MATEMATICA FINANZIARIA

Formulario

- Leggi di capitalizzazione.
  - Interessi semplici: $X_t = X_0(1+it)$
  - Interessi composti: $X_t = X_0(1+i)^t$
  - Interessi composti, con accredito degli interessi m volte per anno: $X_t = X_0(1+i_m)^{mt}$
  - Capitalizzazione continua degli interessi: $X_t = X_0 \exp(rt)$
- Rendite.
  - limitata, immediata, posticipata:

$$a_{n\urcorner i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad s_{n\urcorner i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

  - limitata, immediata, anticipata:

$$\ddot{a}_{n\urcorner i} = (1+i)a_{n\urcorner i} \qquad \ddot{s}_{n\urcorner i} = (1+i)s_{n\urcorner i}$$

  - perpetua, posticipata:

$$a_{\infty\urcorner i} = \frac{1}{i}$$

  - perpetua, anticipata:

$$\ddot{a}_{\infty\urcorner i} = \frac{1+i}{i}$$

- Duration di una operazione finanziaria $\{x_1, \dots, x_n\}|\{t_1, \dots, t_n\}$

$$D = \frac{\sum_{k=1}^n t_k x_k (1+i(0,t_k))^{-t_k}}{\sum_{k=1}^n x_k (1+i(0,t_k))^{-t_k}}$$

- Duration di una rendita limitata immediata posticipata

$$D = \frac{1+i}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}$$

- Prezzo e duration di un BTP con struttura dei tassi piatta

$$P = \frac{F}{(1+\frac{\lambda}{m})^n} + \frac{C}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{\lambda}{m})^n}\right) \qquad D = \frac{1+y}{my} - \frac{1+y+n(c-y)}{mc[(1+y)^n - 1] + my}$$

- Sensibilitá del prezzo rispetto a variazioni di tasso.
  Sia $V = \sum_{k=1}^n x_k(1+\lambda)^{-t_k}$, allora:

$$\frac{dV}{d\lambda} = -\frac{D}{1+\lambda}V$$

- Relazione tra tassi a pronti e a termine (assenza di arbitraggio):

$$v(t_0, t_2) = v(t_0, t_1)v(t_0, t_1, t_2)$$

- Tassi forward impliciti
  - in capitalizzazione annuale

$$f_{t_1,t_2} = \left(\frac{(1+s_{t_2})^{t_2}}{(1+s_{t_1})^{t_1}}\right)^{\frac{1}{(t_2-t_1)}} - 1$$

  - in capitalizzazione continua

$$f_{t_1,t_2} = \frac{s_{t_2}t_2 - s_{t_1}t_1}{(t_2 - t_1)}$$

- Un portafoglio $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ di n titoli é efficiente se soddisfa le equazioni

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_j - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0 \quad per \quad i = 1, 2, .., n$$
$$\sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i = \bar{r}$$
$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$