## Portafoglio a Varianza Minima con 2 titoli

Stiamo valutando la possibilitá di investire 50000 euro per un mese in due titoli azionari, con le seguenti caratteristiche (base mensile):

$$A : r_A = 3\% \qquad \sigma_A = 15\%$$

$$B : r_B = 4\% \qquad \sigma_B = 20\%$$

$$\rho_{AB} = -0,1$$

1. Dire, senza fare alcun conto, se c'é effetto diversificazione anche senza vendite allo scoperto.
2. Calcolare la composizione del portafoglio a varianza minima PVM, il suo rendimento e la sua varianza.
3. Esiste un portafoglio mix di A e B con rendimento 20 %? Se sí, calcolarne la composizione.
4. Disegnare nel piano volatilitá-media un grafico approssimativo dei portafogli possibili, riportando A,B, il PVM ed evenentualmente il portafoglio al punto precedente. Evidenziare la frontiera efficiente[1].

## Soluzione

L'effetto diversificazione si verifica quando é possibile costruire un portafoglio che abbia volatilitá minore di quelle dei titoli che lo costituiscono. Partiamo da costruire l'indice di volatilitá dei titoli in questo caso che é $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho} = min\left[\frac{\sigma_A}{\sigma_B}, \frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right]$$

$$\bar{\rho} = min\left[\frac{15\%}{20\%}, \frac{20\%}{15\%}\right]$$

**Se la vendita allo scoperto non é ammessa** si ha diversificazione quando il coefficiente di correlazione tra i due titoli $\rho$ é minore di $\bar{\rho}$

$$\rho < \bar{\rho} \implies diversificazione \tag{1}$$

**Se la vendita allo scoperto non é ammessa** e il coefficiente di correlazione dei due titoli $\rho$ é maggiore o uguale di $\bar{\rho}$

$$\rho \geq \bar{\rho} \implies no - diversificazione \tag{2}$$

non si puó diversificare.
Il portafoglio di varianza minima (PMV) in questo caso é dato dall'investire tutto il capitale nel titolo meno rischioso ossia avrete $w = 1$ e $(1 - w)$=0.

[1] Fate i grafici da soli ogni volta che vedete riferimento a grafici per meglio visualizzare cosa succede

1. Nel nostro caso, non bisogna fare i calcoli poiché $\rho$ dato é di segno negativo mentre a prescindere dal valore di $\bar{\rho}$ il segno é positivo. Quindi abbiamo diversificazione.

2. Partiamo dalla formula della varianza di un portafoglio $\sigma_P^2$, composta da due titoli A e B:

$$\sigma_P^2 = w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B$$

Riscrivete la relazione della varianza come funzione di $w$ piú esplicitamente per avere $\sigma^2 = f(w)$

$$\sigma^2 = w^2\left(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B\right) + 2\left(\rho\sigma_A\sigma_B - \sigma_B^2\right)w + \sigma_B^2 \equiv aw^2 + bw + c$$

Come vedete $\sigma^2 = f(w)$ é una parabola convessa nel piano $(w, \sigma^2)$, e il vertice della parabola é il punto che ha ordinata (varianza) minima. Bisogna quindi ricordarsi come calcolare coordinate di un vertice della parabola: $V = (-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a})$ Consideriamo l'ascissa del vertice nel nostro caso riferito alla formula e avremo

$$w_{vertice} = \frac{\sigma_B^2 - \rho\sigma_A\sigma_B}{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B)} \tag{3}$$

Se $0 < w_{vertice} < 1$ il vertice é la soluzione, ossia é il $w$ che assicura al portafoglio la varianza minima. Questo si verifica se e solo se la correlazione $\rho < min\left[\frac{\sigma_A}{\sigma_B}, \frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right] := \bar{\rho} \leq 1$ Dato che esiste la possibilitá di diversificazione, investendo in $w_{vertice}$ ci assicuriamo una varianza inferiore a $\sigma_A^2$ e $\sigma_B^2$ .
Nel nostro caso

$$w_{vertice} = \frac{(0.20)^2 - (-0.1) \times 0.15 \times 0.20}{(0.15)^2 + (0.20)^2 - 2 \times (-0.1) \times (0.15) \times (0.20)} = 0.6277$$

$$1 - w_{vertice} = 1 - 0.6277 = 0.3723$$

Nel caso di n=2 la varianza del portafoglio a varianza mininima é

$$\sigma_{PVM}^2 = \sigma_{w,vertice}^2 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{\sigma_A^2\sigma_B^2(1-\rho^2)}{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B)}$$

