Behavioral Economics

Alessandra Pelloni

Behavioral Lezione 4

Novembre 2020

Fallacie circa l'indipendenza.

Ricordiamo: Due eventi sono indipendenti se il l'accadere dell'uno non modifica la probabilità che accada l'altro. Ci sono due modi in cui si possono commettere errori al proposito:

- Credere che due eventi siano indipendenti quando non lo sono;
- Credere che due eventi non siano indipendenti quando lo sono.

Fallacia dello Scommettitore (Monte Carlo)

La Fallacia dello Scommettitore consiste nel credere che due eventi siano dipendenti quando non lo sono.
Es.: Un giocatore ha perso 30 volte di fila ad una slot machine e se ne va. Un altro prende il suo posto tutto contento convinto che è quasi impossibile ora non vincere.

La (falsa) Legge dei Piccoli Numeri

La fallacia è collegata a questa falsa legge, secondo cui la distribuzione di piccoli campioni è la stessa della popolazione da cui provengono.
Es.: B lancia una moneta ottiene 3 teste e conclude che è truccata.
Questo risultato ha la stessa probabilità di qualunque altro fosse uscito per es. testa croce croce però la conclusione errata può spiegarsi con l'
Euristica della rappresentatività: testa croce croce è ritenuto **rappresentativo** anche di croce testa croce oppure di croce, croce testa o in generale di tutti gli eventi tranne quelli in cui escono tre teste o tre croci. (Es. 5.6)

Fallacia della Congiunzione

Viene commessa quando si sovrastima la probabilità di una congiunzione (intersezione) di eventi.
Esempio: Lotto: indovinare 6 numeri su 49. Probabilità 6*5*4*3*2/(49*48*47*...44)=1/13 983 816.
Il gioco è equo solo se si possono vincere 13 983 816 euro puntandone 1.
Ma è possibile che si sottostimi la probabilità congiunta guardando solo alla probabilità di indovinare i primi numeri.

LOTTO 6/49						
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Disgiunzioneo Unione o Somma Logica : simbolo $\vee$ da vel latino
La fallacia viene commessa quando si sottostima la probabilità di una disgiunzione(unione) di eventi.
Es. 5.12 La prob che esca almeno un 6 tirando un dado è 1/6, tirandone due 1-$(5/6)^2 \simeq 30\%$, ...tirandone 10 piu' di 80%.
Es: 5.13 D. Un tornado tende a verificarsi ogni ora con il 30% di prob. Qual'è la prob. che se ne verfichi almeno uno in 24 ore? R. 1-$(7/10)^{24} \simeq 0.9998$.
La probabilità cresce rapidamente con il ripetersi delle prove (lanci, ore) e tende ad essere sottostimata.

Es. 5.14 D. La probabilità di un'inondazione in un qualunque anno è $1/10$.
a) Qual' è la probabilità di nessuna inondazione nei prossimi due anni?
b)Qual' è la probabilità di una sola inondazione nei prossimi due anni?c)Qual' è la probabilità di almeno una inondazione nei prossimi due anni? d) Di almeno una inondazione nei prossimi dieci anni?
R: a) $0.9^2 = 0.81$ b) 2*0.1*0.9=0.18 c) $1\text{-}0.9^2 = 0.19$. d)$1\text{-}0.9^{10} \simeq 0.65$.

Legame tra le Due Fallacie

Entrambe le fallacie si possono spiegare con l'effetto ancoraggio e aggiustamento: si parte dalla probabilità dell'evento singolo e non si aggiusta abbastanza (rispettivamente in basso per l'intersezione e in alto per l'unione).

