May 4, 2018

Esercizi

Esercizio 1

Un debito $S = 8000$ viene ammortizzato con il metodo francese in 8 rate annue al tasso $i = 16\%$ annuo. Pagata la quinta rata, si conviene di estinguere il debito residuo mediante 2 versamenti di importo Z pagabili dopo 3 e 6 anni al medesimo tasso dinteresse. Determinare importo debito residuo D_5 e determinare importo Z.

Soluzione

Ricordare formula delle rendite con P valore attuale, A ammontare rata

$$P = \frac{A}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

Applicare la stessa formula esplicitata rispetto ad A

$$A = \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}P$$

Nel nostro caso A l'ammontare della Rata R. Ricoradare che ammortamento francese ha rate costanti ossia $R_1 = R_2 = R_t$ per ogni t.

$$R_t = \frac{0.16\,(1+0.16)^8}{(1+0.16)^8 - 1}8000 \implies R_t = 1841.79$$

Ricordare relazioni fondamentali dell'ammoratamento e il fatto che $D_0 = S$ nel nostro caso

$$R_t = C_t + I_t$$
$$I_t = D_{t-1} \times i$$
$$D_t = D_{t-1} - C_t$$

Calcolare quota capitale C_t, quota interesse I_t, e debito residuo fino a $t = 5$

t_k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	8000
1	1841.79	561.79	1280	7438.21
2	1841.79	651.676	1190.11	6786.53
3	1841.79	755.945	1085.85	6030.59
4	1841.79	876.896	964.894	5153.69
5	1841.79	1017.2	824.591	4136.49

Soluzione= $D_5 = 4136.49$
Per calcolare importo Z impostare la seguente equazione

$$4136 = \frac{Z}{(1+0.16)^3} + \frac{Z}{(1+0.16)^6}$$

Risolvere rispetto a Z per trovare $Z = 3935.31$

Esercizio 2

In un piano di ammortamento a quota capitale costante il numero di rate é n, il debito iniziale D e la prima rata R_1. Determinare il tasso i e la seconda rata R_2. Dati: D = 2000, n = 24, $R_1 = 163,33$.

Soluzione

Ammortamento tipo Italiano con quota capitale costante ossia $C_1 = C_2 = C_t$ per ogni t

$$R_t = \frac{C}{t} + I_t$$

Le formule per calcolare quota interesse e debito residuo rimangono invariate rispetto all'ammortamento francese.

$$R_t = C_n + I_t$$

$$I_t = D_{t-1} \times i$$

$$D_t = D_{t-1} - C_t$$

Dalla formula di determinanzione della rata trovare il tasso i

$$163,33 = \frac{2000}{24} + 2000i$$

Si ha $i = 0.04$ o in termini percentuali 4%.
Si noti che $C_1 = C_2 = 83.33$
Determinare I_1 e D_1

$$I_1 = 2000 \times 0.04 \implies I_1 = 80$$

$$D_1 = 2000 - 83,33 = 1916.66$$

Determinare I_2 che sommato a C_2 costituisce la seconda rata R_2

$$I_2 = 1966.66 \times 0.04 \implies I_2 = 76,66$$

$$R_2 = C_2 + I_2 = 83.33 + 76,66 \implies R_2 = 160$$

Esercizio 3

Considerando un prestito di euro X al tasso nominale 8 %, durata 5 anni, rata mensile costante posticipata; calcolare il debito residuo dopo il pagamento della seconda rata. Dati:$X = 10000$

Soluzione

Scrivere formula rendita posticipata per trovare R, ammontare rata

$$R = \frac{\frac{0.08}{12}\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{60}}{\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{60}-1}10000 \implies R = 202.764$$

Data rata costante abbiamo tutti i dati per ricavare quota capitale, quota interesse e debito residuo. Ricoradare che dovendo calcolare rate mensili $i = \frac{0.08}{12}$ corrisponde a tasso mensile con durata di 1 mese

t_k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	10000
1	202.764	136.098	66.666	9863.902
2	202.764	137.004	65.759	9726.898

Esercizio 4

Si completi il seguente piano di ammortamento:

k	t_k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	0	0	0	5000
1	1		1000		
2	3				2341
3	6			369	

Soluzione

Possiamo ricavare queste informazioni

$$D_1 = D_0 - C_1 = 5000 - 1000 \implies D_1 = 4000$$

$$C_2 = D_1 - D_2 = 4000 - 2341 \implies C_2 = 1659$$

$$D_3 = 0 \implies C_3 = 2341$$

Il debito residuo alla scadenza é zero per definizione, quindi per questo $D_3 = 0$ Sicuramente non ammortamento italiano, data la successione delle quote capitali.

$$R_3 = C_3 + I_3 = 2341 + 369 \implies R_3 = 2710$$

Per proseguire é necessario ricavare il tasso di interesse; siccome ultima rata viene pagata dopo 3 anni dalla penultima si ha che

$$I_3 = D_2\left(1+i\right)^3 - D_2$$

$$i = \left(\frac{I_3}{D_2} + 1\right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$i = \left(\frac{369}{2341} + 1 \right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.05$$

