

Esercitazione di Matematica Finanziaria

Corso di laurea in Economia e Management

11 Aprile 2019

Esercizio 1. Sia dato un contratto finanziario che in $t = 0$ abbia valore $x_t = 98.2$ euro e dopo 105 giorni abbia valore $x_s = 102.4$ euro, con $s = 105$ giorni. Relativamente al periodo $[0, 105]$, calcolare:

- (a) L'interesse;
- (b) Il tasso di interesse;
- (c) Il tasso di sconto.

Soluzione. Ricordando che

$$I(t, s) = x_s - x_t, \quad r(t, s) = \frac{I(t, s)}{x_t}, \quad j(t, s) = \frac{I(t, s)}{x_s},$$

abbiamo che

$$I(0, 105) = 4.2 \text{ €}, \quad r(0, 105) = 0.04277, \quad j(0, 105) = 0.04101.$$

Esercizio 2. Determinare il pagamento x_s che deve prevedere in $s = 150$ giorni un contratto finanziario, che in $t = 0$ vale 100 €, in modo che il tasso di interesse relativo al periodo $[0, 150]$ sia del 4.25%. Relativamente al periodo $[0, 150]$, calcolare:

- (a) L'interesse;
- (b) Il tasso di sconto.

Soluzione. Ricordando che

$$r(t, s) = \frac{I(t, s)}{x_t}, \quad \rightarrow \quad x_s = x_t(1 + r(t, s)),$$

abbiamo che

$$x_{150} = 104.25, e.$$

Come per l'esercizio precedente

$$I(0, 150) = 4.2 \text{ €}, \quad j(0, 150) = 0.04077.$$

Esercizio 3. Calcolare il tasso d'interesse effettivo equivalente annuo r_{eff} al tasso d'interesse nominale annuo r del 7.5% nei casi in cui la capitalizzazione avviene con frequenza mensile, bimestrale, trimestrale, quadrimestrale e semestrale.

Soluzione. Ricordiamo la formula per il tasso d'interesse effettivo:

$$r_{eff} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1, \tag{1}$$

dove r rappresenta il tasso nominale annuo ed m il numero di periodi in cui è stato suddiviso l'anno. Nel nostro caso abbiamo: $r_{eff} = 7.76\%$ (frequenza mensile), $r_{eff} = 7.74\%$ (bimestrale), $r_{eff} = 7.71\%$ (trimestrale), $r_{eff} = 7.69\%$ (quadrimestrale), $r_{eff} = 7.64\%$ (semestrale).

Esercizio 4. Calcolare il valore futuro (montante) V_t ad interesse semplice, composto ed in capitalizzazione continua, nel caso in cui al tempo $t_0 = 0$ venga impiegato:

- (i) un capitale di € 100, al tasso d'interesse nominale annuo del 2.5% per la durata di 2 anni;
- (ii) un capitale di € 1500, al tasso d'interesse nominale annuo del 3.71% per la durata di 7 mesi.

Soluzione. Ricordando che le formule per il valore montante, nei tre regimi, al tempo t (espresso in anni) di un capitale V_0 , impiegato al tempo 0, al tasso d'interesse nominale annuale r , sono

$$V_t = V_0 \cdot (1 + rt), \quad V'_t = V_0 \cdot (1 + r)^t, \quad V''_t = V_0 \cdot e^{r \cdot t} \quad (2)$$

abbiamo, in R.I.S.,

- (i) $V_2 = 100 \cdot (1 + 0.025 \cdot 2) = 105 \text{ €};$
- (ii) $V_{\frac{7}{12}} = 1500 \cdot (1 + 0.0371 \cdot \frac{7}{12}) = 1532.46 \text{ €};;$

in R.I.C.,

- (i) $V'_2 = 100 \cdot (1 + 0.025)^2 = 105.06 \text{ €};$
- (ii) $V'_{\frac{7}{12}} = 1500 \cdot (1 + 0.0371)^{\frac{7}{12}} = 1525.72 \text{ €};$

in C.C.,

- (i) $V''_2 = 100 \cdot e^{2 \cdot 0.025} = 105.18 \text{ €};$
- (ii) $V''_{\frac{7}{12}} = 1500 \cdot e^{\frac{7}{12} \cdot 0.0371} = 1532.81 \text{ €};$

Esercizio 5. Si impieghi al tempo $t_0 = 0$ un capitale di € 1000 in regime di interesse composto per 3 anni e 3 mesi, al tasso effettivo annuo del 3.5%. Alla scadenza il montante ottenuto viene reinvestito immediatamente al tasso composto annuale effettivo del 4% per un certo periodo. Quanti anni si dovranno ancora aspettare per avere un montante complessivo di € 1228.85?

