

# Esercitazioni di Matematica Finanziaria

## Corso di laurea in Economia e Management

17 Aprile 2019

**Esercizio 1.** Si consideri l'operazione finanziaria definita da

$$a|t = (-35, 14, 23)|(0, 1, 2)$$

in cui il tempo è espresso in semestri. Calcolare:

- (i) il tasso interno di rendimento annuale (se esiste) dell'operazione  $a|t$ ;
- (ii) il valore  $x$  che deve essere aggiunto al primo flusso affinché il tasso interno di rendimento dell'operazione  $(-35 + x, 14, 23)|(0, 1, 2)$  sia pari al 5% annuo.

*Soluzione.* (i) Si osservi innanzitutto che l'operazione è di puro investimento (primo flusso negativo e i restanti tutti positivi) ed inoltre la somma di tutti i flussi  $(-35 + 14 + 23 = 2)$  è strettamente positiva. Dunque, grazie al Teorema fondamentale del TIR, possiamo affermare che quest'ultimo esiste unico ed è strettamente positivo. Per calcolarlo, basta ricordarne la definizione (tasso che annulla il valore attuale) e risolvere dunque l'equazione

$$-35 + 14(1 + r^*)^{-0.5} + 23(1 + r^*)^{-1} = 0.$$

Se si applica la sostituzione

$$c = (1 + r^*)^{-0.5} \quad \left( = \frac{1}{\sqrt{1 + r^*}} \right)$$

si ottiene l'equazione di secondo grado

$$-35 + 14c + 23c^2 = 0.$$

Determinando la radice positiva di quest'ultima e invertendo in maniera opportuna la sostituzione di sopra si trova  $r^* = 0.0712$  (7.12%).

Nel punto (ii) il valore di  $x$  deve essere tale che

$$-35 + x + 14(1 + 0.05)^{-0.5} + 23(1 + 0.05)^{-1} = 0.$$

Quindi si deve semplicemente risolvere un'equazione di primo grado nell'incognita  $x$ . Facendo i conti si trova  $x = -0.5674$ .

**Esercizio 2.** Si consideri il seguente flusso finanziario:

$$x|t = \{-100, 9, 9, 111\}|\{0, 1, 2, 3\},$$

con scadenziario espresso in anni. Indicare in quale intervallo, giustificando la risposta, si trovi il T.i.r.

- $3\% < r < 7\%$ ,
- $7\% < r < 10\%$ ,

- $10\% < r < 15\%$ ,
- nessuna delle precedenti.

*Soluzione.* Posto  $d = (1 + r)^{-1}$ , la funzione VAN è data da

$$VAN(d) = -100 + 9d + 9d^2 + 111d^3.$$

L'operazione finanziaria è di puro investimento ed inoltre soddisfa tutte le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità del TIR; di conseguenza, esiste un unico TIR positivo. Dato che la funzione VAN è decrescente rispetto ad aumento del tasso di interesse, ne segue che esisteranno due tassi limite  $\underline{r}$  e  $\bar{r}$  tali che  $VAN(\underline{r}) > 0$  e  $VAN(\bar{r}) < 0$  ed il TIR  $r^*$  sarà compreso tra  $\underline{r}$  e  $\bar{r}$ . Occorre quindi calcolare il VAN nei valori di 3%, 7%, 10% e 15%.

$$VAN(3\%) = -100 + 9(1 + 3\%)^{-1} + 9(1 + 3\%)^{-2} + 111(1 + 3\%)^{-3} = 10.80$$

$$VAN(7\%) = -100 + 9(1 + 7\%)^{-1} + 9(1 + 7\%)^{-2} + 111(1 + 7\%)^{-3} = 6.88$$

$$VAN(10\%) = -100 + 9(1 + 10\%)^{-1} + 9(1 + 10\%)^{-2} + 111(1 + 10\%)^{-3} = -0.98$$

$$VAN(15\%) = -100 + 9(1 + 15\%)^{-1} + 9(1 + 15\%)^{-2} + 111(1 + 15\%)^{-3} = -12.38$$

**Esercizio 3.** Si considerino le seguenti operazioni finanziarie:

$$x|t = (-1000, 500, 500, 500)|(0, 1, 2, 3)$$

e

$$y|t = (-1000, 700, 550, 200)|(0, 1, 2, 3)$$

con il tempo espresso in anni in entrambe. Scegliere l'operazione migliore in base al criterio del VAN, sapendo che il tasso nominale annuo prevalente è del 7%.

*Soluzione.* Calcolando i valori attuali delle due operazioni finanziarie si trova che la prima ha valore attuale  $V_0^x = 312.1580$  mentre la seconda ha valore attuale  $V_0^y = 297.8565$ . Il criterio del VAN ci suggerisce che l'operazione  $x|t$  è preferibile all'operazione  $y|t$ .

