# MATEMATICA FINANZIARIA

Formulario a.a. 2020-21

- Leggi di capitalizzazione: $r$ = tasso nominale annuo.
  1. Interessi semplici: $V_t = V_0(1 + rt)$;
  2. Interessi composti: $V_t = V_0(1 + r)^t$;
  3. Interessi composti, con accredito degli interessi $m$ volte per anno: $V_t = V_0(1 + \frac{r}{m})^{mt}$
  4. Capitalizzazione continua degli interessi: $V_t = V_0 \exp(rt)$.
- Valore Rendite (rata unitaria).
  1. finita, posticipata, $n$ rate:
  $$a_{\overline{n}|r} = \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \quad (\text{ v. attuale }),\ s_{\overline{n}|r} = \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \qquad (\text{ v. futuro})$$
  2. finita, anticipata, $n$ rate:
  $$\ddot{a}_{\overline{n}|r} = (1 + r)a_{\overline{n}|r} \ \ (\text{v. attuale}),\ \ddot{s}_{\overline{n}|r} = (1 + r)s_{\overline{n}|r} \quad (\text{v. futuro})$$
  3. infinita, posticipata: $a_{\overline{\infty}|r} = \frac{1}{r}$ (v. attuale)
  4. infinita, anticipata: $\ddot{a}_{\overline{\infty}|r} = \frac{1+r}{r}$ (v. attuale).
- Duration di una successione di importi $\{x_1, \ldots, x_n\}|\{t_1, \ldots, t_n\}$: $D = \frac{\sum_{k=1}^n t_k \cdot x_k (1+s_{t_k})^{-t_k}}{\sum_{k=1}^n x_k (1+s_{t_k})^{-t_k}}$
- Duration quasi modificata di una successione di importi:$\{x_1, \ldots, x_n\}|\{1, \ldots, n\}$
$$D_Q = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{k}{m} \cdot x_k (1 + \frac{s_k}{m})^{-(k+1)}}{\sum_{k=1}^n x_k (1 + \frac{s_k}{m})^{-k}}$$
- Duration di Fisher-Weil di una successione di flussi di cassa:$\{x_1, \ldots, x_n\}|\{t_1, \ldots, t_n\}$
$$D_{FW} = \frac{\sum_{k=1}^n t_k \cdot x_k e^{-s_{t_k} t_k}}{\sum_{k=1}^n x_k e^{-s_{t_k} t_k}}$$
- Prezzo e duration di un BTP con struttura dei tassi piatta, $\lambda$ =YTM (rendimento a maturità):
$$P = \frac{F}{(1 + \frac{\lambda}{m})^n} + \frac{C}{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{(1 + \frac{\lambda}{m})^n} \right) \qquad D = \frac{1 + y}{my} - \frac{1 + y + n(c - y)}{mc[(1 + y)^n - 1] + my}$$
  ($c$ = tasso cedolare periodale, $y$ = rendimento periodale).
- Relazione tra derivata del v. attuale rispetto al tasso di interesse e Duration. Sia $\{x_1, \ldots, x_n\}|\{1, \ldots, n\}$ una successione di importi e $V = \sum_{k=1}^n x_k (1 + \lambda)^{-k}$, allora:
$$\frac{dV}{d\lambda} = -\frac{D}{1 + \lambda} V$$
- Relazione tra tassi a pronti ($s_j = s(0, t_j)$) e tassi a termine ($f_{ij} = f(0, t_i, t_j)$) in capitalizzazione composta e continua, in assenza di arbitraggio, ed analoga relazione tra fattori di sconto a pronti ($d_i$) e a termine ($d_{ij}$):
$$(1 + s_j)^j = (1 + s_i)^i (1 + f_{ij})^{j-i}, \quad e^{s_{t_j} t_j} = e^{s_{t_i} t_i} e^{f_{t_i, t_j} (t_j - t_i)} \quad d_{ij} = d_j / d_i, \quad t_i < t_j.$$

- Varianza di una somma di $n$ v. a.: $\text{var}\left(\sum_{i=1}^n w_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{cov}(X_i, X_j)$.
- Un portafoglio $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ di $n$ titoli è di minima varianza in Media-Varianza (tra tutti quelli di rendimento atteso $\bar{r}$) se soddisfa il sistema di equazioni lineari

$$\begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_j - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0 \quad per \quad i = 1, 2, .., n \\ \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i = \bar{r} \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{array}$$

  per opportuni valori di $\lambda$ e $\mu$.