Es 5.16 D.: Qual'è la prob di estrarre almeno un asso pescando con reinserimento a)una carta b)2 carte c)10 carte, d) 52 carte. R: a) 4/52=0.08 b) 1-$(48/52)^2$,c) 1-$(48/52)^{10}$ = .55, d)1-$(48/52)^{52}$ =0.98. Es. 5.17. D: In una classe ci sono 30 studenti. Qual'è la prob che nessuno sia nato lo stesso giorno dell'anno(non bisestile)? R. Mettete i 30 studenti in fila. Il primo può essere nato in un qualunque giorno dell'anno, con probabilità 365/365; la prob che il secondo non sia nato lo stesso giorno del primo è 364/365; la probabilità che il terzo non sia nato in uno dei due giorni precedenti è 363/365; e così via, fino al trentesimo studente. Per cui la probabilità che state cercando è $365/365 \times 364/365 \times \ldots 336/365 \approx$ 29,4. Oppure dal calcolo combinatorio: A: numero delle disposizioni con ripetizioni di 30 elementi su 365 : 365^{30}. B: numero delle disposizioni senza ripetizioni di 30 elementi su 365: 365!/(365-30)!. La prob cercata è B/A.

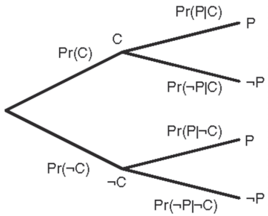
Es. 5.18 In un libro ogni frase è falsa con prob 0.1. a) Qual'è la prob che almeno una sia falsa se ci sono 100 frasi?b) se ci sono 1000 frasi? R. (a) 1-$(0.9)^{100} \approx .634$. (b) All'incirca 0,99996.

Es. 5.19. Scelta tra un jet a un motore o due motori. Ciascuno ha probabilità di avariarsi p, e il jet non può volare senza entrambi. D. a) la probabilità di avariarsi del jet con un motore è? b) la probabilità di avariarsi del jet bimotore è? c) qual'è il più sicuro? d)e se il jet potesse volare con un solo motore?

R: a)p b) 1-$(1\text{-p})^2$, c) 1-$(1\text{-p})^2 > p$,quindi il monomotore d) $\mathrm{p}^2 < p$, quindi il bimotore sarebbe più sicuro.

Base-Rate Neglect

Es. 5.20 La prob.di avere un tumore sia lo 0.01 e un test sia corretto il 90% delle volte.



Si è risultati positivi, che prob c'è di essere malati? Si tende a rispondere 90%. Con Bayes se C è "avere cancro" e P è "essere positivi al test":

$$Pr(C|P) = \frac{Pr(P|C)Pr(C)}{Pr(P|C)Pr(C) + Pr(P|\neg C)Pr(\neg C)} = \frac{.9.01}{.9.01 + .1.99} = .08$$

Fallacia del Tasso di Riferimento

Il "base rate", tasso di riferimento base, è la frazione di una popolazione che ha una caratteristica di interesse.
Si incorre nella fallacia del "Base-rate neglect" quando non si tiene nel dovuto conto tale frazione nel formulare un giudizio di probabilità.

Es.5.22.In città l' 85% dei taxi sono verdi e il 15% blu. Un teste corretto nell'80% dei casi dice che in un incidente era coinvolto un taxi blu. Con che prob il taxi era verde? La prob e' 1- la prob che fosse blu. Quest'ultima è, usando Bayes, con B: "taxi blu" e D: "teste dice taxi blu"

$$Pr(B|D) = \frac{Pr(D|B)Pr(B)}{Pr(D|B)Pr(B) + Pr(D|\neg B)Pr(\neg B)} = \frac{.8.15}{.8.15 + .2.85} \approx 0.41$$

Come vedete prevale l'effetto "frazione dei taxi verdi".
Es.5.22 Analogo 5.23

Es. 5.24. La prob del figlio di una donna minore di 34 anni di nascere Down è 0.001, 0.01 se maggiore di 34. I bambini nascono per il 90% da donne minori di 34 anni. D. Qual'è la prob che un bambino Down sia nato da una donna con meno di 34 anni? R: La prob per un bambino di essere Down è $0.001 * 0.9 + 0.01 * 0.1$. Dei bambini Down una frazione:

$$\frac{0.001 * 0.9}{0.001 * 0.9 + 0.01 * 0.1} \approx 47\%$$

è nata da madri minori di 34 anni.

