

ASSET ALLOCATION RAZIONALE

Modelli euristici e bayesiani a supporto delle scelte di portafoglio

Indice

CAPITOLO 1:	UN APPROCCIO GENERALE ALLA COSTRUZIONE DI PORTAFOGLIO	2
1.1	Introduzione	2
1.2	Le fasi della <i>portfolio construction</i>	3
1.2.1	Identificazione delle preferenze dell'investitore	3
1.2.2	Stima dell'andamento futuro delle <i>asset class</i>	10
1.2.3	L'ottimizzazione	10
CAPITOLO 2:	LE ORIGINI: L'OTTIMIZZAZIONE MEDIA-VARIANZA	13
2.1	Introduzione	13
2.2	L'investitore di Markowitz	15
2.3	Rendimento e rischio di portafoglio	20
2.4	La costruzione della frontiera efficiente	25
2.4.1	Il caso di due soli <i>asset</i> in portafoglio	25
2.4.2	Il caso generico di <i>n asset</i> in portafoglio	29
2.5	Tecniche di calcolo dei portafogli efficienti	32
2.6	Una applicazione pratica	36
2.7	La selezione del portafoglio ottimo per l'investitore	40
2.8	Markowitz, tra mito e false credenze	46
Appendice A.2.1: La stima dei portafogli efficienti con il metodo della <i>critical line</i>		50
Appendice A.2.2: La costruzione dei portafogli efficienti con il metodo della <i>Lagrangiana</i>		67
CAPITOLO 3:	ESTIMATION ERROR ED ALTRI PROBLEMI DELLA MARKOWITZ-BASED PORTFOLIO CONSTRUCTION	77
3.1	Introduzione	77
3.2	Le critiche mosse alle ipotesi del modello	78
3.2.1	L'ottimizzazione basata sul principio media-varianza ignora qualsiasi preferenza verso momenti statistici di ordine superiore al secondo	78
3.2.2	Il modello di Markowitz suppone che gli investitori siano caratterizzati da un unico orizzonte temporale	86
3.2.3	La deviazione standard è una misura di rischio troppo semplificata	92
3.3	Le critiche mosse all'applicazione pratica del modello	100
3.4	L'instabilità dei portafogli efficienti	107
3.5	Le conseguenze degli <i>errori di stima</i>	118
3.5.1	L'esperimento di Jobson e Korkie (1980)	122
3.5.2	L'esperimento di Frankfurter, Phillips e Seagle (1971)	130
3.5.3	<i>Efficient</i> versus <i>Naive portfolio</i>	139
3.6	Conclusioni	143
CAPITOLO 4:	LE TECNICHE EURISTICHE	146
4.1	Introduzione	146
4.2	La soluzione dei vincoli di peso	152
4.2.1	Vincoli infra-gruppo e scostamento dai portafogli neutrali	157
4.2.2	<i>Efficient</i> versus <i>Constrained portfolio</i>	167
4.3	La tecnica del <i>Resampling</i>TM	171
4.3.1	La scelta dell'ampiezza <i>N</i> dei rendimenti simulati	183
4.3.2	<i>Resampling</i> TM versus <i>Efficient portfolio</i>	190

CAPITOLO 5: ASSET ALLOCATION BAYESIANA	197
5.1 Introduzione	197
5.2 Gli stimatori bayesiani.....	200
5.3 Gli <i>shrinkage estimator</i>	206
5.3.1 Dalla teoria alla pratica.....	211
5.3.2 <i>Shrinkaged</i> versus <i>sampled</i> portafoglio.....	226
5.3.3 Una riflessione finale.....	231
5.4 Il modello di Black e Litterman.....	232
5.4.1 <i>Le analytics del modello</i>	237
5.4.2 Applicazione pratica.....	250
5.5 Combinare modelli euristici e bayesiani	271

Prefazione

Il tema della costruzione di portafoglio suscita da sempre un forte interesse sia in ambito accademico che operativo. Le scelte di *asset allocation* costituiscono un problema ricorrente: ogni investitore è impegnato - personalmente o con il supporto di un gestore - a combinare diverse *asset class* per giungere ad un investimento coerente con le proprie preferenze. L'esigenza di supportare gli *asset manager* nello svolgimento di questo esercizio ha alimentato una vastissima letteratura sul tema che, privilegiando un'interpretazione matematica e statistica dell'*asset allocation*, ha apportato un enorme contributo in termini di rigore formale. In pratica, a fronte di un processo intuitivo e all'apparenza semplice (per costruire un portafoglio è sufficiente combinare più attività), la letteratura finanziaria riconduce l'*asset allocation* all'interno di un *framework* matematico che impone la stima di parametri statistici e lo sviluppo di ottimizzazioni finalizzate alla massimizzazione delle preferenze degli investitori.

Ciò nonostante, le evidenze empiriche suggeriscono che la produzione di modelli formali di *portfolio construction* appare sproporzionata rispetto al loro reale utilizzo. È infatti più usuale imbattersi in gestori di portafoglio che sviluppano strategie di investimento qualitative, piuttosto che in *asset manager* che alimentano modelli riconducibili a rigorosi processi matematici. Quali sono le ragioni alla base dello scarso utilizzo della *quantitative finance*?

In primo luogo, un modello matematico, per complesso ed articolato che sia, si basa pur sempre su ipotesi semplicistiche che rendono il processo di costruzione di portafoglio incapace di incorporare tutte le problematiche operative che accompagnano le scelte di *asset allocation*. In secondo luogo, gli *asset manager* sono restii a delegare le scelte di

investimento ad un modello matematico che, non essendo fedele al loro *modus operandi*, conduce a portafogli dalla composizione sovente irragionevole, perché contrastante con le regole di costruzione abitualmente utilizzate.

Il lettore non avvezzo alla prassi quotidiana dell'*asset management* potrà trovare singolare l'assunto che un gestore rifiuti aprioristicamente una logica matematica; in realtà, nei comportamenti umani è piuttosto frequente la tendenza a rigettare modelli dal funzionamento "oscuro", dai risultati contrastanti con la propria operatività e la cui accettazione è assimilabile ad un "atto di fede".

Questi fattori rischiano di provocare un pericoloso scollamento tra teoria e pratica:

- la letteratura finanziaria sull'*asset allocation* può diventare fine a se stessa, un esercizio formale privo di qualsiasi risvolto operativo;
- l'*asset manager* può essere assimilato più ad un artigiano o ad un "chiaroveggente" che ad uno scienziato.

Se nelle realtà finanziarie più sviluppate, tipiche del mondo anglosassone, questo pericolo è scongiurato, nei mercati – come quello italiano – ove la cultura della distribuzione prevarica la cultura della gestione, è forte il rischio di depauperare la *portfolio construction* di contenuti matematico-statistici. Il passaggio da una logica artigianale ad una scientifica presuppone, quindi, anche un cambiamento culturale.

Negli ultimi venti anni si è assistito ad una moltiplicazione dei contributi scientifici dedicati alla creazione di modelli di *asset allocation* il più possibile coerenti con l'operatività dei gestori. Questi lavori non presentano certo la "nobiltà" scientifica di contributi storici come quelli di Markowitz (1952, 1956, 1959), Tobin (1958), Sharpe (1964), Lintner (1965), Mossin (1966) e Ross (1976, 1977), che hanno contribuito alla nascita e allo sviluppo della *Modern Portfolio Theory*. Tuttavia, questo nuovo filone di ricerca ha il pregio di avere accostato la teoria alla pratica. Il libro che vi accingete a leggere si colloca all'interno di questo ambito.

L'obiettivo è quello di fornire una illustrazione delle diverse tecniche di costruzione del portafoglio. Partendo dai limiti dell'approccio media-varianza di Markowitz, si passano in rassegna alcuni modelli innovativi che, superando tali limiti, si candidano a soluzioni di equilibrio tra rigore metodologico ed applicabilità pratica. I temi centrali, ampiamente approfonditi nel lavoro, sono quello della gestione dell'incertezza delle stime dei parametri che alimentano l'ottimizzazione e della costruzione di portafogli

dalla composizione giudicata (dai gestori) ragionevole. L'analisi si focalizzerà sulla costruzione di portafogli di mercati, ignorando il tema della selezione dei singoli titoli.