Nel nostro caso

$$\sigma_{PVM}^2 = \frac{(0.15)^2 \times (0.20)^2 \times (1 - (-0.1)^2)}{(0.15)^2 + (0.20)^2 - 2 \times (-0.1) \times (0.15) \times (0.20)} = 0.0130073$$

Il rendimento del potafoglio é semplicemente dato da:

$$R_{PVM} = w_{PVM}(r_A) + (1 - w_{PVM})(r_B) \implies 0,6277(0.03) + (1 - 0,6277)(0.04) = 0.033723$$

3. Se esiste, il portafoglio che dia un rendimento del 20 %, sará la soluzione della seguente equazione

$$0.2 = w(0.03) + (1 - w)0.04$$

Risolvere rispetto a $w$ per ottenere $w = -16$ e $1 - w = 17$. Quindi condizione necessaria affinché esista il portafoglio é che **sia ammessa la vendita allo scoperto**

## Portafoglio a varianza minima con 2 titoli ed effetto diversificazione

Considerare due titoli azionari con le seguenti caratteristiche (base mensile):

$$A : r_A = 5\% \qquad \sigma_A = 10\%$$

$$B : r_B = 4\%; \qquad \sigma_B = 20\%$$

$$\rho_{A,B} = 0,6$$

- Determinare il PVM senza vendite allo scoperto.
- Determinare il PVM ammettendo vendite allo scoperto.
- Dire se é possibile ottenere un portafoglio P mix di A e B con $r = 3\%$ e $\sigma_P = 15\%$.

### Soluzione

- Consideriamo il caso di non ammissibilitá di vendite allo scoperto Calcoliamo $\bar{\rho}$
$$\bar{\rho} = min\left[\frac{\sigma_A}{\sigma_B}, \frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right] = min\left[\frac{10\%}{20\%}, \frac{20\%}{10\%}\right]$$
In questo caso abbiamo un valore di $\bar{\rho} = 0.5$.
Poiché $\rho > \bar{\rho}$ abbiamo che non si puó diversificare e quindi **il portafoglio di minima varianza é il portafoglio che investe tutto il capitale nel titolo meno rischioso**. Indicando con $w$ la frazione di capitale investita nel titolo A e $1 - w$ quella investita in B, il PMV é $w = 1$ del titolo A e $1 - w = 0$ del titolo B.

- Quando **le vendite allo scoperto sono ammissibili** abbiamo che la diversificazione é sempre possibile. Il portafoglio a varianza minima corrisponde alle solite formule dove
$$w_{PVM} = \frac{\sigma_B^2 - \rho\sigma_A\sigma_B}{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B)}$$

Sostituendo i valori abbiamo che $w_{PVM}$

$$w_{PVM} = \frac{-0.6 \times 0.10 \times 0.20 + (0.20)^2}{(0.10)^2 + (0.20)^2 - 2 \times 0.6 \times 0.10 \times 0.20} = 1.0769$$

Quindi abbiamo $w_{PVM} = 1.0769$ e $1 - w_{PVM} = -0.0769231$

- Se esiste, il portafoglio che dará come rendimento $r = 3\%$ dovrá risolvere la seguente equazione:

$$0.03 = w(0.05) + (1 - w)(0.04)$$

Risolvere per ottenere $w = -1$ e $1 - w = 2$
Calcoliamo la varianza del portafoglio con $w = -1$ e $1 - w = 2$

$$\sigma_P^2 = w^2 \times \sigma_A^2 + (1 - w)^2 \times \sigma_B^2 + 2\rho \times w \times \sigma_A \times (1 - w) \times \sigma_B$$

$$\sigma_P^2 = w^2\sigma_A^2 + (1 - w)^2\sigma_B^2 + 2\rho w\sigma_A(1 - w)\sigma_B$$

Sostituendo valori avete

$$(-1)^2 \times (0.10)^2 + (2)^2 \times (0.20)^2 + 2 \times (0.6) \times (-1) \times (0.10) \times (2) \times (0.20) = 0.122$$

poiché 0.122 é diverso dalla volatilitá richiesta di $\sigma_p = (0.15)^2$ ovviamente non possiamo costruire il portafoglio richiesto con $r = 0.03$ e $\sigma_P = 0.15$.