A questo punto possiamo calcolare

$$I_1 = 5000 \times 0.05 = 250$$

La seconda rata viene pagata dopo un anno quindi

$$I_2 = D_1(1+i)^2 - D_1 = 4000 \times (1.05)^2 - 4000 = 410$$

Calcolare le rate mancanti

$$R_1 = C_1 + I_1 = 1000 + 250 \implies R_1 = 1250$$

$$R_2 = C_2 + I_2 = 1659 + 410 \implies R_2 = 2069$$

Esercizio 5

A quale tasso i bisogna impiegare per ulteriori 10 anni il valore finale di una rendita annuale posticipata di 10 rate di C euro ciascuna per ottenere un montante uguale al valore attuale di una rendita perpetua di uguale rata C?

Soluzione

Valore attuale rendita posticipata $\frac{C}{i}$
Montante rendita posticipata di 10 rate con rate costanti

$$M_{10} = C \times \frac{(1+i)^{10} - 1}{i}$$

il montante deve essere inpiegato per ulteriori 10 anni quindi $M_{10} \times (1+i)^{10}$
Abbiamo tutti gli elementi per impostare il problema

$$\frac{C}{i} = C \times \frac{(1+i)^{10} - 1}{i} \times (1+i)^{10}$$

Risolvere rispetto ad i per avere $i = 4.93\%$

Esercizio 6

Un debito D viene rimborsato rispetto a un tasso r con due rate di preammortamento e due rate a quota capitale costante. Determinare importo delle quattro rate. Determinare TIR operazione di rimborso. (considerare interessi capitalizzati annualmente e rate annue. D = 100, r = 10%)

Soluzione

Le due rate di preammoramento corrispondono semplicemente a pagare interessi sul debito contratto D, quindi il debito residuo rimane totalmente invariato con $D_0 = D_1 = D_2 = 100$

$$I_1 = I_2 = 100 \times 0.10 \implies I_1 = I_2 = 10$$

Dopo il pagamento della seconda rata di preammortamento possiamo passare a impostare l'ammoratamento italiano con le solite formule. Ammortamento tipo Italiano con quota capitale costante ossia $C_1 = C_2 = C_t$ per ogni t intero. In questo caso abbiamo che

$$\frac{C}{n} = \frac{100}{2} \implies C_3 = C_4 = 50$$

$$I_3 = 0.10 \times 100 \implies I_3 = 10$$

$$R_3 = \frac{C}{n} + I_3 = 50 + 10 \implies R_3 = 60$$

$$D_3 = D_2 - C_3 = 100 - 50 \implies D_3 = 50$$

$$I_4 = 0.10 \times 50 \implies I_4 = 5$$

$$R_4 = \frac{C}{n} + I_4 = 50 + 5 \implies R_4 = 55$$

$$D_4 = D_3 - C_4 = 50 - 50 \implies D_4 = 0$$

In definitiva il piano di ammortamento completo si scrive

t_k	C_k	I_k	R_k	D_k
0	0	0	0	100
1	0	10	10	100
2	0	10	10	100
3	50	10	60	50
4	50	5	55	0

per calcolare il tir operazione abbiamo

$$\frac{100}{(1+i)^0} = \frac{10}{(1+i)^1} + \frac{10}{(1+i)^2} + \frac{60}{(1+i)^3} + \frac{55}{(1+i)^4}$$

Risolvere rispertto i per trovare $i = \frac{1}{10}$ o in termini percentuali 10%.

Esercizio 7

Obbligazione con TAN = 7 % ha tasso di rendimento a scadenza 8 %. Lobbligazione quotata sopra o sotto la paritá? Motivare la risposta.

Soluzione

Il tasso cedolare é inferiore TIR, quindi sotto paritá

Esercizio 9

Unobbligazione con TAN = 8 % é quotata a 98 euro. Il suo yield to maturity é maggiore o minore di 8 %?

Soluzione

$P < F$ ossia il prezzo obbligazione é minore del valore nominale. Questo implica che il tasso di rendimento deve essere maggiore del 8 %.

Esercizio 10

Ho investito 5000 euro in un titolo con yield to maturity del 5 % e Duration D = 10 anni. Se lo yield to maturity aumenta di 10 punti base (cioé 0.1%), cosa accadrá, approssimativamente, al valore del mio investimento?

$$D_M = D \times \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{-1}$$

Nel nostro caso la duration modifcata sará

$$D_M = 10 \times (1 + 0.05)^{-1} = 9.5238$$

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} = -D_M P$$

Usando approssimazione che $\frac{\partial P}{\partial \lambda} \approx \frac{\Delta P}{\Delta \lambda}$ la formula per calcolare variazione di prezzo rispetto alla variazione di yield

$$\Delta P = -D_M \times P \times \Delta\lambda = -9.5238 \times 5000 \times \frac{0.1}{100} \implies \Delta P = -47.619$$

Il nuovo prezzo é dato da

$$P = 5000 - 47.619 \implies P = 4952.38$$