

### Esercizio sulla costruzione di portafogli immunizzati rispetto ad una traslazione della curva dei tassi spot

Siano presenti sul mercato tre tipi di zero coupon bond dalle caratteristiche:

- a) Scadenza un anno e prezzo a pronti  $P_1 = 98.63\text{€}$ .
- b) Scadenza due anni e prezzo  $P_2 = 97.15\text{€}$ .
- c) Scadenza tre anni e prezzo  $P_3 = 95.31\text{€}$ .

Calcolare la struttura a termine definita dagli ZCB e costruire, dovendo rimborsare un debito di  $1000\text{€}$  tra due anni, un portafoglio immunizzato, con gli ZCB di tipo a) e c), rispetto ad una traslazione della curva dei tassi spot.

Svolgimento

La curva dei tassi spot si calcola facilmente; poiché

$$i(0, t) = \left( \frac{VN}{P} \right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

allora

$$i(0, 1) = \frac{100}{98.63} - 1 \cong 1.389\%$$

$$i(0, 2) = \left( \frac{100}{97.15} \right)^{1/2} - 1 \cong 1.456\%$$

$$i(0, 3) = \left( \frac{100}{95.31} \right)^{1/3} - 1 \cong 1.614\%$$

A questo punto scriviamo le due equazioni che permettono di calcolare le componenti ( degli ZCB a) e c) ) del portafoglio immunizzato ( rispetto ad una traslazione della curva dei tassi spot ).

$$\begin{cases} V_A + V_C = V_U \\ \frac{V_A}{V_U} D_Q^A + \frac{V_C}{V_U} D_Q^C = D_Q^U \end{cases}$$

ove  $D_Q^A$ ,  $D_Q^C$ ,  $D_Q^U$  sono le duration quasi modificate degli ZCB e dell'uscita tra 2 anni.  $V_U$  é il valore attuale dell'uscita che é pari a :

$$V_U = \frac{1000}{(1 + i(0, 2))^2} = 971.5$$

mentre

$$D_Q^A = (1 + i(0, 1))^{-1} \cong 0.986, \quad D_Q^C = 3(1 + i(0, 3))^{-1} \cong 2.952, \quad D_Q^U = 2(1 + i(0, 2))^{-1} \cong 1.971$$

Sostituendo nel sistema otteniamo:

$$\begin{cases} V_A + V_C = 971.5 \\ \frac{V_A}{971.5} 0.986 + \frac{V_C}{971.5} 2.952 = 1.971 \end{cases}$$

Le cui soluzioni sono:  $V_A = 484.7$   $V_B = 486.7$  e dunque le quote:  $q_A = V_A/P_A \cong 4.92$ ,  $q_C = V_C/P_C \cong 5.11$  ;quindi acquisteremo 5 quote di entrambi gli ZCB.

□