Behavioral Economics

Alessandra Pelloni

Behavioral Lezione 3

Novembre 2020

Esempi: il primo figlio di A è maschio, con che probabilità lo sarà il secondo?
Esempi: B è ambientalista e pacifista.
E piu' probabile che B sia avvocato o avvocato e femminista?

Alcune Importanti Definizioni

Lo spazio dei risultati è l'insieme di tutti i possibili risultati individuali$\{A, B, C, \ldots\}$.
Per es. quando si lancia un dado $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ è lo spazio dei risultati e $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sono i risultati individuali.
Un evento è un sottonsieme dello spazio dei risultati . Per es. uscita di un numero pari: $\{2, 4, 6\}$
Una funzione di probabilità $\Pr(\cdot)$ assegna un numero reale in $[0, 1]$ a ciascun evento. Il numero Pr(A) è la probabilità di A.

Regole di Probabilità

- Regola di EQUIPROBABILITA' : Se gli eventi $\{A1, A2, \ldots, An\}$ si verificano con la stessa frequenza(visione oggettiva della probabilità) oppure se l'osservatore ritiene che non ci siano motivi per cui ciò non debba avvenire (versione soggettiva), allora la probabilità di ciascun risultato Ai i$= 1, ...n$,è 1/n, ossia: Pr(Ai)=1/n. (esempio: dado non truccato).

Es.4.8: qual'è la Pr di estrarre la stessa carta da due mazzi?

Esercizio

Es. 4.10-11 A ha due figli. D. 1) Con che probabilità saranno entrambi maschi?
2)Se sappiamo che il primo figlio è maschio, con che probabilità lo sarà il secondo?
3)Se sappiamo che un figlio è maschio, con che probabilità lo saranno entrambi?
R. 1) Lo spazio dei risultati riguardo al sesso è $\{FF, MM, MF, FM\}$.
L'unico risultato individuale favorevole è MM,quindi $1/4$.
2) Lo spazio da considerare è $\{MM, MF\}$ .Quindi $1/2$.
3) Lo spazio da considerare è $\{MM, MF, FM\}$ .Quindi $1/3$.

Regole di Probabilità

- Regola dell' unione(dell'o, dell'U o del $\vee$, da vel latino): se gli eventi A e B sono mutualmente esclusivi, allora la probabilità che A o B /AUB/A$\vee B$ eguaglia la probabilità di A più la probabilità di B, ossia: Pr(AvB)=Pr(A)+Pr(B)

Qualè la prob, che lanciando una moneta esca testa o croce?

Esempio

Una roulette ha spazi numerati 1–36 alternati rossi e neri più due addizionali, 0 e 00, entrambi verdi, in tutto 18 spazi rossi, 18 neri e 2 verdi. Qual'è:
la probabilità che esca nero?
la probabilità che esca nero o verde?
la probabilità che esca un numero dispari, 0, or 00?

Regole di Probabilità

- La probabilità dell'intero spazio dei risultati è 1.
  La probabiltà che lanciando un dado esca 1,2..6 è ?
- La probabilità che un risultato A non avverrà è 1 meno la probabilità che avverrà. $Pr(\neg A)=1\text{-}Pr(A)$.
  La probabiltà che lanciando un dado esca 1 è $1/6$, che non esca 1 è quindi?

Regole di Probabilità

Due eventi sono indipendenti se il verificarsi dell'uno non influisce sul verificarsi dell'altro.

- La regola dell'intersezione: se gli eventi A e B sono indipendenti, la probabilità di A *e* B (A$\cap B$o A$\wedge$ B, o A&B) è uguale alla probabilità di A moltiplicata per la probabilità di B:

Pr(A $\wedge$ B)=Pr(A)Pr(B).
Esempi: E' più probabile ottenere due 3 tirando 2 dadi o tirandone 1 due volte?
Qual'è la pr di ottenere 2 *e* 3 tirando un dado una volta?
Es. 4.24: Qual'è la pr di ottenere 11 tirando due dadi?di ottenere 4?
Es. 4.25: Estrazione da un mazzo di carte senza reinserimento. Qual'è la pr di estrarre due assi di seguito?
Es. 4.26: Tirando tre dadi, qual'è la prob che non esca alcun 4? Solo un 4? Almeno un 4?

Odds

In genere la probabilità di un evento si esprime come rapporto tra il numero dei casi favorevoli al suo verificarsi e il numero dei casi possibili. Se invece si divide il numero dei casi favorevoli per quello dei casi contrari si ottengono gli "odds". Si ha o=PR/(1-PR) e PR=o/(1+o)

Regole di Probabilità

La probabilità che un evento avvenga posto che un altro evento sia avvenuto viene definita probabilità condizionata.