Soluzione. Per calcolare gli anni che bisogna ancora attendere è necessario risolvere l'equazione

$$\left[1000 \cdot (1 + 0.035)^{\frac{13}{4}} \right] \cdot (1 + 0.04)^t = 1228.85$$

la cui soluzione è $t = 2.4037$ anni.

Esercizio 6. Si consideri un investimento € 3000 di durata annuale in regime di capitalizzazione semplice. Si supponga che gli interessi vengano pagati al 2% annuo dopo 6 mesi, al 3.5% annuo per i successivi 3 mesi e al 4.1% annuo per i restanti 3 mesi. Calcolare il valore dell'investimento alla scadenza.

Soluzione. Nel caso di capitalizzazione semplice si ha

$$\begin{aligned} V_1 &= 3000 + 3000 \cdot 0.02 \cdot \frac{6}{12} + 3000 \cdot 0.035 \cdot \frac{3}{12} + 3000 \cdot 0.041 \cdot \frac{3}{12} = \\ &= 3000 \cdot \left(1 + 0.02 \cdot \frac{1}{2} + 0.035 \cdot \frac{1}{4} + 0.041 \cdot \frac{1}{4} \right) = 3087 \text{ €}. \end{aligned}$$

Esercizio 7. Una persona versa in banca la somma R . Quindi rispettivamente dopo 1 anno, 2 anni, 3 anni versa somme il cui importo cresce rispetto al precedente del 5%. Determinare quali somme quella persona versa annualmente, sapendo che il montante complessivo di cui dispone un anno dopo l'ultimo versamento calcolato ad interesse composto annuo dell'11% è di € 4477,95.

Soluzione. Posto $t = 0$ l'istante in cui si versa la prima somma R , dire che l'importo cresce del 5% significa che ogni rata viene moltiplicata rispetto alla precedente per 1.05. Il montante complessivo diventa:

$$V_5 = R(1 + 0.11)^4 + R 1.05 (1 + 0.11)^3 + R (1.05)^2 (1 + 0.11)^2 + R (1.05)^3 (1 + 0.11),$$

da cui eguagliando $V_5 = 4477.95$ si ricava con semplici passaggi che $R = 800$ e di conseguenza le somme versate risultano:

$$(800, 840, 882, 926.1).$$

Esercizio 8. Tre anni e due mesi fa, Tizio ha versato la somma di 3750 € presso una banca che applica la capitalizzazione semestrale degli interessi al 4,5% semestrale. Oggi ritira il montante che reimpiega per altri due anni e otto mesi al tasso annuo nominale del 12% convertibile semestralmente. Quale somma ritirerà alla scadenza? A quale tasso annuo equivalente è risultato complessivamente impiegato il capitale iniziale?

Soluzione. Il montante che Tizio ritira oggi è pari a:

$$V_1 = 3.750(1 + 0.045)^{\frac{38}{6}} = 4955.655.$$

Tenuto conto che il tasso effettivo semestrale è $\frac{12\%}{2} = 6\%$, a scadenza ritirerà:

$$V_2 = V_1 (1 + 0.06)^{\frac{32}{6}} = 4955.655 (1 + 0.06)^{\frac{32}{6}} = 6761.85.$$

Dato che la durata complessiva dell'impiego, espressa in frazioni di anno è pari a $t = \frac{70}{12}$, il tasso medio di impiego può essere ricavato dalla seguente equivalenza:

$$6761.85 = 3750 (1 + r)^{\frac{70}{12}}$$

da cui si trova $r = 10.63\%$.

Esercizio 9 (Esercizio per casa). Ripetere l'esercizio 6 nel caso di capitalizzazione composta e capitalizzazione continua.