## PVM con 3 Titoli

Sul mercato sono disponibili tre titoli con le seguenti caratteristiche:

- Rendimenti attesi $r_A = 18\%$, $r_B = 21\%$, $r_C = 30\%$
- Volatilitá $\sigma_A = 20\%$, $\sigma_B = 25\%$, $\sigma_C = 28\%$
- Correlazioni $\rho_{AB} = 0.5$, $\rho_{AC} = 0.5$, $\rho_{BC} = 0.7$.

1. Determinare i portafogli di minima varianza considerando portafogli mix di 2 titoli per volta , assumendo sia possibile vendere allo scoperto, e riportarli nel piano media varianza. Dopo aver disegnato un grafico qualitatativo della frontiera, evidenziare la frontiera efficiente.
2. Calcolare la matrice delle covarianze dei rendimenti dei 3 titoli.
3. Trovare il portafoglio a varianza minima che investe in tutti e 3 i titoli.
4. Detereminare rendimenti attesi e volatilitá dei portafogli $P_1$e $P_2$ con allocazioni percentuali della ricchezza dati

   $w^1 = \begin{pmatrix} 25\% \\ 50\% \\ 25\% \end{pmatrix}$ $w^2 = \begin{pmatrix} 30\% \\ 35\% \\ 35\% \end{pmatrix}$

## Soluzione

1. Consideriamo i titoli a coppie di 2, titoli A e B per iniziare. Data la possibilitá di vendita allo scoperto, sappiamo che sicuramente sará possibile diversificare, quindi usiamo le solite formule per determinare $w_{PVM}$ e $1 - w_{PVM}$.

$$w_{1,PVM} = \frac{\sigma_B^2 - \rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B)} = \frac{0.25^2 - 0.5 \times 0.2 \times 0.25}{0.2^2 + 0.25^2 - 2 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.25} = 0.7143$$

Rendimento portafoglio é

$$r_{A,B} = 0.2857 \times 0.21 + 0.7143 \times 0.18 = 18.85\% \tag{4}$$

mentre la varianza sará data da

$$\sigma_{1,PVM}^2 = \frac{\sigma_A^2\sigma_B^2(1 - \rho_{A,B}^2)}{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B)} = \frac{0.2^2 \times 0.25^2 \times (1 - 0.5^2)}{0.2^2 + 0.25^2 - 2 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.25} = 0.0357$$

quindi la volatilitá é $\sigma_{1,PVM} = \sqrt{0.0357} = 18.89\%$
Procediamo con lo stesso ragionamento per le altre due possibile coppie ossia AC e BC.

$$w_{2,PVM} = \frac{\sigma_C^2 - \rho_{A,C}\sigma_A\sigma_C}{(\sigma_A^2 + \sigma_C^2 - 2\rho_{A,C}\sigma_A\sigma_C)} = \frac{0.28^2 - 0.5 \times 0.2 \times 0.28}{0.2^2 + 0.28^2 - 2 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.28} = 0.807$$

Rendimento portafoglio é

$$r_{2,PVM} = 0.807 \times 0.18 + 0.193 \times 0.30 = 20.3\%$$

mentre la varianza sará data da

$$\sigma_{2,PVM}^2 = \frac{\sigma_A^2\sigma_C^2(1 - \rho_{A,C}^2)}{(\sigma_A^2 + \sigma_C^2 - 2\rho_{AC}\sigma_A\sigma_C)} = \frac{0.2^2 \times 0.28^2 \times (1 - 0.5^2)}{0.2^2 + 0.28^2 - 2 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.28} = 0.0377$$

