1 Soluzioni degli esercizi # 1

1.1 Esercizio 1

Le funzioni di profitto delle due imprese sono:

$$\pi_1 (q_1, q_2) = (10 - q_1 - q_2 - 6)\, q_1$$

$$\pi_2 (q_1, q_2) = (10 - q_1 - q_2 - 6)\, q_2$$

Le condizioni del primo ordine per la massimizzazione dei profitti sono:

$$\frac{\partial \pi_1 (q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0$$

$$q_1 (q_2) = 2 - \frac{1}{2} q_2$$

e

$$\frac{\partial \pi_2 (q_1, q_2)}{\partial q_2} = 0$$

$$q_2 (q_1) = 2 - \frac{1}{2} q_1$$

Risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} q_1 = 2 - \frac{1}{2} q_2 \\ q_2 = 2 - \frac{1}{2} q_1 \end{cases}$$

si ottiene l'equilibrio di Nash del gioco $\left[q_1^* = \frac{4}{3}, q_2^* = \frac{4}{3}\right]$
Il prezzo di equilibrio è:

$$p^* = 10 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{22}{3}$$

Il consumer surplus è:

$$\left(10 - \frac{22}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right)\frac{1}{2} = \frac{32}{9}$$

I profitti di un'impresa sono pari a:

$$\left(10 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} - 6\right)\frac{4}{3} = \frac{16}{9}$$

Il benessere sociale, dato dalla somma di consumer surplus e profitti delle imprese, è uguale a:

$$\frac{32}{9} + \frac{16}{9}(2) = \frac{64}{9} : 7.111\,1$$

Se le due imprese si fondono nel mercato vi sarà un'unica impresa monopolista.

I profitti dell'impresa monopolista risultante dalla fusione sono descritti dalla seguente funzione:

$$\pi_m(q) = (10 - q - c_1)\, q$$

La condizione del primo ordine per un massimo è:

$$\frac{\partial \pi_m(q)}{\partial q} = 0$$

che ha come soluzione:

$$q^m = \frac{10 - c_1}{2}$$

Il prezzo di equilibrio nel mercato monopolizzato è, dunque:

$$p^m = 10 - \frac{10 - c_1}{2} = \frac{10 + c_1}{2}$$

Il surplus del consumatore è

$$\begin{aligned}
SC &= (10 - p^m)\, q^m \frac{1}{2} = \\
&= \left(10 - \frac{10 + c_1}{2}\right) \frac{10 - c_1}{2} \frac{1}{2} = \\
&= \frac{(10 - c_1)^2}{8}
\end{aligned}$$

I profitti dell'impresa monopolista sono pari a:

$$\begin{aligned}
\pi_m(q^m) &= (10 - q^m - c_1)\, q^m = \\
&= \left(10 - \frac{10 - c_1}{2} - c_1\right) \frac{10 - c_1}{2} = \\
&= \frac{(10 - c_1)^2}{4}
\end{aligned}$$

e il benessere sociale è:

$$\begin{aligned}
W(c_1) &= SC + \pi_m(q^m) = \\
&= \frac{(10 - c_1)^2}{8} + \frac{(10 - c_1)^2}{4} = \\
&= \frac{3\,(10 - c_1)^2}{8}
\end{aligned}$$

Da notare che se non vi fossero guadagni di efficienza (vale a dire se fosse $c_1 = 6$), il welfare totale sarebbe:

$$W(6) = \frac{3(10-6)^2}{8} = 6$$

e, dunque, vi sarebbe una riduzione di benessere sociale, dovuta all'inefficienza allocativa causata dal monopolio.