Per tipologia di argomenti trattati questo lavoro è assimilabile ai contributi di Michaud (1998), Scherer (2002), Satchell e Scowcroft (2003) e Meucci (2005). Non esistendo, a conoscenza di chi scrive, libri in lingua italiana raffrontabili per taglio e contenuti, questo testo ambisce a colmare un vuoto della letteratura finanziaria del nostro paese. Al di là degli spunti che garantiscono un apporto di originalità al tema della costruzione di portafoglio, il contributo dell'attività di ricerca alla base del presente volume riguarda soprattutto la natura innovativa del percorso logico seguito nella trattazione.

La selezione di portafoglio è uno dei temi verso i quali confluisce una pluralità di discipline; la natura dei temi trattati ne favorisce infatti una lettura poliedrica:

- la Teoria della Finanza e l'Economia dei Mercati Monetari e Finanziari propongono una interpretazione economica, riconducendo la costruzione del portafoglio nell'alveo delle scelte in condizioni di incertezza e approfondendo temi quali il comportamento dell'investitore in situazioni rischiose e la definizione della funzione di utilità attesa da massimizzare (cfr. Beltratti, 1996);
- la Matematica Finanziaria pone l'accento sulla natura quantitativa della *portfolio construction*, interpretando quest'ultima alla stregua di un problema di ottimizzazione, da risolvere con il supporto di algoritmi diretti ed iterativi (cfr. Szegö, 1981);
- l'Economia del Mercato Mobiliare predilige un approccio aziendalistico, studiando il tema in oggetto nell'ottica delle imprese (nello specifico, delle *investment company*) e focalizzandosi sulle concrete esigenze degli operatori impegnati nell'attività di gestione di portafoglio (cfr. Fabrizi, 2003 e Caparrelli, 2004).

Questo testo si colloca all'interno della disciplina dell'Economia del Mercato Mobiliare; ne sono una prova la posizione centrale che viene attribuita alla figura dell'*asset manager*, nonché la tendenza a giudicare i modelli sulla base della loro capacità di imitare il *modus operandi* dei gestori.

L'attore principale è il gestore di portafoglio e non, come accade negli scritti economici sulla *Teoria di Portafoglio*, l'investitore. Si assume che quest'ultimo, finanziariamente impreparato e quindi irrazionale, attribuisca al gestore il mandato ad

operare per suo conto. Pertanto, in virtù delle imperfezioni di mercato (qui identificabili nella incapacità dell'investitore di gestire autonomamente le scelte di portafoglio), è l'*asset manager* che costruisce i portafogli, mentre l'investitore ha il ruolo del mandante impegnato nel mero trasferimento delle informazioni necessarie per l'interpretazione delle sue preferenze.

L'obiettivo che si persegue non è quello di valutare la correttezza formale dei modelli di *asset allocation*, bensì quello di analizzarne le potenzialità applicative. Il testo si prefigge infatti di:

- indagare la coerenza tra i modelli quantitativi e l'operatività dei gestori;
- valutare i modelli statistico-matematici sulla base della loro concreta applicabilità.

In sintesi, non si rincorre il modello formalmente più elegante, ma quello con i risvolti applicativi più interessanti. Il tema della costruzione del portafoglio è multidisciplinare ed è pertanto improponibile proporre una analisi completa senza sconfinare nella matematica e nella statistica. In ogni caso le trattazioni quantitative non saranno mai fini a se stesse, ma utilizzate per una migliore comprensione degli argomenti. Il cospicuo ricorso ad esempi numerici sarà comunque di ausilio per l'apprendimento. La maggior parte delle esemplificazioni potrà essere facilmente replicata dal lettore, così da verificare la comprensione degli argomenti (e degli algoritmi).

Spero che il tentativo di *putting theory at-work*, sia riuscito. L'esperienza didattica maturata dallo scrivente nei corsi *graduate* e *post-graduate* presso l'Università di Roma "Tor Vergata", l'Università "Luigi Bocconi" e la SDA Bocconi è incoraggiante e conferma un generalizzato apprezzamento per il taglio qui proposto.

Struttura del lavoro

Il libro è suddiviso in 5 Capitoli.

Il Capitolo 1 propone una rapida descrizione dell'*iter* di costruzione del portafoglio. Lo scopo è quello di identificare le fasi elementari alla base della creazione di una strategia di investimento: identificazione delle preferenze dell'investitore, stima dell'andamento futuro delle asset class e ottimizzazione. Il taglio della trattazione è volutamente qualitativo, lasciando ai capitoli successivi il compito di effettuare gli approfondimenti analitici.

Il Capitolo 2 offre una *review* del modello di Markowitz. Questa è la parte più tradizionale dell'intero volume: chiunque abbia una conoscenza consolidata dell'approccio media-varianza può ignorarla, passando direttamente ai capitoli successivi. Non mancheranno, tuttavia, alcuni approfondimenti relativi a tematiche raramente trattate all'interno dei testi più convenzionali; tra questi, un esempio di applicazione della ottimizzazione matematica originariamente proposta da Markowitz (il metodo della *critical line*) e l'analisi delle "false credenze" che ruotano attorno al modello.

Il Capitolo 3 si focalizza sulle critiche mosse all'approccio di Markowitz. Nella prima parte si analizzano le problematiche riconducibili alle ipotesi di base:

- l'ottimizzazione basata sul principio media-varianza ignora qualsiasi preferenza verso momenti statistici di ordine superiore al secondo;
- il modello suppone che gli investitori siano caratterizzati da un unico orizzonte temporale;
- pur in un contesto bidimensionale, la deviazione standard (la varianza) è una misura di rischio troppo semplificata, incapace di discriminare tra fenomeni premianti e penalizzanti.

Si propone una *review* della letteratura e si presentano delle soluzioni utili allo scopo di rimuovere alcune delle ipotesi semplificatrici relative al comportamento degli investitori.

Nella parte finale del Capitolo ci si focalizza su alcune problematiche relative alla applicazione pratica del modello: l'instabilità dei portafogli efficienti, la loro composizione irragionevole e le conseguenze riconducibili agli errori di stima.

Il Capitolo 4 si focalizza sull'uso delle tecniche euristiche come soluzione ai problemi dell'*estimation error* e della instabilità ed irragionevolezza dei portafogli. Si passano in rassegna le ottimizzazioni con vincoli di peso e la tecnica del *resampling*TM.

Il Capitolo 5 affronta il tema dell'uso degli stimatori *bayesiani* nella costruzione di portafoglio. L'indagine si focalizza sull'utilizzo degli *shrinkage estimator* e del modello di Black-Litterman.

Limiti del lavoro e prospettive future di ricerca

Questo volume non ha aspirazioni enciclopediche e non ambisce quindi a coprire

tutto lo scibile umano che ruota attorno alla *portfolio construction*. L'analisi si focalizza sulle scelte di *asset allocation* relative ad orizzonti uniperiodali, ignorando dunque la *stock-bond selection* e le strategie di *market timing*. Inoltre, vi sono alcuni temi che, se pur di indubbia rilevanza, sono stati trattati superficialmente o ignorati; tra gli argomenti che avrebbero meritato un approfondimento, citiamo:

- i modelli di portafoglio multiperiodali;
- l'introduzione di variabili comportamentali all'interno della funzione di preferenze dell'investitore;
- i modelli econometrici di stima dei parametri alla base delle ottimizzazioni (nella trattazione ci si è "rifugiati" nell'ipotesi che i rendimenti delle *asset class* siano serialmente indipendenti ed identicamente distribuiti);
- le strategie di *portfolio insurance*;
- l'utilizzo dell'intelligenza artificiale per l'ottimizzazione di funzioni di preferenze complesse.

