Esercizio 1

Dati i tre titoli
z_1= { -99 , 104 } / { 0, 1 }
z_2 = { -99, 107 } / { 0, 2 }
b_1 = { -99 , 4, 4, 104 } / { 0, 1, 2, 3 }

Estrapolare la struttura dei tassi a pronti e a termine.

Soluzione

Sul mercato sono presenti 2 ZCB e un titolo con cedole b_1. I tassi a pronto e a termine dei due ZCB sono facilmente ottenibili attraverso le solite formule. Calcoliamo fattori di sconto di z_1 e di z_2

$$z_1 \implies v(0;1) = \frac{99}{104}$$

$$z_2 \implies v(0;2) = \frac{99}{107}$$

Tassi a pronti:

$$i(0;1) = v(0;1)^{-1} - 1 = \left(\frac{99}{104}\right)^{-1} - 1 = 0.050505$$

$$i(0;2) = v(0;2)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \left(\frac{99}{107}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0.039619$$

Tassi a termine $i(0;0;1)$ e $i(0;0;2)$ coincidono ovviamente con i due tassi spot $i(0;1)$ e $i(0;2)$. Quindi calcoliamo il tasso a termine

$$i(0;1;2) = \left(\frac{v(0;2)}{v(0;1)}\right)^{-1} - 1 = \frac{\frac{99}{104}}{\frac{99}{107}} - 1 = 0.028846$$

Ora consideriamo il titolo con cedole b_1, per calcolare il tasso a pronti $i(0;3)$ dobbiamo ricare il fattore di montante $v(0;3)$. Per farlo dobbiamo ricordarci che il fattore di sconto (o montante degli zcb) corrisponde al tasso di interesse i che generalmente risultava dato nel calcolare i vari flussi di cassa.
Ossia $m(0;1)$,$m(0;2)$, $m(0;3)$ o $v(0;1)$,$v(0;2)$, $v(0;3)$ sono i fattori di capitalizzazione e di sconto per i rispettivi periodi. Sapendo il prezzo di b_1 possiamo impostare il seguente flusso di cassa:

$$99 = 4 \times v(0;1) + 4 \times v(0;2) + 104 \times v(0;3) \implies 99 = 4\frac{99}{104} + 4\frac{99}{107} + 104v(0;3)$$

Risolvere flusso di cassa rispetto a $v(0;3)$ per avere $v(0;3) = 0,879725$
Ricavare il tasso a pronti $i(0;3)$ e i tassi a termine $i(0;2;3)$ e $i(0;1;3)$

$$i(0;3) = v(0;3)^{-\frac{1}{3}} - 1 = (0,879725)^{-\frac{1}{3}} - 1 = 0.0436407$$

$$i(0;2;3) = \left(\frac{v(0;3)}{v(0;2)}\right)^{-1} - 1 = \left(\frac{\frac{99}{107}}{0,879725}\right) - 1 = 0.05173$$

$$i(0;1;3) = \left(\frac{v(0;3)}{v(0;1)}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \left(\frac{\frac{99}{104}}{0,879725}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.0402136$$

Esercizio 2

Sapendo che, sul nostro mercato finanziario di riferimento, $v(0,1) = 0,94$ e $v(0,1,3) = 0,86$ verificare se la presenza di uno zero coupon bond unitario $z_1 = (-0,83,1)/(0,3)$ apre possibilitá di arbitraggio e, eventualmente, il profitto realizzabile impostando una strategia con saldo positivo in $t = 0$.