- Regola generale dell'intersezione: Se A e B sono due eventi la probabilità di A dato B è uguale alla probabilità congiunta di A e B divisa per la probabilità di B, cioè:

$\Pr(A|B)=\Pr(A\&B)/\Pr(B)$.
Ovviamente anche $\Pr(A\&B)= \Pr(B|A)\Pr(A)$
NB: A e B possono essere o meno independenti, ecco perchè si parla di regola *generale*.

Regole di Probabilità

I seguenti enunciati sono logicamente equivalenti:
1) Pr(A|B)=Pr(A). 1) dice che che la probabilità di A è indipendente dall'essersi o meno verificato B.
2)Pr(B|A)=Pr(B)
3)Pr(A&B)=Pr(A)*Pr(B)
Prova:1)$\rightarrow$ 3) Dalla regola della probabilità congiunta (RPC), Pr(A&B)=Pr(A|B)*Pr(B) e 1) $\rightarrow$Pr(A&B)=Pr(A)*Pr(B) ossia 3).
3)$\rightarrow$ 1) da 3) Pr(A&B)=Pr(A)*Pr(B) e RPC(Pr(A&B)=Pr(A|B)*Pr(B))$\rightarrow$ quindi Pr(A)*Pr(B)=Pr(A|B)*Pr(B), ossia Pr(A)=Pr(A|B).
Il ragionamento per provare l'equivalenza tra 2) e 3) è analogo a quello per provare l'equivalenza tra 1) e 3)data la simmetria tra A e B.

Es. 4.12: Gioco delle Tre carte (Bertrand's box paradox): Abbiamo 3 carte, una bianca su entrambe le facce, una rossa su entrambe le facce e la terza con una faccia rossa e una bianca. Se esce una faccia bianca qual'è la prob che lo sia anche la seconda? Si tende a rispondere $1/2$ ma invece è $2/3$.

Usando la regola della probabilità congiunta: $Pr(A|C)=Pr(A\&C)/Pr(C)$

$Pr(BB/B)=Pr(BB\&B))/Pr(B)=Pr(BB)/Pr(B)=(1/3)/(1/2)=2/3$.

Notare la prob congiunta di due eventi A e C se C è parte di A è la probabilità di A.

Torneremo sulla soluzione usando il teorema di Bayes.

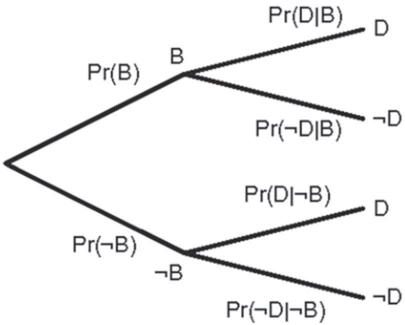
Esempi

Sempre sulla roulette.
Qual'e' la probabilità che sia uscito 00, posto che è uscito verde?
Qual'e' la probabilità che sia uscito 17, posto che è uscito un numero pari?
E se è uscito un numero dispari?

Regole di Probabilità

- Regola della Probabilità Totale

$Pr(A)=Pr(A|B)*Pr(B)+Pr(A|\neg B)*Pr(\neg B)$.
Prova: A logica: $Pr(A)=Pr(A\&B)+Pr(A\&\neg B)$, usando la regola della probabilità congiunta otteniamo il risultato.



Esempio: un azienda produce lampadine in due impianti uno vecchio (per il 70% della produzione) e uno nuovo(B), per il resto. Le lampadine difettose(D) sono lo 0.002 nel vecchio impianto e lo 0.001 nel nuovo. Con che probabilità una lampadina dell'azienda non avrà difetti?

Esempi

Es. 4.40: un paziente è malato di cancro. Con Prob $1/3$ il cancro è di tipo A e uccide entro un anno con Prob $4/5$ e con Prob $2/3$ è di tipo B e uccide entro un anno con Prob $1/5$. Con che probabilità morirà entro un anno?
Es.4.41: un concorso la metà della volte è facile (metà dei candidati promossi), se no difficile (20% promossi). Che probabilità c'è di superarlo?