Soprattutto quest'ultimo argomento suggerisce ambiti di ricerca ancora inesplorati, che chi scrive di ripromette di approfondire, analizzando l'utilizzo degli algoritmi genetici nella ottimizzazione di portafoglio.

Target audience ed implicazioni di policy

Mutuando le parole di Markowitz (1959): «*The monograph is written primarily with the non-mathematician in mind*». Questo libro è stato scritto pensando principalmente agli operatori dell'*investment industry*: gestori, consulenti e analisti quantitativi. Il lavoro è di ausilio sia per coloro che intendono affinare i modelli di *asset allocation*, sia per gli scettici verso i modelli quantitativi, che troveranno in questo libro delle proposte utili al fine di attribuire un maggior rigore formale alla loro operatività, senza stravolgerla. Il volume può rappresentare un punto di riferimento per tutti gli attori economici, istituzionali (fondi pensione, banche, SGR, SIM, società di assicurazione) e non, impegnati nella prestazione dei servizi di investimento. Dati i temi trattati, il testo è di ausilio soprattutto nello sviluppo del servizio di *asset allocation strategica*.

Il libro può essere un valido testo di riferimento per quei corsi *graduate* e *post-*

graduate sull'*asset management* che hanno l'ambizione di andare oltre una trattazione "scolastica" del principio media-varianza, affrontando le problematiche operative che accompagnano l'utilizzo dei modelli di *portfolio construction*.

Il volume può essere di ausilio alla folta schiera di soggetti con forti competenze quantitative (fisici, matematici, ingegneri e statistici) che operano o aspirano ad operare nell'ambito dei mercati finanziari. Il contributo offerto a questi soggetti sta nella analisi dei requisiti che un *asset manager* chiede ad un modello quantitativo di *asset allocation* affinché questo possa essere concretamente applicato.

Infine, il libro è accessibile a tutti coloro che hanno una conoscenza di base dei mercati finanziari, del calcolo matematico, della statistica e dell'algebra matriciale.

Ringraziamenti

Le persone a cui essere grato sono, per mia fortuna, tante. Un grazie ad Alessandro Carretta per i suoi preziosi suggerimenti e per il ruolo di guida, svolto con maestria ed autorevolezza. Un grazie a Andrea Sironi per i suoi spunti utilissimi, frutto della sua competenza poliedrica. La mia gratitudine va a Andrea Resti, Roberto Rocci e Sergio Scarlatti le cui profonde competenze matematico-statistiche sono state di grosso supporto per affinare il rigore metodologico di questo lavoro. E, *last but not least*, desidero ringraziare Emanuele Carluccio, Paolo Cucurachi e Davide Maspero, non solo per i preziosi suggerimenti, ma per il tempo passato insieme a discutere delle tematiche trattate in questo libro; il contributo di questi dibattiti nella maturazione della mia visione dell'*asset allocation* è stata determinante. Grazie di cuore.

Ho un grosso debito di riconoscenza nei confronti di tutti gli studenti e professionisti che mi hanno "sopportato" nei corsi *graduate*, *post-graduate* ed *executive* e dai quali ho raccolto preziosi spunti che hanno contribuito ad accrescere le mie capacità didattiche e di ricerca. Un grazie particolare ai miei ex-tesisti, molti dei quali sono oggi professionisti di successo.

Infine, un ringraziamento generalizzato va alle persone del Dipartimento di Studi Economico-Finanziari e Metodi Quantitativi (SEFeMeQ) dell'Università di Roma "Tor Vergata", dell'Istituto di Economia dei Mercati e degli Intermediari Finanziari (IEMIF) dell'Università "Luigi Bocconi" di Milano e dell'Area Intermediazione Finanziaria e

Assicurazioni (AIFA) della SDA Bocconi. Queste organizzazioni, grazie alle persone che le compongono, hanno rappresentato degli ambienti di lavoro straordinari, umanamente accoglienti ed intellettualmente stimolanti.

BIBLIOGRAFIA

- Alexander, G., Baptista, A. (2002), "*Economic Implications of Using Mean-VaR Model for Portfolio Selection: A Comparison with Mean-Variance Analysis*", Journal of Economic Dynamics Control, 26.
- Anderson, T.W. (1984), "*An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*", Wiley.
- Arditti, F. (1967), "*Risk and the Required Return on Equity*", Journal of Finance, 12, n°1, March.
- Arditti, F., Levy, H. (1975), "*Portfolio Efficiency Analysis in Three moments: The Multiperiod Case*", Journal of Finance, 30, n°3, June.
- Avramov, D. (2002), "*Stock return predictability and model uncertainty*", Journal of Financial Economics, n°64.
- Baldick, R. (2006), "*Applied Optimization. Formulation and Algorithms for Engineering System*", Cambridge University Press.
- Barry, C.B. (1974), "*Portfolio Analysis Under Uncertain Means, Variances, and Covariances*", Journal of Finance, Vol.29, n°2, May.
- Barry, C.B. (1975), "*Specification Uncertainty in Portfolio Analysis*", Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economics Statistic Section.
- Barry, C.B. (1978), "*Effect of Uncertain and Non-Stationary Parameters Upon Capital Market Equilibrium Conditions*", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 13, n°3, September.
- Barry, C.B., Winkler, L.R. (1975), "*A Bayesian Model for Portfolio Selection and Revision*", Journal of Finance, 30, March.
- Barry, C.B., Winkler, L.R. (1976), "*Nonstationarity and Portfolio Choice*", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 11, June.
- Basak, S., Shapiro, A. (2001), "*Value-at-Risk Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Pricing*", Review of Financial Studies, 14.
- Bawa, V.S., Brown, S.J., Klein, R.W. (1979), "*Estimation Risk and Optimal Portfolio Choice*", Studies in Bayesian Econometrics Bell Laboratories Series, New York, North Holland.
- Beltratti, A. (1996), "*Teoria della Finanza*", Laterza, Roma-Bari.
- Berger, J. (1978), "*Minimax Estimation of a Multivariate Normal Mean under Polynomial Loss*", Journal of Multivariate Analysis, 8, June.

- Bernoulli, D. (1738), *Specimen theoriae novae de mensura sortis*, in *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitannae*; tradotto dal latino in inglese da Sommer, L., *Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk*, *Econometrica* 22.
- Best, M.J., Grauer, R.R. (1991a), “*Sensitivity Analysis for Mean-Variance Portfolio Problems*”, *Management Science*, Vol. 37, n°8, August.
- Best, M.J., Grauer, R.R. (1991b), “*On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results*”, *The Review of Financial Studies*, Vol. 4, n°2.
- Bevan, A., Winkelmann, K. (1998), “*Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience*”, *Fixed Income Research*, Goldman Sachs Company, December.
- Black, F., Litterman, R. (1990), “*Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium*”, *Goldman Sachs Fixed Income Research*, September.
- Black, F., Litterman, R. (1992), “*Global Portfolio Optimization*”, *Financial Analysts Journal*, 48, September-October.
- Black, F. (1993), “*Estimating Expected Return*”, *Financial Analyst Journal*, September-October.
- Brandt, M.W. (1995), “*Portfolio Choice Problems*”, in Ait-Sahalia, Y., Hansen, L. (eds) “*Handbook of Financial Econometrics*”, North-Holland, Amsterdam.
- Brealey, R.A. (1991), “*Harry M. Markowitz’s Contributions to Financial Economics*”, *Scand. Journal of Economics*, 93.
- Britten-Jones, M. (1999)., “*The Sampling Error in Estimates of Mean-Variance Efficient Portfolio Weights*”, *The Journal of Finance*, Vol. 54, n°2, April.
- Brown, L.D. (1966), “*On the Admissibility of Invariant Estimators of One or More Location Parameters*”, *Annals of Mathematical Statistics*, 37, August.
- Brown, L.D. (1975), “*Estimation with Incompletely Specified Loss Function*”, *Journal of the American Statistical Association*, 70, June.
- Brown, S. (1978), “*The Portfolio Choice Problem: Comparison of Certainty Equivalent and Optimal Bayes Portfolio*”, *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, B7.
- Caparrelli, F. (2004), “*Economia del Mercato Mobiliare*”, McGraw-Hill, Milano
- Chambers, S. P. (1934), *Fluctuations in Capital and the Demand for Money*, *Review of Economic Studies*, 2.
- Chan, L., Karceski, J., Lakonishok, J. (1999), “*On Portfolio Optimization: Forecasting*

Covariances and Choosing the Risk Model", Review of Financial Studies, 12.