Es. 5.25. L'uccisione di Jean Charles de Menezes. Dopo gli attacchi dell'Ira nel 2005 la polizia ricevette l'ordine di sparare a ogni sospetto e de Menezes venne ucciso. D. Ipotizzando che i sospetti della polizia fossero fondati nel 99,9% dei casi e che a Londra i sospetti fossero 10 su 10 milioni qual'era la probabilità che quelli a cui si era sparato sarebbero risultati terroristi?R. Usando Bayes. B=Terrorista,D=ucciso

$Pr(B|D) = \frac{Pr(D|B)*Pr(B)}{Pr(D|B)*Pr(B)+Pr(D|\neg B)*Pr(\neg B)} = \frac{\frac{10}{10000000}\frac{999}{1000}}{\frac{10}{10000000}\frac{999}{1000}+\frac{9999990}{10000000}\frac{1}{1000}} \simeq$ 0,1%

Es. 5.26. Analogo a 5.25.

Il Bias della conferma

Il Bias della conferma (confirmation bias) è la tendenza degli individui ad interpretare l'evidenza come favorevole alle proprie convinzioni in misura superiore al giusto.
Un razzista noterà tra appartenenti ad altre etnie solo i tipi peggiori ecc.
Tale bias spiega anche l'importanza della reputazione.

Euristica della Disponibilità

L'euristica della disponibilità ci induce a valutare un evento più probabile se ne abbiamo esperienza più recente, più diretta, più impressa nella memoria ecc., ossia se ci viene più facilmente in mente, se ne abbiamo un ricordo più "disponibile".
Es. abbiamo paura dei lupi per la favola di Cappuccetto Rosso, anche se sono creature ormai timidissime verso l'uomo. Oppure abbiamo paura degli attentati terroristici (di cui parlano i media) ma non degli incidenti stradali: più di 3.000 morti nel 2019 in Italia. Una nota di ottimismo: nel 2001 erano molti di più invece che 55 per milione di abitanti 124 per milione di abitanti, dati commissione europea.

Overconfidence

Siete perfettamente **calibrati** se quando dite che quanto affermate sarà vero in un certa proporzione di casi la proporzione è quella che si osserverà in seguito. Es. se dite che lanciando una moneta uscirà testa la metà delle volte siete perfettamente calibrati.
Siete **overconfident,** ovvero soffrite di un eccesso di fiducia nelle vostre affermazioni, se la proporzione che dichiarate eccede la probabilità oggettiva.
L' overconfidence è endemica (anche tra professionisti, medici, fisici ecc. *non* metereologi) e cresce con la complessità dei problemi. Beware of experts!
Overconfident professionals sincerely believe they have expertise, act as experts and look like experts. You will have to struggle to remind yourself that they may be in the grip of an illusion."
—Daniel Kahneman(Kahneman, Daniel (19 October 2011). "Don't Blink! The Hazards of Confidence". New York Times. Adapted from: Kahneman, Daniel (2011). Thinking, Fast and Slow)

Overconfidence

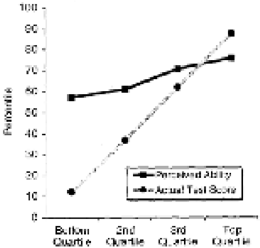
Perchè?1) Bias della conferma. Tendiamo a ricordare i nostri successi, non i nostri fallimenti. 2) Bias della disponibilità. Ci viene alla mente più facilmente il caso in cui abbiamo avuto ragione 3) **hindsight bias** tendiamo a modificare ex post le nostre previsioni per conformarle a quanto realmente accaduto.