Quindi la volatilitá é $\sigma_{2,PVM} = \sqrt{0.0377} = 19.4\%$
Consideriamo la terza possible combinazione

$$w_{3,PVM} = \frac{\sigma_C^2 - \rho_{B,C}\sigma_B\sigma_C}{(\sigma_B^2 + \sigma_C^2 - 2\rho_{B,C}\sigma_B\sigma_C)} = \frac{0.28^2 - 0.7 \times 0.25 \times 0.28}{0.25^2 + 0.28^2 - 2 \times 0.7 \times 0.25 \times 0.28} = 0.685$$

Rendimento portafoglio é

$$r_{3,PVM} = 0.685 \times 0.21 + 0.315 \times 0.30 = 0.238\%$$

mentre la varianza sará data da

$$\sigma_{3,PVM}^2 = \frac{\sigma_B^2\sigma_C^2(1 - \rho_{B,C}^2)}{(\sigma_B^2 + \sigma_C^2 - 2\rho_{BC}\sigma_B\sigma_C)} = \frac{0.25^2 \times 0.28^2 \times (1 - 0.7^2)}{0.25^2 + 0.28^2 - 2 \times 0.7 \times 0.25 \times 0.28} = 0.05825$$

quindi la volatilitá é data da $\sigma_{3,PVM}^2 = \sqrt{0.05825} = 24.1\%$

2. Troviamo matrice covarianza

$$Cov_{A,B} = \rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B = 0.5 \times 0.20 \times 0.25 = 0.025$$

$$Cov_{A,C} = \rho_{A,C}\sigma_A\sigma_C = 0.5 \times 0.20 \times 0.28 = 0.028$$

$$Cov_{B,C} = \rho_{B,C}\sigma_B\sigma_C = 0.7 \times 0.25 \times 0.28 = 0.049$$

La matrice delle covarianze quindi é data da

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.025 & 0.028 \\ 0.025 & 0.0625 & 0.049 \\ 0.028 & 0.049 & 0.0784 \end{pmatrix}$$

3. Partendo dalla minimizzazione di una Lagrangiana apposita, si dimostra che il portafoglio di varianza minima é dato da

$$w_{PMV} = \frac{\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{1}}}{\overline{\mathbf{1}}^T\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{1}}}$$

dove $\Sigma^{-1}$ é l'inversa della matrice varianza-covarianza, dove $\overline{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Procediamo al calcolo della matrice inversa data da $\Sigma^{-1}$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 35.42 & -8.33 & -7.44 \\ -8.33 & 33.33 & -17.86 \\ -7.44 & -17.86 & 26.57 \end{pmatrix}$$

Facendo i calcoli avrete che le percentuali di capitale investite nei due titoli sono dati da

$$w_{PVM} = \begin{pmatrix} 70.03\% \\ 25.45\% \\ 4.52\% \end{pmatrix}$$

4. Dati i pesi $w_1$ e $w_2$ si calcoli il rendimento e la varianza del portafoglio. Iniziamo con considerare

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

$$r_1 = \mathbf{w_1^T r} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.21 \\ 0.3 \end{pmatrix} = 22.5\%$$

$$\sigma_1^2 = \mathbf{w_1^T \Sigma w_1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.04 & 0.025 & 0.028 \\ 0.025 & 0.0625 & 0.049 \\ 0.028 & 0.049 & 0.0784 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} = 0.045$$

Consideraimo ora il vettore $w_2 = \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.35 \\ 0.35 \end{pmatrix}$

$$r_2 = \mathbf{w_2^T r} = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.35 & 0.35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.21 \\ 0.3 \end{pmatrix} = 23.25\%$$

$$\sigma_2^2 = \sigma_1^2 = \mathbf{w_2^T \Sigma w_2} = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.35 & 0.35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.04 & 0.025 & 0.028 \\ 0.025 & 0.0625 & 0.049 \\ 0.028 & 0.049 & 0.0784 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.35 \\ 0.35 \end{pmatrix} = 0.04399$$