Chen, N.F., Roll, R., e Ross, S.A. (1986), "*Economic Forces and the Stock Market*", Journal of Business, 59.

Christodoulakis, G.A. (2002), "*Bayesian Optimal Portfolio Selection: The Black-Litterman Approach*", Unpublished.

Chunhachinda, P., Dandapani, S., Hanrid, S., Prakash, A. (1997), "*Portfolio selection and Skewness: Evidence from International Stock Markets*", Journal of Banking and Finance, 21.

Connor, G. (1997), "*Sensible return forecasting for portfolio management*", Financial Analyst Journal, n°53

Connor, G., Korajczyk, R. (1988), "*Risk and Return in an Equilibrium APT: Application of a New Test Methodology*", Journal of Financial Economics, 49

Cuoco, D., He, H., Issaenko, S. (2001), "*Optimal Dynamic Trading Strategies with Risk Limits*", working paper, University of Pennsylvania.

de Athayde, G.M., Flores R.G. (2004), "*Finding a Maximum Skewness Portfolio - A General Solution to Three-Moments Portfolio Choice*", Journal of Economics Dynamics and Control, 28.

de Finetti (1940), "*Il Problema dei Pieni*", Giornale dell'Istituto italiano degli Attuari, n° 8.

Dennis, J.E., Schnabel, R.B. (1983), "*Numerica Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Dickenson, J.P. (1974a), "*The Reliability of Estimation Procedures in Portfolio Analysis*", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 9.

Dickenson, J.P. (1974b), "*Some Statistical Aspects of Portfolio Analysis*", The Statistician, 23.

Drobetz, W. (2001), "*How to Avoid the Pitfalls in Portfolio Optimization? Putting the Black-Litterman Approach at Work*", Financial Markets and Portfolio Management, Vol. 15, n°1.

Dybvig, P.H. (1984), "*Short Sales Restrictions and Kinks on the Mean Variance Frontier*", Journal of Finance, 39, March.

Elton, E. J., Gruber, M.J. (1974), "*Portfolio Theory when Investment Relatives are Lognormally distributed*", Journal of Finance, 29.

Elton, E. J., Gruber, M.J. (1999 a), "*Modern Portfolio Theory, 1950 to Date*", in Elton, E. J., Gruber, M.J., *Investments. Volume 1: Portfolio Theory and Asset Pricing*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

- Elton, E. J., Gruber, M.J. (1999 b), “*On the Optimality of Some Multi-period Portfolio Selection Criteria*”, in Elton, E. J., Gruber, M.J., *Investments. Volume 1: Portfolio Theory and Asset Pricing*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Fabozzi, F.J., Focardi, S.M., Kolm, P.N. (2006), “*Incorporating Trading Strategies in the Black-Litterman Framework*”, *Journal of Trading*, Spring.
- Fabozzi, F.J., Giacometti, R., Bertocchi, M., Rachev, S.T. (2007), “*Stable distributions in the Black-Litterman approach to asset allocation*”, *Quantitative Finance*; Vol. 7, n°4, August.
- Fabrizi, P.L. (2003), “*L’Economia del Mercato Mobiliare*”, Egea, Milano.
- Fama, E.F. (1965), “*Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market*”, *Management Science*, 11.
- Fama, E.F. (1976a), “*Foundation of Finance*”, New York: Basic Books.
- Fama, E.F. (1976b), “*Forward Rates as Predictors of Future Spot Rates*”, *Journal of Financial Economics*, 3, October.
- Fama, E.F., French, K. (1993), “*Common Risk Factors in the Returns of stocks and Bonds*”, *Journal of Financial Economics*, 33.
- Feiring, B.R., Wong, W.L., Poon, M., Chan, Y.C. (1994), “*Portfolio Selection in Downside Risk Optimization Approach – Application to the Hong Kong Stock Market*”, *International Journal of System Science*, 25.
- Fisher, I. (1906), *The Nature of Capital and Income*, Macmillan, London.
- Fisher, L. (1975), “*Using Modern Portfolio Theory to Maintain an Efficiently Diversified Portfolio*”, *Financial Analyst Journal*, May/June.
- Frankfurter, G.M., Phillips, H.E., Siegle, J.P. (1971), “*Portfolio Selection: The Effects of Uncertain Mean, Variances, and Covariances*”, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.6, n°5, December.
- Fried, J. (1970), “*Forecasting and Probability Distribution for Models of Portfolio Selection*”, *Journal of Finance*, 25, June.
- Frost, P.A., Savarino, J.E. (1986), “*An Empirical Bayes Approach to Efficient Portfolio Selection*”, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.21, n°3.
- Frost, P.A., Savarino, J.E. (1988), “*For Better Performance: Constrain Portfolio Weights*”, *Journal of Portfolio Management*, 14.
- Fusai, G., Meucci, A. (2003), “*Al di là delle Opinioni*”, *Risk Italia*, Novembre,
- Gill, P.E., Murray, W., Wright, M.H. (2005), “*Practical Optimization*”, Academic Press Inc., London.

- Grauer, R., Hakansson, N. (1982), "*Higher Return, Lower Risk: Historical Return on Long-Run, Actively Managed Portfolios of Stocks, Bonds and Bills, 1936-1978*", Financial Analyst Journal, 38
- Grauer, R., Hakansson, N. (1984), "*Returns on Levered, Actively Managed Long-Run Portfolios of Stocks, Bonds and Bills, 1934-1984*", Financial Analyst Journal, 41.
- Grauer, R., Hakansson, N. (1993), "*On the Use of Mean-Variance and Quadratic Approximation in Implementing Dynamic Investment Strategies: A Comparison of Returns and Investment Policies*", Management Science, Vol. 39, n°7.
- Green, R.C., Hollifield, B. (1992), "*When Will Mean-Variance Efficient Portfolios Be Well Diversified?*", Journal of Finance, Vol. 47, n°5, December.
- Hakansson, N. (1971), "*Capital Growth and the Mean-Variance Approach to Portfolio Selection*", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 6, January.
- Hakansson, N. (1974), "*Convergence to Isoelastic Utility and Policy in Multiperiod Choice*", Journal of Financial Economics, 1, September.
- Harlow, W. (1991), "*Asset Allocation in a Downside Risk Framework*", Financial Analyst Journal, 47.
- He, G., Litterman, R. (1999), "*The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios*", Goldman Sachs Investment Management Research..
- He, G., Litterman, R. (2002), "*The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios*", Working Paper, www.ssrn.com.
- Hicks, J.R. (1935), *A Suggestion for Simplifying the Theory of Money*, Economica, February.
- Idzorek, T.M. (2004), "*A Step-by-Step Guide to the Black-Litterman Model: Incorporating User-Specified Confidence Levels*", Working Paper.
- Ingersoll, J.E. Jr (1987), *Theory of Financial Decision Making*, Rowman and Littlefield, Savage, MD.
- Jagannathan, R., Ma, T. (2003), "*Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps*", Journal of Finance, 58.
- James, W., Stein, C. (1961), "*Estimation with Quadratic Loss*", Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics and Statistics.
- Jobson, J.D., Korkie, B. (1980), "*Estimation for Markowitz Efficient Portfolios*", Journal of the American Statistical Association, Volume 75, n. 371, September.
- Jobson, J.D., Korkie, B. (1981a), "*Potential Performance and Tests of Portfolio Efficiency*", Journal of Financial Economics, Vol.10, n°4, December.