Effetto Dunning-Kruger

L'effetto Dunning-Kruger è una distorsione cognitiva a causa della quale gli individui poco abili o poco esperti tendono a sopravvalutare le proprie abilità.

Justin Kruger e David Dunning sono i due psicologi che la individuarono per primi in un esperimento tra studenti di psicologia della Cornell University, cui furono poste questioni di logica, grammatica e umorismo.

Kruger, J; Dunning, D. (1999). "Unskilled and Unaware of It: How Difficulties in Recognizing One's Own Incompetence Lead to Inflated Self-Assessments". Journal of Personality and Social Psychology. 77 (6): 1121–1134. Il grafico sotto viene dal paper.



Successivamente l'effetto è stato molto ridimensionato. Ci sono seri problemi tecnici nella costruzione del grafico: in realtà metà dei soggetti dava una valutazione accurata. Sono inoltre importanti i fattori culturali. In Giappone l'overconfidence non è diffusa come negli Usa. Il fatto assodato è che si impara ad autovalutarsi

Ricapitolando

Independenza
Legge dei Piccoli Numeri
Fallacia della Congiunzione
Fallacia della Disgiunzione
Base-rate neglect
Bias della Conferma
Euristica della Disponibilità
Overconfidence

La disuguaglianza di Chebyshev

La probabilità che la realizzazione di una variabile casuale si discosti dalla media più di un certo numero positivo moltiplicato per la deviazione standard (radice della varianza) è inversamente proporzionale al quadrato del numero. Più formalmente:

Proposizione

Sia X una variabile casuale con valore atteso finito μ e varianza finita diversa da zero σ^2. Per qualsiasi numero reale $k > 0$,
$Pr(|(X-\mu)| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$.

Prova: (Per variabili discrete)
Sia X una variabile casuale discreta con valore atteso finito μ e varianza finita $\sigma^2 > 0$ e densità f.
Abbiamo $\sigma^2 = \sum_i (X_i - \mu)^2 f(X_i)$,dove la sommatoria viene condotta su tutti i possibili valori di X. Consideriamo poi solo i valori X_j tali che $|X_j - \mu| \geq k\sigma$,ossia tali che $(X_j - \mu)^2 \geq k^2\sigma^2$.
Abbiamo:
$\sigma^2 = \sum_i (X_i - \mu)^2 f(X_i) \geq \sum_{j||X_j-\mu|\geq k\sigma} (X_j - \mu)^2 f(X_j) \geq$
$\sum_{j||X_j-\mu|\geq k\sigma} \sigma^2 k^2 f(X_j) = \sigma^2 k^2 \sum_{j||X_j-\mu|\geq k\sigma} f(X_j) =$
$k^2\sigma^2 \Pr(|X_j - \mu| \geq k\sigma)$
$1/k^2 \geq \Pr(|X_j - \mu| \geq k\sigma)$
QED

Legge dei grandi numeri

Supponiamo di avere X_i i=1,2...n variabili, per es. n risultati del lancio di un dado. Il valore medio dei risultati (media campionaria) se n è grande sarà vicino alla media della distribuzione di ciascuna variabile data da:
$\frac{\sum_{i=1}^{6} i}{6} = \frac{6*7}{12} = 3.5$
La distribuzione è uniforme quindi la varianza di ciascuna X_i è$\frac{n^2-2}{12.}$, $n = 6$

Proposizione

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *n variabili indipendenti ciascuna con varianza* σ^2 $<\infty$ *e media* μ. *Sia* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *allora per ogni reale* $\varepsilon > 0$*:*
$\lim_{n\to\infty} \Pr |\frac{S_n}{n} - \mu| \geq \varepsilon = 0.$

Prova:

