Dimostrazione della formula della duration di Macaulay per le obbligazioni (formula 3.3 del testo).

Partiamo dalla definizione di duration di Macaulay:

$$Duration = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k \frac{k}{m} \left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{-k}}{\sum_{k=1}^{n} C_k \left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{-k}} = \frac{1}{m}\frac{\sum_{k=1}^{n} C_k k \left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{-k}}{\sum_{k=1}^{n} C_k \left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{-k}} =$$

stiamo valutando la duration di una obbligazione, per cui, se F é il valore nominale dell'obbligazione e c é il tasso cedolare , si avrá $C_k = Fc$ per $k < n$ e $C_n = F + Fc$. Ponendo $v = \left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{-1}$, si ottiene

$$= \frac{1}{m}\frac{\sum_{k=1}^{n} ckv^k + nv^n}{\sum_{k=1}^{n} cv^k + v^n}$$

D'altronde

$$\sum_{k=1}^{n} ckv^k = c\sum_{k=1}^{n} kv^k$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} kv^k = v\frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}$$

Come si prova derivando la $f(v) = \sum_{k=1}^{n} v^k$. Dunque

$$\sum_{k=1}^{n} ckv^k = cv\frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2} = cv\frac{(1+v^n(nv-n-1))}{(1-v)^2}$$

inoltre

$$c\sum_{k=1}^{n} v^k = cv\frac{v^n-1}{v-1}.$$

Quindi, sostituendo

$$Duration = \frac{1}{m}\frac{cv\frac{(1+v^n(nv-n-1))}{(1-v)^2} + nv^n}{cv\frac{v^n-1}{v-1} + v^n} = \frac{1}{m}\frac{\frac{cv(1+v^n(nv-n-1))+nv^n(1-v)^2}{(1-v)^2}}{\frac{cv(v^n-1)+(v-1)v^n}{v-1}} =$$

$$= \frac{1}{m}\frac{cv\left(1+v^n(nv-n-1)\right)+nv^n(v-1)^2}{\left(cv(v^n-1)+(v-1)v^n\right)(v-1)} =$$

sviluppando il quadrato, aggiungendo e togliendo $v^n(1-v)$ al numeratore, si ottiene

$$\frac{1}{m}\frac{cv(1-v^n)+v^n(1-v)-(1-v)v^n(1+nv(1+c)-n)}{(1-v)(cv(1-v^n)+v^n(1-v))} =$$

$$\frac{1}{m}\frac{cv(1-v^n)+v^n(1-v)-(1-v)v^n(1+nv-n+ncv)}{(1-v)(cv(1-v^n)+v^n(1-v))} =$$

$$\frac{1}{m}\frac{cv(1-v^n)+v^n(1-v)-(cnv^{n+1}+v^n(1+nv-n))(1-v)}{(1-v)(cv(1-v^n)+v^n(1-v))} =$$

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{1-v} - \frac{v^n+nv^{n+1}+ncv^{n+1}-nv^n}{cv(1-v^n)+v^n(1-v)}\right) =$$

dividendo numeratore e denominatore del secondo addendo in parentesi per v^{n+1}, si ha

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{v^{-1}}{v^{-1}-1} - \frac{v^{-1}+n(1+c-v^{-1})}{c(v^{-n}-1)+(v^{-1}-1)}\right) =$$

$$= \frac{v^{-1}}{m(v^{-1}-1)} - \frac{v^{-1}+n(1+c-v^{-1})}{mc(v^{-n}-1)+m(v^{-1}-1)} =$$

d'altronde $1+\frac{\lambda}{m} = \frac{1}{v}$ quindi

$$= \frac{1+\frac{\lambda}{m}}{m\frac{\lambda}{m}} - \frac{1+\frac{\lambda}{m}+n\left(c-\frac{\lambda}{m}\right)}{mc\left(\left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^n-1\right)+m\frac{\lambda}{m}}.$$

Usando le stesse notazioni del testo $\frac{\lambda}{m} = y$ dunque

$$\frac{1+y}{my} - \frac{1+y+n\,(c-y)}{mc\,((1+y)^n-1)+my}$$

$\square$