## Determinazione del PVM con 3 titoli

Sono dati tre titoli rischiosi A,B,C i cui rendimenti hanno distribuzione di probabilitá:

$$R_A = (+15\%; -10\%)/(0.8; 0.2)$$
$$R_B = (+10\%; -5\%)/(0.6; 0.4)$$
$$R_B = (+12\%; -10\%)/(0.7; 0.3)$$

1. Determinare i rendimenti attesi e le volatilità dei tre titoli.
2. Se i titoli hanno tutti lo stesso coefficiente di correlazione $\rho$, per quali valori di $\rho$ il portafoglio $(35\%, 40\%, 25\%)$ ha volatilitá 8%?
3. Assumiamo ora che i coefficienti di correlazione tra i rendimenti dei titoli siano $\rho_{AB} = 0.4$ $\rho_{AB} = 0.6$ $\rho_{BC} = 0.8$. Determinare il portafoglio di minima varianza e calcolare il suo rendimento atteso e la sua volatilitá.
4. Le azioni oggi hanno prezzi $S_A(0) = 15$, $S_B(0) = 11.3$ $S_C(0) = 18.5$. Quante quote del titolo A,B,C ci sono nel portafoglio di varianza minima?

## Soluzione

1. Iniziamo con calcolare i rendimenti, le volatilitá, la varianza di ciascuno dei tre titoli.

   $r_A = 0.15\times0.8 - 0.1\times0.2 = 0.1 \qquad \sigma_A = \sqrt{(0.15^2 \times 0.8 + 0.1^2 \times 0.2) - 0.1^2} = 0.1$

   $r_B = 0.1\times0.6 - 0.05\times0.4 = 0.02 \qquad \sigma_B = \sqrt{(0.1^2 \times 0.6 + 0.05^2 \times 0.4) - 0.02^2} = 0.081$

   $r_C = 0.12\times0.7 - 0.1\times0.3 = 0.054 \qquad \sigma_C = \sqrt{(0.12^2 \times 0.7 + 0.1^2 \times 0.3) - 0.054^2} = 0.10$

2. Assumiamo che tutti i titoli abbiano coefficiente di correlazione $\rho$. Il portafoglio P con percentuali (35 % 40% 25% ) ha varianza

$$\sigma_P^2 = 0.35^2 \times 0.1^2 + 0.4^2 \times 0.081^2 + 0.25^2 \times 0.10^2 +$$
$$+2\rho(0.35\times0.1\times0.4\times0.081+0.35\times0.1\times0.25\times0.1+0.04\times0.081\times0.25\times0.1)$$

Sapendo che la varianza de portafoglio P deve essere uguale a $0.08^2$ abbiamo

$$0.08^2 = 0.0029098 + 0.00566\rho$$

Risolvendo l'equazione rispetto a $\rho$ avremo $\rho$=0.618;

3. Il portafoglio di varianza minima (PVM) é sempre dato dalla solita formula, a partire dalla matrice delle varianze/covarianze nel caso in cui $\rho_{A,B} = 0.4$ $\rho_{A,C} = 0.6$, $\rho_{B,C} = 0.8$

$$\sigma_A^2 = 0.1^2 = 0.01 \qquad \sigma_B^2 = 0.081^2 = 0.0066 \qquad \sigma_C^2 = 0.10^2 = 0.010164$$

$$Cov_{A,B} = \rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B = 0.4 \times 0.1 \times 0.081 = 0.00324$$
$$Cov_{A,C} = \rho_{A,C}\sigma_A\sigma_C = 0.6 \times 0.01 \times 0.10 = 0.00806$$
$$Cov_{B,C} = \rho_{B,C}\sigma_B\sigma_C = 0.8 \times 0.081 \times 0.10 = 0.0049$$

La matrice delle covarianze quindi é data da

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.00324 & 0.00806 \\ 0.00324 & 0.0066 & 0.0049 \\ 0.00806 & 0.0049 & 0.010164 \end{pmatrix}$$

La matrice inversa $\Sigma^{-1}$ é data da

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 262 & 29.4 & -212.8 \\ 29.4 & 234 & -130.5 \\ -212.8 & -130.5 & 316.5 \end{pmatrix}$$

$$w_{PMV} = \frac{\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{1}}}{\overline{\mathbf{1}}^T\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{1}}}$$