- Jobson, J.D., Korkie, B. (1981b), "*Putting Markowitz Theory to Work*", Journal of Portfolio Management, 7.
- Jobson, J.D., Korkie, B., Ratti, V. (1979), "*Improved Estimation for Markowitz Portfolios Using James Stein Type Estimators*", Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section.
- Jones, R., Lim, T., Zangari, P.J., (2007), "*The Black-Litterman Model for Structured Equity Portfolios*", Journal of Portfolio Management, Vol. 22, n° 2.
- Jorion, P. (1985), "*International Portfolio Diversification with Estimation Risk*", The Journal of Business, Vol.58, n°3, July.
- Jorion, P. (1986), "*Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis*", The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.21, n°3, September.
- Jorion, P. (1992), "*Portfolio optimization in practice*", in Financial Analysts Journal, Vol.8, n°1, January-February.
- Jorion, P. (2001), "*Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*", McGraw-Hill, New York, Second edition.
- Kalymon, B.A. (1971), "*Estimation Risk in the Portfolio Selection Model*", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.6, n°1, January.
- Kallberg, J.G., Ziemba, W.T. (1983), "*Comparison of Alternative Utility Functions in Portfolio Selection Problems*", Management Science, Vol. 29, No.11.
- Kandel, S., Stambaugh, R.F. (1996), "*On the Predictability of Stock Returns: An Asset Allocation Perspective*", Journal of Finance, n°51.
- Kane, A. (1982), "*Skewness Preferences and Portfolio Choice*", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 17.
- Kaplan, P., Siegel, L. (1994), "*Portfolio Theory is Alive and Well*", Journal of Investing, 3.
- Kataoka, A. (1963), "*A stochastic Programming Model*", Econometrica, 31.
- Kelley, C.T. (1995), "*Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*", SIAM, Philadelphia, PA.
- Klein, R.W., Bawa, V.S. (1975), "*The Effect of Estimation Risk on Optimal Portfolio Choice Under Uncertainty*", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 10, n°4, November.
- Klein, R.W., Bawa, V.S. (1976), "*The Effect of Estimation Risk on Optimal Portfolio Choice*", Journal of Financial Economics, 3.
- Klein, R.W., Bawa, V.S. (1977), "*The Effect of Limited Information and Estimation*

Risk on Optimal Portfolio Diversification", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 12, n°4, November.

Konno, H., Shirakawa, H., Yamazaki, H., (1993) "*A Mean-Absolute Deviation-Skewness Portfolio Optimization Model*", Annals of Operation Research, 45.

Konno, H., Suzuki, K.I. (1995), "*A Mean-Varaince-Skewness Portfolio Optimization Model*", Journal of The Operations Research Society of Japan, 38.

Kraus, A., Litzemberger, R.H. (1976), *Skewness Preferences and the Valuation of Risky Assets*, Journal of Finance, 31.

Kroll, Y., Levi, H., Markowitz, H.M. (1984), *Mean-Variance Versus Direct Utility Maximization*, Journal of Finance, 39, No. 1, March.

Lai, T. (1991), "*Portfolio Selection with Skewness: A Multiple-Objective Approach*", Review of Quantitative Finance and Accounting, 1.

Ledoit, O., Wolf, M. (2003), "*Improved Estimation of the covariance Matrix of Stock Returns with Application to Portfolio Selection*".

Lee, C.F. (1977), "*Functional Form, Skewness Effect and the Risk Return Relationship*", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 12, 55.

Lee, W. (2000), "*Advanced Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation*", John Wiley & Sons, New York.

Lehmann, B. (2003), "*Is It Worth the While*", University of Konstanz, Center of Finance and Econometrics, Working Paper, April

Leibowitz, L.M., Kogelman, S. (1991), "*Asset Allocation under Shortfall Constraints*", The Journal of Portfolio Management, Winter.

Leland, H. (1972), "*On Turnpike Portfolios*", in Shell, K. and Szego, G.P. (eds), *Mathematical Methods in Investment Finance*, North-Holland, Amsterdam.

Lindley, D.W. (1962), "*Discussion on Professor Stein's Paper*", Journal of Royal Statistical Society, 24.

Lintner, J. (1965), "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", Review of Economics and Statistics, 47, February.

Litterman, B. e Quantitative Resources Group di Goldman Sachs (2003), "*Modern Investment Management: An Equilibrium Approach*", New Jersey: John Wiley & Sons.

Luce, R.D., Raiffa H. (1957), *Games and Decisions*, Wiley, New York.

Mao, J.C.T., Särnal, C.E. (1966), "*A Decision Theory Approach to Portfolio Selection*",

Management Science, 12, April.

Mardia, K.V., Kent, J.T., Bibby, J.M. (1979), “*Multivariate Analysis*”, Academic Press.

Markowitz, H.M. (1952), *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, Vol. VII, n° 1, March.

Markowitz, H.M. (1956), *The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. III.

Markowitz, H.M. (1959), *Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, New York.

Markowitz, H.M. (1999), *The Early History of Portfolio Theory: 1600 – 1960*, Financial Analyst Journal, July-August.

Markowitz, H.M. (2006), “*de Finetti Scoops Markowitz*”, Journal of Investment Management, Vol. 4, n°3.

Markowitz, H.M. e Usmen, N. (2003), “*Resampled Frontiers versus Diffuse Bayes: An Experiment*”, Journal of Investment Management, forth quarter.

Merton, R.C. (1972), “*An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier*”, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 7, September.

Merton, R.C. (1973), “*An Intertemporal Capital Asset Pricing Model*”, Econometrica, n°41.

Meucci, A. (2005), “*Risk and Asset Allocation*”, Springer.

Meucci, A. (2006), “*Beyond Black-Litterman: views on non-normal markets*”, Risk, February, www.risk.net.

Michaud, R.O. (1989), “*The Markowitz Optimization Enigma: Is ‘Optimized’ Optimal?*”, Financial Analysts Journal, Vol. 45, n°1, January-February.

Michaud, R.O. (1998), “*Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*”, Harvard Business School Press, Cambridge. MA.

Michaud, R.O., Michaud, R. (2003), “*The Past and the Future of Resampled EfficiencyTM*”, Inquire, Fall Seminar, September.

Michaud, R.O., Michaud, R. (2004), “*Resampled EfficiencyTM Fallacies*”, Working Paper, New Frontier Advisors, LLC, Boston.

Mood, A.M, Graybill, F.A., Boes, D.C. (1997), “*Introduzione alla Statistica*”, McGraw-Hill, Milano.

Mossin, J. (1966), “*Equilibrium in a Capital Asset Market*”, Econometrica, 34, n°4,

October.

- Mossin, J. (1968), "*Optimal Multiperiod Portfolio Policies*", Journal of Business, 41, April.
- Nawrocki, D. (1991), "*Optimal Algorithms and Lower Partial Moments: Ex Post Results*", Journal of Applied Economics, 23.
- Nawrocki, D. (1996), "*Portfolio Analysis with Large Universe of Assets*", Applied Economics, 28.
- Pastor, L. (2000), "*Portfolio selection and asset pricing models*", Journal of Finance, n°50.
- Pastor, L., Stambaugh, R.F. (2000), "*Comparing asset pricing models: An investment perspective*", Journal of Financial Economics, n°56.
- Peiro, A. (1994), "*The Distribution of Stock Returns: International Evidence*", Journal of Applied Financial Economics, 4.
- Peiro, A. (1999), "*Skewness in Financial Returns*", Journal of Banking and Finance, 23.
- Resti, A., Sironi, A. (2007), "*Risk Management and Shareholders' Value in Banking*", John Wiley & Sons, Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, England.
- Rom, B., Fergusson, K. (1993), "*Post Modern Portfolio Theory Comes of Age*", Journal of Investing, 23.
- Rom e Fergusson (1994), "*Portfolio Theory is Alive and Well: A Response*", Journal of Investing, 2.
- Rosemberg, B., Rudd, A. (1978), "*The Yield/Beta/Residual Risk Trade-Off*", Working Paper 66, Research Program in Finance, Institute of Business and Economic Research, University of California, Berkeley.
- Rosemberg, B., Rudd, A. (1979), "*Realistic Portfolio Optimization*", in Elton, E. J., Gruber, M.J., *Studies in Management Sciences, Portfolio Theory: 25 Years After*, Vol. 11, North-Holland, Amsterdam.
- Ross, S. (1974), "*Portfolio Turnpike Theorems for Constant Policies*", Journal of Financial Economics, 1.
- Ross, S. (1976), "*The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*", Journal of Economic Theory, 1.
- Ross, S. (1977), "*Return, Risk and Arbitrage*", in Friend, I., Bicksler, J. (eds), *Risk and Return in Finance*, Cambridge, Ballinger.
- Roy, A.D. (1952), *Safety First and the Holding of Assets*, Econometrica, 20, July.