Siccome le X_i sono indipendenti e hanno la stessa varianza avremo:
$E(\frac{S_n}{n}) = \mu$,$Var(S_n) = n\sigma^2$, $Var(\frac{S_n}{n}) = \frac{\sigma^2}{n} \equiv \sigma_n^2$. $Var(\frac{S_n}{n}) \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$
Ricordiamo: date due variabili indipendenti x e y, a e b numeri reali,
E(ax+by)=aEx+bEy.
Var(x+y)=Var(x)+Var(y), mentre Var(ax+by)=a^2Var(x)+b^2Va$\cancel{r}$(y). Il ragionamento può ripetersi per n variabili. Nel nostro caso quindi
$E\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{n\mu}{n} = \mu$,$Var(S_n) = Var\sum_{i=1}^{n} X_i = n\sigma^2$,
$Var(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2} Var\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n^2} Var(S_n) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n})$

Usiamo la disuguaglianza di Chebishev per la variabile S_n/n,notando che rispetta le assunzioni per la sua validità (varianza strettamente positiva e finita e media finita).
Partiamo da $\frac{1}{k^2} \geq \mathrm{Pr}(|(X\text{-}\mu)| \geq k\sigma)$. Poniamo $k\sigma = \varepsilon$,ovvero $1/k^2 = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.
Possiamo scrivere:
$\mathrm{Pr}(|(X\text{-}\mu)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.
Nel nostro caso la variabile X è $\frac{S_n}{n}$,con varianza σ_n^2:
$\mathrm{Pr}(|(\frac{S_n}{n}\text{-}\mu)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$
ossia $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Pr}\,|\frac{S_n}{n} - \mu| \geq \varepsilon = 0$.
QED

Prova della disuguaglianza di Chebishev per le variabili continue.
Partiamo dalla disuguaglianza di Markov: Dati c reale positivo e una variabile casuale y con densità f(y) avremo:
E(|y|)=$\int_{-\infty}^{\infty} |y| f(y) = \int_{-\infty}^{c} |y| f(y) + \int_{c}^{\infty} y f(y) \geq \int_{c}^{\infty} y f(y) \geq c \int_{c}^{\infty} f(y) = c \Pr(y \geq c)$
Applichiamo la disuguaglianza di Markov alla variabile $(x-\mu)^2$e sia c=$(k\sigma)^2$
E$(x-\mu)^2 \geq (k\sigma)^2 \Pr((x-\mu)^2 \geq (k\sigma)^2)$
Poichè 1) E$(x-\mu)^2 = \sigma^2$
2) $(x-\mu)^2 \geq (k\sigma)^2) \leftrightarrow |x-\mu| \geq k\sigma$, quindi $\Pr((x-\mu)^2 \geq (k\sigma)^2) =$ Pr(|(X-μ)| $\geq k\sigma$)
possiamo scrivere:
$\sigma^2 \geq (k\sigma)^2$Pr(|(X-$\mu$)| $\geq k\sigma$)
$\frac{1}{k^2} \geq$Pr(|(X-μ)| $\geq k\sigma$), *QED*

La disuguaglianza di Chebyshev
La probabilità che la realizzazione di una variabile casuale si discosti dalla media più di un certo numero positivo moltiplicato per la deviazione standard (radice della varianza) è inversamente proporzionale al quadrato del numero. Più formalmente:

Proposizione

Sia X una variabile casuale con valore atteso finito μ e varianza finita diversa da zero σ^2. Per qualsiasi numero reale $k > 0$,
$Pr(|(X-\mu)| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$.

Prova: (Per variabili discrete)
Sia X una variabile casuale discreta con valore atteso finito μ e varianza finita $\sigma^2 > 0$ e densità f.
Abbiamo $\sigma^2 = \sum_i (X_i - \mu)^2 f(X_i)$,dove la sommatoria viene condotta su tutti i possibili valori di X. Consideriamo poi solo i valori X_j tali che $|X_j - \mu| \geq k\sigma$,ossia tali che $(X_j - \mu)^2 \geq k^2\sigma^2$.
Abbiamo:
$\sigma^2 = \sum_i (X_i - \mu)^2 f(X_i) \geq \sum_{j||X_j-\mu|\geq k\sigma} (X_j - \mu)^2 f(X_j) \geq$
$\sum_{j||X_j-\mu|\geq k\sigma} \sigma^2 k^2 f(X_j) = \sigma^2 k^2 \sum_{j||X_j-\mu|\geq k\sigma} f(X_j) =$
$k^2\sigma^2 \Pr(|X_j - \mu| \geq k\sigma)$
$1/k^2 \geq \Pr(|X_j - \mu| \geq k\sigma)$
QED