La formula per la varianza del PVM é data da:

$$\sigma_{PMV}^2 = w_{PVM}^T \times \Sigma \times w_{PVM} = \frac{1}{\overline{\mathbf{1}}^T\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{1}}}$$

Il rendimento atteso $R_{PVM}$ é

$$R_{PVM} = \mathbf{r}^T w_{PVM} = \frac{1}{\overline{\mathbf{1}}^T\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{1}}} \times r^T\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{1}}$$

dove $r^T$ é la trasposta del vettore dei rendimenti $r$ .
Applicando la formula avrete che

$$w_{PVM} = \begin{pmatrix} 42.55\% \\ 71.95\% \\ -14.50\% \end{pmatrix}$$

il rendimento del portafoglio a varianza minima é

$$r = 0.4255 \times 0.1 + 0.7195 \times 0.02 - 0.145 \times 0.0054 = 0.0491$$

Mentre la volatilitá é pari a 7.3 %

4. Sia V il capitale iniziale, il numero di quote A, B, C nel portafoglio di varianza minima é dato da

$$q_A = \frac{V0.4255}{15} = 0.028366V$$

$$q_B = \frac{V0.7195}{11.3} = 0.063672V$$

$$q_C = -\frac{V0.0145}{18.5} = -0.007838V$$

## Teorema dei due fondi

In un mercato con 3 titoli, con tassi di rendimento attesi $r_1 = 20\%$ $r_2 = 10\%$ $r_3 = 40\%$ si sa che i portafogli $w_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ sono efficienti. Trovare il porafoglio efficiente che ha rendimento atteso r=30 %

## Soluzione

Per il teorema dei due fondi ogni possibile portafoglio é dato da

$$\widehat{w} = (\alpha w^1, (1-\alpha)w^2)$$

imponendo il rendimento di questo portafoglio sia $r = 0.30$. Indichiamo con $w^1_{1,1}$ dove l'apice indica il vettore mentre il pedice indica il componente del vettore.

$$r = (\alpha w^1_{1,1} + (1-\alpha)w^2_{1,1})r_1 + (\alpha w^1_{2,1} + (1-\alpha)w^2_{2,1})r_2 + (\alpha w^1_{3,1} + (1-\alpha)w^2_{3,1})r_3 =$$
$$0.3 = (\alpha 0.5 + (1-\alpha)\frac{1}{3}) \times 0.2 + ((1-\alpha)\frac{1}{6}) \times 0.1 + (\alpha 0.5 + (1-\alpha)0.5) \times 0.4$$

da cui si ottiene che $\alpha = -1$. Dunque si ottiene che il portafoglio atteso con r=30% é dato da $\hat{w} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

## Frontiera efficiente: Markowitz

Dati 3 titoli con rendimento medio $r_1 = 4\%$, $r_2 = 5\%$, $r_3 = 7\%$ e matrice di varianza covarianza

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trovare il portafoglio efficente con rendimento 6%

## Soluzione

Impostiamo la Lagrangiana per trovare i pesi $w_i$ che assicurano l'esistenza del portafoglio efficiente con rendimento 6%. Implicitamente stiamo assumendo che la somma dei pesi sia pari a 1, e **la vendita allo scoperto é ammessa.**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3, \lambda, \mu) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} w_i w_j \sigma_{ij} - \lambda(\sum_{i=1}^{3} w_i r_i - r) - \mu(\sum_{i=1}^{3} w_i) = \\ &= \frac{1}{2}(w_1 w_1 \sigma_{11} + w_1 w_2 \sigma_{12} + w_1 w_3 \sigma_{13} + w_2 w_2 \sigma_{22} + w_2 w_1 \sigma_{21} + \\ &\quad + w_2 w_3 \sigma_{23} + w_3 w_3 \sigma_{33} + w_3 w_1 \sigma_{31} + w_3 w_2 \sigma_{32}) - \\ &\quad - \lambda(w_1 r_1 + w_2 r_2 + w_3 r_3 - r) - \mu(w_1 + w_2 + w_3 - 1) \end{aligned} \tag{5}$$