Regole di Probabilità

Teorema di Bayes:
Pr(B|D)=Pr(D|B)*Pr(B)/Pr(D)
Prova: Pr(D&B)=Pr(B|D)Pr(D) o anche Pr(D&B)=Pr(D|B)Pr(B).
Quindi Pr(B|D)Pr(D)=Pr(D|B)*Pr(B) QED.
Altra formulazione

$$Pr(B|D) = \frac{Pr(D|B) * Pr(B)}{Pr(D|B) * Pr(B) + Pr(D|\neg B) * Pr(\neg B)}$$

dove per Pr(D) è stata usata la regola della probabilità totale.

Esempi

Es. 4.43: un paziente muore di cancro entro un anno dalla diagnosi. Con Prob 1/3 è di tipo A e uccide entro un anno con Prob 4/5 e con Prob 2/3 è di tipo B e uccide entro un anno con Prob 1/5. Che probabilità ci sono che il cancro fosse di tipo A?
Definiamo A l'evento avere il cancro di tipo A e M morire di tumore entro un anno. Usando la regola di Bayes abbiamo

$$Pr(A|M) = \frac{Pr(M|A)Pr(A)}{Pr(M|A)Pr(A) + Pr(M|\neg A)Pr(\neg A)} = \frac{\frac{4}{5}\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{2}{3}} = \frac{4}{6}$$

Esempi

Es.4.44: un concorso la metà della volte è facile (metà dei candidati promossi), se no difficile (20% promossi). Non lo avete superato. Con che probabilità era difficile?
Definiamo N non vincere e A concorso difficile. $Pr(D|N) = \frac{0.8*0.5}{0.8*0.5+0.2*0.5} = 0.8$

Esempi

Esercizio 4.45 Prob che L veda qualcuno è $1/4$, che in tal caso esca con voi è $1/6$. Se non vede qualcuno è $2/3$.D.a) prob che L veda qualcuno e esca con voi b) che non veda qlcn e che esca con voi c) che esca con voi d) che veda qualcuno posto che è uscita con voi.
R.a) 1/4*1/6 b) 3/4*2/3 c) la somma di a e b d): U è uscire con voi, V è vedere qualcuno
$\Pr(V|U) = \frac{Pr(U|V)*Pr(V)}{Pr(U|V)*Pr(V)+Pr(U|\neg V)*Pr(\neg V)} = \frac{1/6*1/4}{1/6*1/4+2/3*3/4} = \frac{1/6}{1/6+2} = \frac{1}{13}$

Esempi

Esempio: 10% degli impiegati di una impresa sono fumatori. Per i non fumatori la probabilità di prendere un giorno di malattia è 0.01, per i fumatori 0.05. Se un lavoratore è ammalato, con che probabilà è un fumatore? F: essere fumatore, M: essere ammalato

$\Pr(F|M) = \frac{0.05*0.1}{0.05*0.1+0.01*0.9} = \frac{5}{14}$

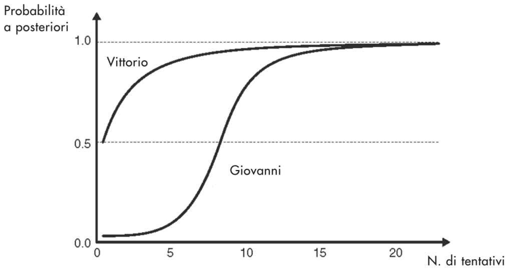
Aggiornamento Bayesiano

L'aggiornamento Bayesiano è il processo di aggiustamento delle credenze in base alla regola di Bayes.

A vuole capire se una moneta ha due teste. Crede che abbia due teste con probabilità del 50% (2T) probabilità a priori). Al primo lancio esce testa. Qual'è la probabilità a posteriori? Usando la regola di Bayes:

$$\Pr(2T|T) = \frac{Pr(T|2T)*Pr(2T)}{Pr(T|2T)*Pr(2T)+Pr(T|\neg 2T)*Pr(\neg 2T)} = \frac{0.5}{0.5+0.5*0.5} = \frac{1}{1.5}$$

Al secondo lancio esce croce. Qual'è la probabilità a posteriori?



Con l'accumularsi dell'evidenza le probabilità a priori di G e V. convergono.

Esercizi Aggiuntivi

Esercizio 4.51: Supponiamo un comitato scientifico sia formato di tre donne. a)Qual'è la probabilità che la scelta sia stata indipendente dal genere se nella materia le studiose sono tante quanti gli uomini?b) e se sono il doppio?
Risposta: a) $(1/2)^3, b)\ (2/3)^3$. Usare la distribuzione binomiale.
Esercizio 4.54: ci si arriva senza ma più facile usando la binomiale.
Esercizio 4.55: ok.