo effettivo equivalente

Soluzione: dato che $\delta = \log(1 + r)$ invertiamo rispetto ad r e si ha

$$r = e^{\delta} - 1 \approx 3.04\%$$

Formule inverse

Ricavare il capitale che nel tempo t al tasso δ ha prodotto il montante M

$$C = Me^{-\delta t}$$

Ricavare il tempo t che investendo un capitale C al tasso δ ha prodotto il montante M

$$t = \frac{1}{\delta} \log \left(\frac{M}{C} \right)$$

Ricavare il tasso δ che nel tempo t investendo un capitale C ha prodotto il montante M

$$\delta = \frac{1}{t} \log \left(\frac{M}{C} \right)$$

Esercizi

- 1) Calcolare il montante prodotto dopo due anni da un capitale di 2000 euro investito al tasso istantaneo di interesse del 9%.
- 2) Calcolare il tasso istantaneo di interesse equivalente al
 - 7% annuo
 - 5% semestrale
 - 10% nominale convertibile 4 volte l'anno

- 3) Calcolare il tasso semestrale equivalente al tasso istantaneo del 10%.
- 4) In quanto tempo un capitale di 700 euro investito al tasso istantaneo del 3% produce un interesse di 50 euro?
- 5) Se investo 1500 euro e dopo 2 anni ricevo 2300 quale tasso istantaneo di interesse ha prodotto tale investimento?
- 6) Volendo accantonare una cifra di 4000 euro in 4 anni e disponendo di un c/c che offre un tasso istantaneo di interesse del 12% quanto capitale va depositato oggi?

Esercizi di riepilogo

- 1) Investite 1000 euro per 20 mesi al tasso nominale 12% convertibile tre volte l'anno. Quale montante ricavate al termine? Alla fine di del periodo vi viene proposto di proseguire l'investimento per altri 2 anni, in alternativa potete depositare il ricavato in un c/c che paga in interesse semplice il 15%. Cosa é conveniente scegliere?
- 2) La banca A offre prestiti con pagamento della rata mensilmente e tasso nominale 6%. La banca B offre prestiti con pagamento della rata semestrale e tasso nominale 4%. Necessitando di un prestito a chi conviene rivolgersi?
- 3) Determinare il tasso di interesse composto annuo equivalente al tasso di interesse semplice dell'8% relativamente ad un impiego la cui durata é 3 anni e 5 mesi.

4) La somma di 3700 viene impiegata per sei anni ad interesse composto al tasso annuo del 7,75%. Quale tasso annuo dovrebbe essere applicato per avere lo stesso montante qualora l'investimento fosse fatto ad interesse semplice?

5) Ho impiegato la somma di 2000 dollari al tasso di interesse composto dell' 8% per una certa durata. Alla scadenza ho reinvestito subito al tasso d'interesse composto del 8.15% per 4 anni. Alla scadenza di questi 4 anni ho ritirato un montante complessivo di 3800 dollari. Determinare la durata del primo impiego.

6) La somma di 2000 é impiegata per 7 anni ad interesse composto al tasso del 6% una seconda somma di 2500 é impiegata anch'essa per 7 anni ad interesse composto ma al tasso del 5%. Supponendo che i due impieghi vengano unificati, determinare quale tasso dovrebbe essere applicato per avere lo stesso montante ad interesse composto. Si dica inoltre quale tasso dovrebbe essere applicato nel caso di unificazione, se l'impiego fosse fatto in capitalizzazione semplice.