Soluzione

Verificare se vale la relazione di coerenza:

$$v(0;3) = v(0;1)v(0;1;3)$$

Nel nostro caso abbiamo che

$$0,83 > 0.86 \times 0.94$$

Visto che non vale relazione di coerenza allora si apre possibilitá di arbitraggio: vendere allo scoperto z_1 comprare a termine $v(0,1,3)$ e a pronti $v(0,1)$ Si consideri asset x_1 associato a $v(0,1)$ e x_3 associato a $v(0,1,3)$

- Vendo z_1 ottenendo +0.83 a $t = 0$, 0 a $t = 1$ e -1 a $t = 3$
- compro a termine x_3 , pagando -0.86 a $t = 1$ e +1 in $t = 3$
- compro a pronti 0.86 unitá x_1 con prezzo 0.94 pagando a $t = 0$ -0,80804, avendo +0,86 a $t = 1$ e 0 a $t = 3$

t	0	1	3
v(0;1)	$0,86 \times 0.94$	+ 0,86	0
v(0;1;3)	0	-0,86	1
v(0;3)	+0,83	0	-1

il profitto totale é pari a $0.83 - 0.8084 = 0.0216$

Esercizio 3

Sia x dato un titolo a cedola fissa di valore nominale 100 euro, vita a scadenza 10 anni, cedola annuale e quotato alla pari. Sapendo che il TIR di x uguale a 11,5 % calcolare la cedola C del titolo e il valore attuale rispetto a tale tasso.

Soluzione

$$VN = \frac{C}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right] + VN\frac{1}{(1+i)^n}$$

$$\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right] VN = \frac{C}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

$$VN = \frac{C}{i}$$

Risolvere rispetto a C per avere $C = 11,5$

Esercizio 4

Sia x dato un titolo a cedola fissa di valore facciale 110 euro, vita a scadenza 12 anni, cedola annuale di 12 euro e quotato alla pari. Calcolarne il TIR ed il valore attuale rispetto a tale tasso.

Soluzione

$$VN = \frac{C}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right] + VN\frac{1}{(1+i)^n}$$

$$\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right] VN = \frac{C}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

$$VN = \frac{C}{i} \implies i = \frac{C}{VN} = \frac{12}{110} = 0.10909$$

Il TIR=10.909 %. Si ricordi che nel caso di quotazione alla pari di un titolo noi abbiamo TIR=tasso cedolare ($\frac{C}{VN}$) e la relazione non riguarda l'ammontare della cedola corrisposta, ossia non abbiamo TIR=ammontare cedola

Esercizio 5

Compro 10 zero coupon bond ad un anno che costano 97,51 e rimborsano 100 a scadenza nonché 25 obbligazioni biennali che pagano cedole annue al 4% (le cedole sono calcolate rispetto al valore facciale delle obbligazioni che é uguale a 100) e rimborsano il capitale a 101.
Sapendo che il mio TIR complessivo é il 4,5% calcolare il prezzo delle obbligazioni.

Calcolare quale sarebbe stato il TIR complessivo se il prezzo delle obbligazioni fosse stato pari a 100.

Soluzione

Lo scadenzario dell'operazione é il seguente

$$(97,51 \times 10 + 25 \times P; 100 \times 10 + 4 \times 25; 105 \times 25)/(0; 1; 2)$$

Dobbiamo impostare equazione flusso di cassa per trovare il prezzo delle obbligazioni

$$97,51 \times 10 + 25 \times P = \frac{100 \times 10}{(1+0.045)^1} + \frac{4 \times 25}{(1+0.045)^1} + \frac{105 \times 25}{(1+0.045)^2}$$

Risolvere rispetto a P per avere $P = 99.2529$
Se il prezzo delle obbligazioni fosse stato di 100 dobbiamo riscrivere il flusso di cassa e risolverlo rispetto a i

$$97,51 \times 10 + 25 \times 100 = \frac{100 \times 10}{(1+i)^1} + \frac{4 \times 25}{(1+i)^1} + \frac{105 \times 25}{(1+i)^2}$$

Risolvere rispetto ad i per ottenere $i = 0.0416843$.