Siccome dobbiamo determinare i pesi da associare al portafoglio
efficiente con un rendimento dato, minimizzando la varianza differenziamo la langrangiana rispetto a $w_i$ e rispetto a $\lambda$ e $\mu$. Differffenziamo la lagrangiana rispetto a $w_1, w_2, w_3, \lambda, \mu$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_1} == -\mu - \lambda r_1 + \frac{1}{2}(2w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_{12} + w_3\sigma_{13} + w_2\sigma_{21} + w_3\sigma_{31}) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_2} = -\mu - \lambda r_2 + \frac{1}{2}(2w_2\sigma_2^2 + w_1\sigma_{12} + w_1\sigma_{21} + w_3\sigma_{23} + w_3\sigma_{32}) = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_3} = -\mu - \lambda r_3 + \frac{1}{2}(2w_3\sigma_2^2 + w_1\sigma_{13} + w_2\sigma_{23} + w_1\sigma_{31} + w_2\sigma_{32}) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = w_1 r_1 + w_2 r_2 + w_3 r_3 - r = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = w_1 + w_2 + w_3 - 1 = 0 \tag{10}$$

Mettiamo a sistema le condizioni del primo ordine e risolviamo il sistema. Vedasi piú esplicitamente avanti. Iniziamo a sostituire i dati per il nostro problema nella lagrangiana, successivamente calcoliamo le derivate parziali e risolviamo il sistema. Abbiamo quindi:

$$\mathcal{L}(w_1, w_2, w_3, \lambda, \mu) = w_1^2 \times (1) + w_2^2 \times 2 + w_2 w_3 \times 1+$$
$$+ w_3^2 \times 3 + w_3 w_2 \times 1 - \lambda(w_1 0.04 + w_2 0.05 + w_3 0.07 - 0.06) - \mu(w_1 + w_2 + w_3 - 1) \tag{11}$$

Calcoliamo le derivate parziali :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_1} = -0.04\lambda - \mu + w_1 = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_2} = -0.05\lambda - \mu + \frac{1}{2}(4w_2 + 2w_3) = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_3} = -0.07\lambda - \mu + \frac{1}{2}(2w_2 + 6w_3) = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (w_1 0.04 + w_2 0.05 + w_3 0.07 - 0.06) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = (w_1 + w_2 + w_3 - 1) = 0 \tag{16}$$

Risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} -0.04\lambda - \mu + w_1 = 0 \\ -0.05\lambda - \mu + \frac{1}{2}(4w_2 + 2w_3) = 0 \\ -0.07\lambda - \mu + \frac{1}{2}(2w_2 + 6w_3) = 0 \\ (w_1 0.04 + w_2 0.05 + w_3 0.07 - 0.06) = 0 \\ (w_1 + w_2 + w_3 - 1) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Per risolvere questo sistema in 3+2 incognite iniziamo sempre a esprimere i $w_i$ in funzione di $\lambda$ e $\mu$

$$\begin{cases} w_1 = 0.04\lambda + \mu \\ w_2 = 0.016\lambda + 0.4\mu \\ w_3 = 0.0179\lambda + 0.199\mu \end{cases} \tag{18}$$

Inseriamo i $w_i$ cosí determinati all'interno dell'equazione dei due vincoli:

$$\begin{cases} (0.04\lambda + \mu) \times 0.04 + (0.016\lambda + 0.4\mu) \times 0.05 + (0.0179\lambda) + 0.199\mu) \times 0.07 = 0.06 \\ 0.04\lambda + \mu + 0.016\lambda + 0.4\mu + 0.0179\lambda + 0.199\mu = 1 \end{cases} \tag{19}$$

Risolvere il sistema dei vincoli rispettto a $\lambda$ e $\mu$ per avere $\lambda = 57.8947$, $\mu = -2.05263$. Sostituire i valori cosí ottenuti per deteminare i pesi $w_1 = 0.263158, w_2 = 0.105263, w_3 = 0.631579$

## Efficienza dei titoli di un portafoglio

Dati tre titoli con rendimento medio $r_1 = 4\%$, $r_2 = 5\%$, $r_3 = 6\%$ e matrice di varianza/covarianza $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Stabilire se i 3 titoli sono efficienti.