**Esercizio 4.** Calcolare il valore attuale ed il valore montante di una rendita immediata posticipata annua di rata 1200 euro e durata 15 anni al tasso d'interesse nominale annuo del 12%. Quali sarebbero stati i valori attuale e montante nel caso di rendita anticipata?

*Soluzione.* Si ricordi la formula del valore attuale per una *rendita immediata posticipata* con  $n$  rate costanti di importo  $A$  e tasso nominale  $r$ :

$$V_0 = R \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}.$$

Quindi nel caso in esame il valore sarà

$$V_0 = 1200 \cdot \frac{1 - (1 + 0.12)^{-15}}{0.12} = 8173.037 \text{ €}.$$

Per determinare il valore finale  $V_n$  basta capitalizzare il valore attuale per  $n$  periodi, ovvero

$$V_n = V_0 \cdot (1 + r)^n = R \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}.$$

Inserendo i dati del problema si ha  $V_{15} = 44\,735.658 \text{ €}$ .

Nel caso in cui la rendita fosse stata *immediata anticipata*, allora avremmo avuto

$$V_0 = R \cdot (1+r) \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}, \quad V_n = R \cdot (1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Sostituendo  $V_0 = 9153.80 \text{ €}$  e  $V_{15} = 50\,103.937 \text{ €}$ .

**Esercizio 5.** Calcolare il valore attuale ed il montante di una rendita posticipata di durata 6 anni e di rata semestrale di  $\text{€ } 2000$ , valutata al tasso nominale annuo  $r = 3\%$ . A quanto dovrebbe ammontare la rata se la rendita fosse perpetua, con stesso valore attuale e valutata allo stesso tasso nominale annuo?

*Soluzione.* Dal momento che la durata della rendita è 6 anni e la cadenza delle rate semestrale, si avranno 12 rate ed il tasso di riferimento sarà quello semestrale  $r_2 = \frac{r}{2}$ . Utilizzando le formule richiamate nell'esercizio precedente si ha  $V_0 = 21\,815.01 \text{ €}$  e  $V_{12} = 26\,082.42 \text{ €}$ . Se la rendita fosse perpetua e si volesse mantenere lo stesso valore attuale, allora la rata dovrebbe essere pari a

$$A = V_0 \cdot r_2 = 21\,815.01 \cdot 0.015 = 327.225 \text{ €}.$$

**Esercizio 6.** Si consideri la seguente operazione finanziaria

$$a|t = (-1000, 500, 500, 700)|(0, 1, 2, 3)$$

in cui i flussi di cassa sono espressi in *euro reali* e il tempo in anni. Determinare il valore attuale dell'operazione in termini reali sapendo che il tasso nominale annuo è del 12% e il livello di inflazione al 3%.

*Soluzione.* Per determinare il valore attuale dell'operazioni in termini di moneta reale, bisogna considerare il tasso d'interesse reale dato da

$$r_0 = \frac{r - f}{1 + f}$$

dove  $r$  rappresenta il tasso nominale annuo e  $f$  il tasso di inflazione annuo. A questo punto il valore attuale si determina nella solita maniera

$$V_0 = -1000 + 500(1 + r_0)^{-1} + 500(1 + r_0)^{-2} + 700(1 + r_0)^{-3} = 427.14 \text{ €},$$

essendo il tasso reale  $r_0 = 0.0874$  (8.74%).

**Esercizio 7** (Esercizio per casa). Per l'acquisto di un macchinario, un imprenditore ottiene un finanziamento di  $\text{€ } 150\,000$  e gli vengono presentate le seguenti proposte di restituzione del debito:

- A** pagamento di  $\text{€ } 41.000$  subito e di  $\text{€ } 84.000$ , suddivise in due rate di uguale importo, tra uno e tre anni;
- B** pagamento di tre rate annue di importo  $R$ ,  $2R$  e  $3R$ , con il pagamento della prima rata tra un anno.

Calcolare il valore della rata  $R$  affinché le due proposte siano equivalenti se sul mercato il tasso nominale annuo di valutazione è del 5%

**Esercizio 8** (Esercizio per casa). Un'impresa ha necessità di un finanziamento di 35 000 euro, da rimborsarsi con gli interessi dopo un anno e 9 mesi e si rivolge a due istituti di credito.

- La Banca della Padania, che le propone una soluzione che prevede un interesse di 5000 euro.
- La Banca della Magna Grecia, che le propone un tasso annuo semplice del 5.5% in base annua.

Si determini anzitutto il tasso interno di rendimento di entrambe le proposte, esprimendolo in forma percentuale e in base annua. Si indichi poi quale delle due opportunità dovrebbe scegliere l'imprenditore.

**Esercizio 9** (Esercizio per casa). Si intende ottenere la somma di € 10 000 in 5 anni con versamenti trimestrali posticipati costanti, al tasso nominale annuo  $r = 4\%$ . Determinare l'importo dei versamenti.