- Rubinstein, M. (2002), "*Markowitz's 'Portfolio Selection': A Fifty-Year Retrospective*", The Journal of Finance, Vol.57, n°3, June.
- Rubinstein, M. (2006), "*Bruno de Finetti and Mean-Variance Portfolio Selection*", Journal of Investment Management, Vol.4, n°3.
- Saita F. (2000), *Il risk management in banca. Performance corrette per il rischio e allocazione del capitale*, Egea, Milano.
- Samuelson, P. (1958), "*The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in Terms of Means, Variances and Higher Moments*", Review of Economic Studies, 25, February.
- Satchell, S., Scowcroft, A. (2000), "*A Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Portfolio Construction*", Journal of Asset Management, 1.
- Satchell, S., Scowcroft, A. (2003), "*Advances in Portfolio Construction and Implementation*", Butterworth-Heinemann, Elsevier.
- Scherer, B. (2002), "*Portfolio Resampling: Review and Critique*", Financial Analysts Journal, November-December.
- Scherer, B. (2004), "*Portfolio Construction and Risk Budgeting*", Second Edition, Risk Books.
- Scowcroft, A., Sefton, J. (2003), "*Enhanced Indexation*", in Satchel, S., Scowcroft, A. (eds.), *Advances in Portfolio Construction and Implementation*, Butterworth-Heinemann, New York.
- Sharpe, W.F. (1963), "*A Simplified Model for Portfolio Analysis*", Management Science, n°9.
- Sharpe, W.F. (1964), "*Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*", Journal of Finance, 19, September.
- Sharpe, W.F. (1974), "*Imputing Expected Security Returns from Portfolio Composition*", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 9, June.
- Simaan, Y. (1993), *Portfolio Selection and Asset Pricing Three Parameter Framework*, Management Science, 5.
- Singleton, J., Wingender, J. (1986), "*Skewness Persistence in Common Stock Returns*", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 21.
- Sironi A. (2005), *Rischio e valore nelle banche. Risk management e capital allocation*, Egea, Milano.
- Stabile, D.R. (2005), "*Forerunners Of Modern Financial Economics: A Random Walk In The History Of Economic Thought, 1900-1950*", Edward Elgar , Cheltenham,

UK.

- Stein, C. (1955), "*Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of a multivariate Normal Distribution*", Proceedings of the 3rd Symposium on Probability and Statistics.
- Swets, J.A. (1996), "*Signal Detection Theory and ROC Analysis in Psychology and Diagnostics*", Laurence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.
- Szegö, G. (1981), "*Portfolio Analysis*", Academic Press, New York, 1981.
- Theil, H., Golberger, A. (1961), "*On Pure and Mixed Estimation in Economics*", International Economic Review, 2.
- Telser, R.G. (1956), "*Safety First and Hedging*", Review of Economic Studies, 23.
- Tobin, J. (1958), "*Liquidity Preference as Behavior towards Risk*", Review of Economic Studies, vol.25, n°1, February.
- Von Neumann, J., Morgenstern, O. (1944), *Theory and Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Williams, J.B. (1938), *The Theory of Investment Value*, Harvard University Press, Cambridge, MA (ristampato nel 1997), Fraser Publishing, Burlington, VT.
- Zellner, Z.A., Chetty, V.K. (1965), "*Prediction and Decision Problems in Regression Models from the Bayesian Point of View*", Journal of the American Statistical Association, 60.

INDICE CAPITOLO 1

CAPITOLO 1:	UN APPROCCIO GENERALE ALLA COSTRUZIONE DI PORTAFOGLIO	2
1.1	Introduzione	2
1.2	Le fasi della <i>portfolio construction</i>	3
1.2.1	Identificazione delle preferenze dell'investitore	3
1.2.2	Stima dell'andamento futuro delle <i>asset class</i>	10
1.2.3	L'ottimizzazione	10

Articolo I. CAPITOLO 1: UN APPROCCIO GENERALE ALLA COSTRUZIONE DI PORTAFOGLIO

«A good portfolio is more than a long list of good stocks and bonds. It is a balanced whole, providing the investor with protection and opportunities with respect to a wide range of contingencies. The investor should build toward an integrated portfolio which best suits his needs».

(Harry Markowitz)

1.1 Introduzione

Mezzo secolo di letteratura sulla *Portfolio Theory* ha contribuito alla nascita di una molteplicità di tecniche di costruzione delle strategie di investimento. Se esuliamo da un piano puramente teorico, includendo nel novero delle soluzioni possibili anche le metodologie sviluppate all'interno delle società di investimento (e non sempre in linea con i principi della letteratura finanziaria), il *basket* di tecniche dal quale attingere è pressoché sterminato. Tale vastità di soluzioni implica una eterogeneità di vedute circa il *modus operandi* ottimale.

Il processo di costruzione del portafoglio può essere analizzato anche all'interno della dicotomia *Arte-Scienza*. In ambito accademico la strategia di investimento nasce da un processo scientifico, mentre in un contesto operativo molti *asset manager* negano l'utilità di un *framework* matematico, difendendo il ruolo delle intuizioni e delle opinioni difficilmente processabili all'interno in un rigoroso modello di ottimizzazione. Ciò suggerisce due riflessioni:

1. l'interesse accademico per i modelli matematici di *asset allocation* appare sproporzionato se comparato al loro concreto utilizzo;
2. un modello di *asset allocation* che ambisca ad essere applicato nella realtà deve

incorporare le logiche operative degli *asset manager*; in assenza di ciò, il modello è destinato alla (possibile) fama scientifica, ma all'oblio operativo.

Al di là delle differenze che accompagnano le logiche di *portfolio construction*, è possibile identificare un *iter* generale comune a tutte le metodologie. Il compito di questo primo capitolo è quello di descrivere il processo di investimento, in modo da chiarire quali siano gli *step* obbligatori che un *asset manager* è chiamato a seguire. Volendo descrivere un approccio generale, l'analisi verrà sviluppata senza alcun riferimento a specifici modelli finanziari. Inoltre, si prediligerà una trattazione con taglio qualitativo, lasciando ai capitoli successivi il compito di approfondire analiticamente le problematiche introdotte.