## Soluzione

Per stabilire l'efficienza dei titoli di un portafoglio conviene procedere come segue:

1. Sappiamo che il problema di Markowitz determina la regione dei portafogli di minima varianza nell'insieme di tutti i portafogli possibili
2. La regione dei portafoglio efficienti si trova alla sinistra e in alto rispetto ai portafogli di minima varianza
3. Determiniamo $w_{PMV}$, $R_{PMV}$, $\sigma_{PMV}$
4. Vediamo se i portafogli dati appartengono effettivamente alla frontiera cosí determinata.

Premettiamo che per risolvere il problema si deve determinare il PMV, cosa che si può ricavare minimizzando, come già detto, una Lagrangiana apposita, oppure applicando le formule seguenti ( che sono le formalizzazioni delle soluzioni).
Iniziamo con ricordare le formule per il caso n titoli del PMV
Formule per ottenere il portafoglio per il caso per $n \geq 2$

$$w_{PMV} = \frac{\Sigma^{-1}\overline{\mathbf{1}}}{\overline{\mathbf{1}}^T \Sigma^{-1}\overline{\mathbf{1}}}$$

Nel nostro caso avremo che

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sostituendo la matrice inversa cosí determinata abbiamo che

$$w_{PMV}^T = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} & \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \tag{20}$$

con il termine $\frac{1}{\overline{\mathbf{1}}^T \Sigma^{-1}\overline{\mathbf{1}}} = \frac{1}{6}$
Il rendimento atteso $R_{PVM}$ é

$$R_{PVM} = \mathbf{r}^T w_{PVM} = \frac{1}{\overline{\mathbf{1}}^T \Sigma^{-1}\overline{\mathbf{1}}} \times r^T \Sigma^{-1}\overline{\mathbf{1}} \tag{21}$$

Nel nostro caso avremo:

$$R_{PVM} = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 0.04 & 0.05 & 0.06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Facendo i calcoli otterete che $R_{PVM} = 0.0416$. Potete esprimere il rendimento del portafolio anche in termini di $r^T w_{PMV}$ ossia come la media ponderta dei rendimenti con i pesi dati ovviamente da $w_{PMV}$. In questo caso abbiamo addottato la forma matriciale con l'inversa.

Mentre la varianza sará data da:

$$\sigma^2_{PMV} = w^T_{PVM} \times \Sigma \times w_{PVM} = \frac{1}{\overline{\mathbf{1}}^T \Sigma^{-1} \overline{\mathbf{1}}} \tag{22}$$

Il termine della varianza avendolo giá calcolato prima é pari a $\frac{1}{6} \approx 0.166$. Stessa considerazione vale per la varianza in cui potete usare $w^T_{PVM} \times \Sigma \times w_{PVM}$. invece di passare per l'inversa in forma matriciale.

Nel piano media volatilitá avviamo che il PMV é dato da $(\sqrt{0.166}, 0.0416)$ ossia tutti i titoli di minima varianza con rendimento superiore e varianza superiore sono efficienti.

Si tratta ora di vedere prima di tutto se i titoli dati sono di minima varianza, cioè se soddisfano le equazioni di Markowitz.

Il primo titolo ha componenti $(1, 0, 0)$ e dovranno esistere $\lambda, \mu$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poichè la matrice completa del sistema è pari a

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, il sistema non ammette soluzioni e dunque il primo titolo non è neanche di minima varianza. ( in realtà anche se fosse di minima varianza non sarebbe efficiente poichè $r_1 < R_{PVM}$)

Il secondo titolo ha componenti $(0, 1, 0)$ e dovranno esistere $\lambda, \mu$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poichè la matrice completa del sistema è pari a

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, il sistema non ammette soluzioni e dunque il secondo titolo non è neanche di minima varianza. Il terzo titolo ha componenti $(0, 0, 1)$ e dovranno esistere $\lambda, \mu$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poichè la matrice completa del sistema è pari a

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, eguale a quello della matrice incompleta, il sistema ammette soluzioni; le altre 2 equazioni di Markowitz sono verificate e dunque il terzo titolo è di minima varianza. Poichè inoltre $r_3 > R_{PVM}$ esso è certamente efficiente.