Legge dei grandi numeri

Supponiamo di avere X_i i=1,2...n variabili, per es. n risultati del lancio di un dado. Il valore medio dei risultati (media campionaria) se n è grande sarà vicino alla media della distribuzione di ciascuna variabile data da:
$\frac{\sum_{i=1}^{6} i}{6} = \frac{6*7}{12} = 3.5$
La distribuzione è uniforme quindi la varianza di ciascuna X_i è$\frac{n^2-2}{12.}, n = 6$

Proposizione

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variabili indipendenti ciascuna con varianza σ^2 $<\infty$ e media μ. Sia $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ allora per ogni reale $\varepsilon > 0$:
$\lim_{n\to\infty} \Pr|\frac{S_n}{n} - \mu| \geq \varepsilon = 0.$

Prova:

Siccome le X_i sono indipendenti e hanno la stessa varianza avremo:
$E(\frac{S_n}{n}) = \mu$,$\mathrm{Var}(S_n) = n\sigma^2$, $\mathrm{Var}(\frac{S_n}{n}) = \frac{\sigma^2}{n} \equiv \sigma_n^2$. $\mathrm{Var}(\frac{S_n}{n}) \longrightarrow 0$ se $n \longrightarrow \infty$
Usiamo la disuguaglianza di Chebishev per la variabile S_n/n,notando che rispetta le assunzioni per la sua validità (varianza strettamente positiva e finita e media finita).
Partiamo da $\frac{1}{k^2} \geq \Pr(|(X-\mu)| \geq k\sigma)$. Poniamo $k\sigma = \varepsilon$,ovvero $1/k^2 = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.
Possiamo scrivere:
$\Pr(|(X-\mu)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.
Nel nostro caso la variabile X è $\frac{S_n}{n}$,con varianza σ_n^2:
$\Pr(|(\frac{S_n}{n}-\mu)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$
ossia $\lim_{n\to\infty} \Pr|\frac{S_n}{n} - \mu| \geq \varepsilon = 0$.
QED

Prova della disuguaglianza di Chebishev per le variabili continue.
Partiamo dalla disuguaglianza di Markov: Dati c reale positivo e una variabile casuale y con densità f(y) avremo:
E(|y|)=$\int_{-\infty}^{\infty} |y| f(y) = \int_{-\infty}^{c} |y| f(y) + \int_{c}^{\infty} yf(y) \geq \int_{c}^{\infty} yf(y) \geq c \int_{c}^{\infty} f(y) = c \Pr(y \geq c)$
Applichiamo la disuguaglianza di Markov alla variabile $(x-\mu)^2$e sia c=$(k\sigma)^2$
E$(x-\mu)^2 \geq (k\sigma)^2 \Pr((x-\mu)^2 \geq (k\sigma)^2)$
Poichè 1) E$(x-\mu)^2 = \sigma^2$
2) $(x-\mu)^2 \geq (k\sigma)^2) \leftrightarrow |x-\mu| \geq k\sigma$, quindi $\Pr((x-\mu)^2 \geq (k\sigma)^2) =$ Pr(|(X-μ)| $\geq k\sigma$)
possiamo scrivere:
$\sigma^2 \geq (k\sigma)^2$Pr(|(X-$\mu$)| $\geq k\sigma$)
$\frac{1}{k^2} \geq$Pr(|(X-μ)| $\geq k\sigma$), *QED*