1.2 Le fasi della *portfolio construction*

Possiamo suddividere il processo di creazione di una strategia di investimento nei punti seguenti:

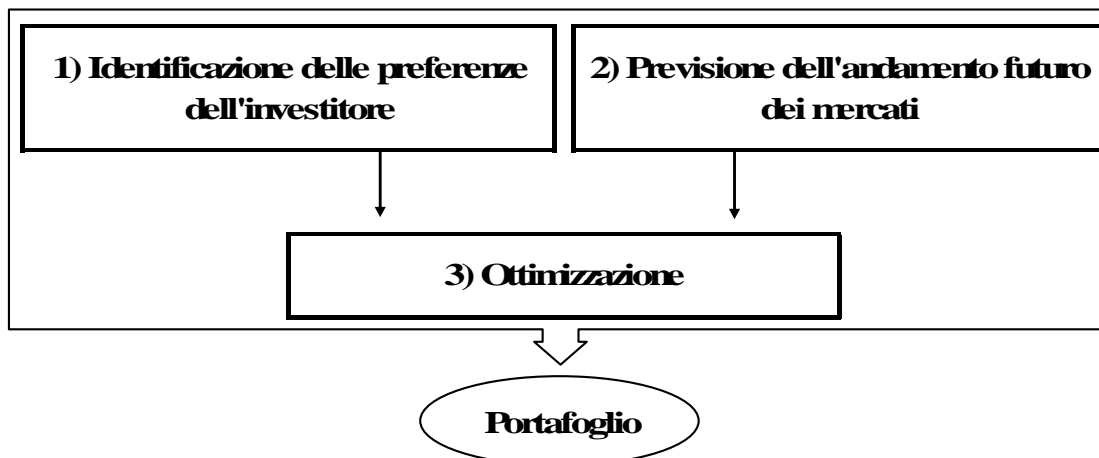
1. identificazione delle preferenze dell'investitore;
2. stima dell'andamento futuro delle *asset class*;
3. ottimizzazione.

Questa articolazione è largamente condivisibile: l'*asset manager*, una volta identificati i fabbisogni degli investitori, deve prevedere l'andamento futuro dei mercati, focalizzandosi sugli aspetti a cui l'investitore è sensibile; acquisite le informazioni necessarie è possibile "lanciare" l'ottimizzazione che restituirà il portafoglio migliore. La Figura 1.1 propone una rappresentazione grafica dell'*iter* testé descritto.

1.2.1 Identificazione delle preferenze dell'investitore

Esiste una pluralità di informazioni relative all'investitore da considerare al fine di alimentare la selezione del portafoglio. In primo luogo, occorre valutare l'orizzonte temporale di investimento, la cui definizione assume la natura di *condicio sine qua non*: in caso di mancata esplicitazione, l'*asset manager* non saprebbe su quali rendimenti futuri orientare le previsioni.

Figura 1.1: Le tre fasi della costruzione di portafoglio.



Le preferenze degli investitori si esplicitano anche nella selezione delle *asset class* nelle quali essi intendono investire. Il soggetto razionale non dovrebbe limitare le opportunità di investimento, considerando così tutti i comparti disponibili sui mercati domestici ed internazionali. Tuttavia non è raro assistere a comportamenti irrazionali, a causa dei quali gli investitori limitano l'insieme, escludendo aprioristicamente i mercati poco conosciuti e/o molto rischiosi. L'analista dovrà tenere in debita considerazione queste preferenze, al fine di evitare che l'inclusione di mercati indesiderati conduca ad un portafoglio giudicato irragionevole. L'investitore potrebbe esprimere delle preferenze circa la numerosità degli *asset* da inserire in portafoglio e il grado di diversificazione dello stesso. L'*asset manager* è obbligato ad incorporare anche queste richieste, pena l'irragionevolezza del portafoglio.

Un modello di *portfolio selection* non può prescindere dalla conoscenza degli obiettivi che l'investitore intende perseguire. Assumiamo che la finalità sia quella di massimizzare il rendimento r conseguito nell'*holding period* desiderato o, alternativamente, che l'investitore intenda massimizzare il montante M del capitale iniziale C :

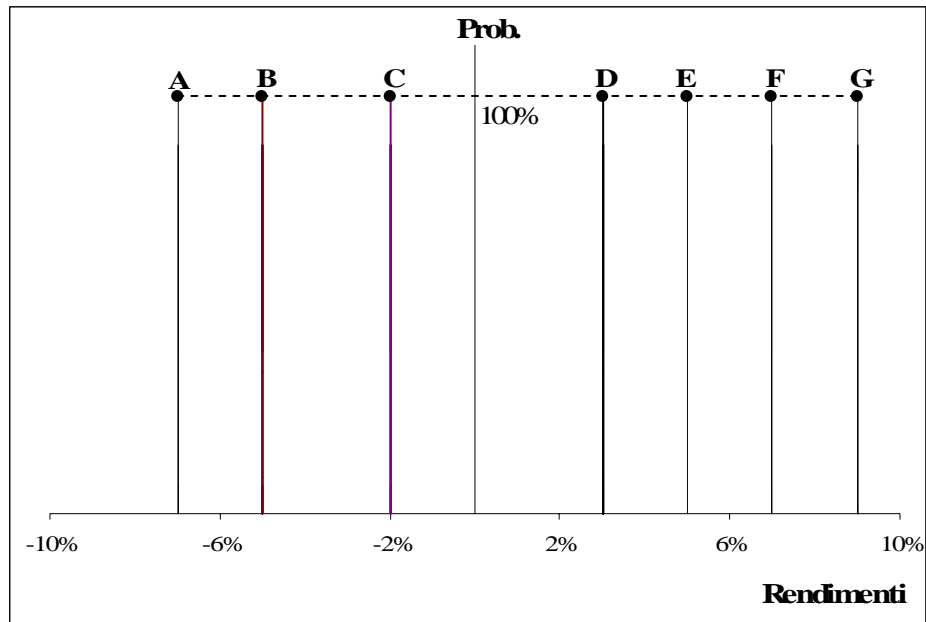
$$(1.1) \quad M = C \cdot (1 + r)$$

Ipotizzando che il rendimento sia una variabile deterministica, non soggetta ad aleatorietà¹ (non rischiosa), la stima della soluzione ottimale è immediata e coincide con l'identificazione dell'attività dal rendimento (certo) più elevato. Così, prese le sette

¹ Ciò implica che gli investimenti siano tutte attività *risk-free*.

asset class della Figura 1.2, la prescelta è quella (G) caratterizzata dal maggior rendimento *risk-free*.

Figura 1.2: La selezione del portafoglio ottimale in presenza di attività non aleatorie.



L'ipotesi che i rendimenti siano variabili deterministiche rappresenta tuttavia una pura astrazione dalla realtà, poiché in tal modo si nega l'incertezza dei rendimenti futuri. Rimuovendo questo limite, l'investitore è chiamato ad interpretare i portafogli come variabili aleatorie e, ai fini della selezione della strategia migliore, è obbligato ad esprimere una preferenza considerando l'intera distribuzione futura dei rendimenti.

Ipotizziamo che le distribuzioni dei rendimenti dei portafogli siano note; lo scopo è quello di definire un criterio normativo che, tenendo conto delle esigenze degli investitori, permetta di identificare quale sia il portafoglio caratterizzato dalla migliore distribuzione dei rendimenti. Se mai esistesse un portafoglio in grado di produrre un rendimento superiore a tutti gli altri in ogni possibile scenario (in termini statistici, il portafoglio domina stocasticamente gli altri in forma *forte*), la scelta dell'investitore sarebbe semplice, poiché questi si orienterebbe verso la soluzione dall'esito sì incerto, ma pur sempre migliore di quello delle restanti alternative. Dati i 5 portafogli della Tabella 1.1, la soluzione ottimale è la E che è in grado di massimizzare il rendimento in ciascuno dei dieci possibili *stati del mondo*.

Tabella 1.1: La selezione del portafoglio in presenza di una attività che domina stocasticamente le altre in forma *forte*.