Esercizio 6

La struttura dei tassi a pronti é espressa sul mercato dalla seguente funzione:

$$i_{0,t} = 0,06 - 0,005 \times (t-1) \tag{1}$$

- Calcolare la duration del titolo

$$(-98; 10; 10; 110)/(0; 1; 2; 3)$$

- Calcolare i tassi a termine $i(0, t-1, t)$ per $t = 1, 2, 3$.
- Calcolare il fattore di montante $m(0, 1, 3)$ espresso su base annua.

Soluzione

- Per calcolare la duration abbiamo bisogno dei fattori di sconto per le varie scadenze quindi ricaviamo le ricaviamo dai tassi a pronto con solita formula:

$$i(0;1) = 0,06$$

$$i(0;2) = 0,06 - 0,005 = 0,055$$

$$i(0;3) = 0,06 - 0,01 = 0,05$$

Passiamo a ricavare fattori di sconto:

$$v(0;1) = (i(0;1)+1)^{-1} = (1+0,06)^{-1} = 0.943396$$

$$v(0;2) = (i(0;2)+1)^{-2} = (1+0,055)^{-2} = 0.898452$$
$$v(0;3) = (i(0;3)+1)^{-3} = (1+0,05)^{-3} = 0.863838$$

Possiamo ricavare ora duration:

$$D = \frac{10 \times v(0;1) + 2 \times 10 \times v(0;2) + 3 \times 110 \times v(0;3)}{10 \times v(0;1) + \times 10 \times v(0;2) + \times 110 \times v(0;3)} = 2,7545$$

- Calcolare $i(0,t-1,t)$ per $t = 1,2,3$. $i(0,0,1)$ coincide ovviamente con lo spot.

$$i(0,1,2) = \left(\frac{v(0;2)}{v(0;1)}\right)^{-1} - 1 = \frac{0.943396}{0.898452} - 1 = 0.0500238$$

$$i(0,2,3) = \left(\frac{v(0;3)}{v(0;2)}\right)^{-1} - 1 = \frac{0.898452}{0.863838} - 1 = 0.0400796$$

- Cacolare montante $m(0,1,3)$

$$m(0,1,3) = \frac{m(0;3)}{m(0;1)} = \frac{v(0;3)^{-1}}{v(0;1)^{-1}} = \frac{(0.863838)^{-1}}{(0.943396)^{-1}} = 1.0921$$

Esercizio 7

In un determinato istante la struttura dei tassi a termine sul mercato, valutata in $t = 0$, é la seguente: $i(0;1) = 0,10$; $i(0;1;2) = 0,11$; $i(0;2;3) = 0,12$; $i(0;3;4) = 0,125$. Un operatore ha a disposizione due titoli:

- uno ZCB che garantisce 163,0474 tra 4 anni;
- un'obbligazione che paga cedole annuali del 15 % e verrá rimborsata alla pari tra 4 anni.
  Calcolare i prezzi e le durate medie finanziarie dei due titoli.

Soluzione

Calcolare prezzo dello ZCB P_{ZCB} e prezzo obbligazione P_{Obb}

$$P_{ZCB} = \frac{163,0474}{(1,10)(1,11)(1,12)(1,125)} \implies P_{ZCB} = 105,9809$$

$$P_{Obb} = \frac{15}{1,10} + \frac{15}{(1,10)(1,11)} + \frac{15}{(1,10)(1,11)(1,12)} + \frac{115}{(1,10)(1,11)(1,12)(1,125)}$$

Calcolare valore per avere $P_{Obb} = 111,6402$

- Calcolare Duration classica dei due titoli. Duration dello ZCB=4 poiché é uguale alla sua scadenza. Duration dell'obbligazione é

$$D_{obb} = \frac{1 \times \frac{15}{1,10} + 2 \times \frac{15}{(1,10)(1,11)} + 3 \times \frac{15}{(1,10)(1,11)(1,12)} + 4 \times \frac{115}{(1,10)(1,11)(1,12)(1,125)}}{111,6402}$$

Calcolare valore per ottenere $D_{Obb} = 3,3152$