L'esercizio chiede di determinare il livello di c_1 (cioè i guadagni di efficienza) a cui corrisponde un benessere sociale uguale a quello che si sarebbe avuto in assenza di fusione. Dunque occorre porre:

$$W(c_1) = \frac{64}{9}$$

$$\frac{3(10-c_1)^2}{8} = \frac{64}{9}$$

Risolvendo questa equazione si ottengono due possibili valori (uno solo dei quali è però ammissibile, perché l'altro è maggiore di 10). Dal che otteniamo che il valore ricercato è:

$$c_1 = 5.6454$$

1.2 Esercizio 2

La funzione dei profitti delle imprese 1e 2 sono:

$$\pi_1(q_1, q_2, q_3) = (20 - q_1 - q_2 - q_3 - 5)\, q_1$$

$$\pi_2(q_1, q_2.q_3) = (20 - q_1 - q_2 - q_3 - 5)\, q_2$$

La funzione dei profitti dell'impresa 3 è:

$$\pi_3(q_1, q_2, q_3) = (20 - q_1 - q_2 - q_3 - 8)\, q_3$$

Condizioni del primo ordine:

$$\frac{\partial \pi_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} = 0$$

$$q_1(q_2, q_3) = \frac{15 - q_2 - q_3}{2}$$

Analogamente per impresa 2:

$$\frac{\partial \pi_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} = 0$$

$$q_2(q_1, q_3) = \frac{15 - q_1 - q_3}{2}$$

Per l'impresa 3, abbiamo:

$$\frac{\partial \pi_3 (q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} = 0$$

$$q_3 (q_1, q_2) = \frac{12 - q_1 - q_2}{2}$$

Ora, invece di risolvere un sistema di 3 equazioni in 3 incognite, possiamo adottare il seguente accorgimento: sappiamo che in equilibrio le imprese 1 e 2 produrranno la stessa quantità (sono simmetriche). Pertanto, poniamo:

$$q_1 = q_2 = q$$

e riscriviamo le funzioni di risposta ottima tratte dalle condizioni del primo ordine come segue:

$$q = \frac{15 - q - q_3}{2}$$

e

$$q_3 = \frac{12 - 2q}{2}$$

Otteniamo un sistema di due equazioni che è semplice risolvere per sostituzione. Cioè possiamo scrivere

$$q = \frac{15 - q - \frac{12-2q}{2}}{2}$$

la cui soluzione è:

$$q^* = \frac{9}{2}$$

Sostituendo questo valore nell'equazione di q_3 si ottiene:

$$q_3^* = \frac{3}{2}$$

Dunque l'equilibrio di Nash è:

$$(q_1^*, q_2^*, q_3^*) = \left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Le quantità complessive prodotte in equlibrio sono:

$$Q^* = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = \frac{21}{2}$$

E il prezzo di equilibrio è:

$$p^* = 20 - \frac{21}{2} = \frac{19}{2}$$

Noti questi valori è imemdiato calcolare il SC,

$$SC = \left(20 - \frac{19}{2}\right)\frac{21}{2}\frac{1}{2} = \frac{441}{8}$$

I profitti delle imprese 1 e 2 sono:

$$\pi_1^* = \pi_2^* = \left(\frac{19}{2} - 5\right)\frac{9}{2} = \frac{81}{4}$$

I profitti dell'impresa 3 sono:

$$\pi_3^* = \left(\frac{19}{2} - 8\right)\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

Il benessere sociale è:

$$W = SC + \pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^* = \frac{441}{8} + \frac{81}{4} + \frac{81}{4} + \frac{9}{4} = \frac{783}{8}$$

Per calcolare l'indice HHI, dobbiamo innanzitutto calcolare le quote di mercato.

Le quote delle imprese 1 e 2 sono:

$$m_1 = m_2 = \frac{9}{2}/\frac{21}{2} = \frac{3}{7}$$

La quota dell'impresa 3 è:

$$m_3 = \frac{3}{2}/\frac{21}{2} = \frac{1}{7}$$

Il valore dell'HHI si ottiene elevando al quadrato le quote di mercato e sommando tra loro i valori ottenuti:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 = 0.387\,8$$

Per convenzione questo valore deve essere moltiplicato per 10.000 dunque:

$$HHI = 0.3878\,(10000) = 3878$$