	Portafoglio A	Portafoglio B	Portafoglio C	Portafoglio D	Portafoglio E
Scenario 1	2,00%	4,00%	4,50%	0,00%	5,00%
Scenario 2	-4,00%	-3,50%	-10,00%	-2,20%	-2,00%
Scenario 3	8,00%	4,00%	7,00%	9,00%	12,00%
Scenario 4	3,00%	-1,00%	0,00%	9,00%	10,00%
Scenario 5	-8,00%	-10,00%	-9,00%	-4,50%	-4,00%
Scenario 6	6,00%	2,00%	3,00%	0,00%	7,50%
Scenario 7	1,00%	4,00%	6,50%	5,00%	9,00%
Scenario 8	-4,00%	0,00%	-1,00%	0,00%	1,00%
Scenario 9	1,00%	2,00%	4,30%	4,00%	6,00%
Scenario 10	-8,00%	-4,00%	-0,50%	-1,00%	0,00%

Tuttavia, la *strong dominance* non può rappresentare un criterio generale di selezione del portafoglio, poiché espone al rischio quasi certo che non esista alcun investimento in grado di dominare gli altri. Una soluzione alternativa potrebbe essere quella di selezionare il portafoglio che, rispetto a tutti gli altri, presenta una minore (o al più uguale) probabilità di conseguire ogni possibile valore di rendimento. In tal caso la soluzione migliore è quella che domina stocasticamente le altre in forma *debole*. Nella Figura 1.3 il portafoglio A domina in forma *debole* il portafoglio B; infatti, per qualsiasi valore della variabile sull'asse delle ascisse, l'area sinistra della distribuzione dei rendimenti del portafoglio A è sempre inferiore a quella del portafoglio B. Per facilitare la comprensione del concetto di dominanza stocastica in forma debole, nella Figura 1.4 si rappresentano le funzioni di ripartizione dei rendimenti dei portafogli A e B.

Pur se meno restrittiva della dominanza forte, anche la *weak dominance* non può rappresentare un criterio generale di selezione, sempre a causa della elevata probabilità che non esista un portafoglio dominante sugli altri. Le Figure 1.5 e 1.6 mostrano un caso di assenza di dominanza stocastica in forma *debole*:

- per valori dei rendimenti inferiori alla soglia s , il portafoglio A domina il portafoglio B;
- per valori dei rendimenti superiori alla soglia s , è il portafoglio B a dominare il portafoglio A.

Figura 1.3: Funzioni di densità di probabilità in caso di dominanza stocastica in forma *debole*.

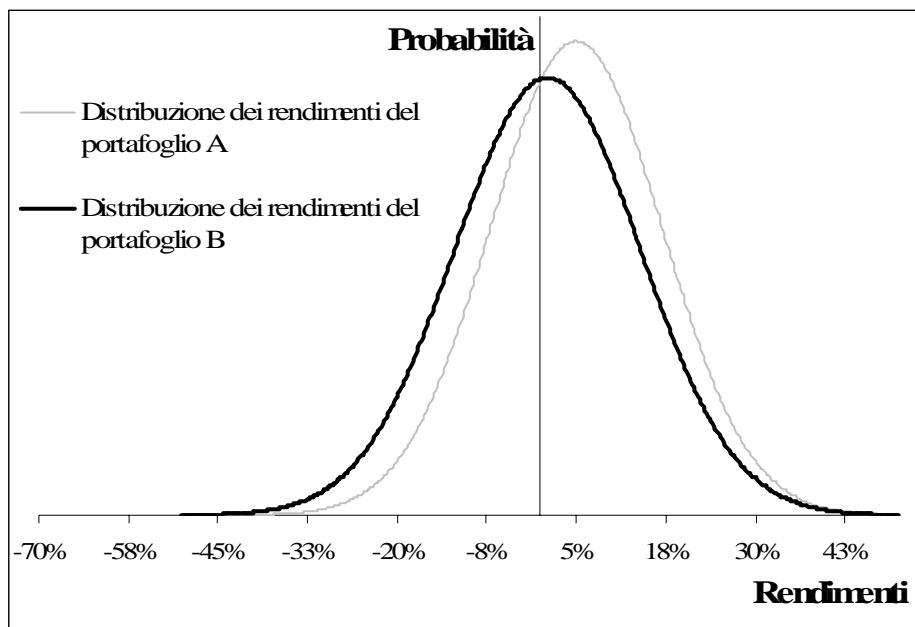


Figura 1.4: Funzioni di ripartizione in caso di dominanza stocastica in forma *debole*.

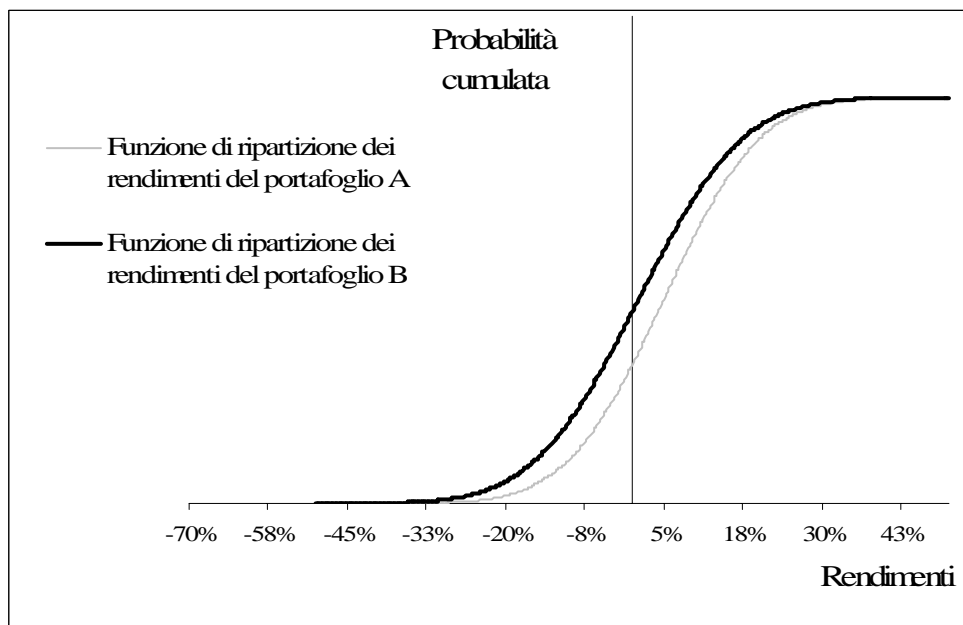


Figura 1.5: Funzioni di densità di probabilità in caso di assenza di dominanza stocastica in forma *debole*.

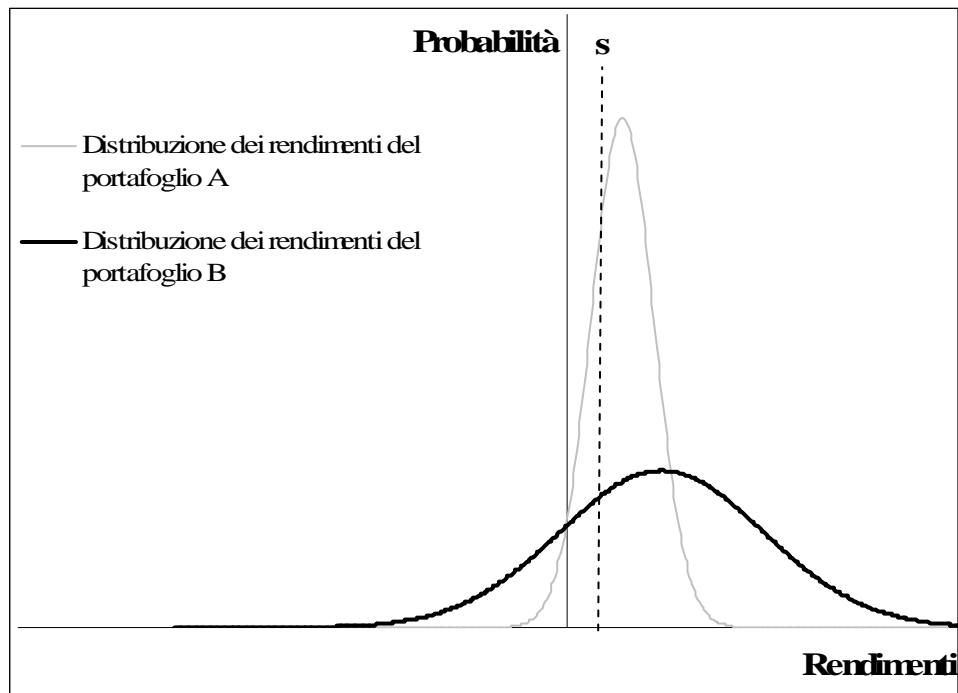
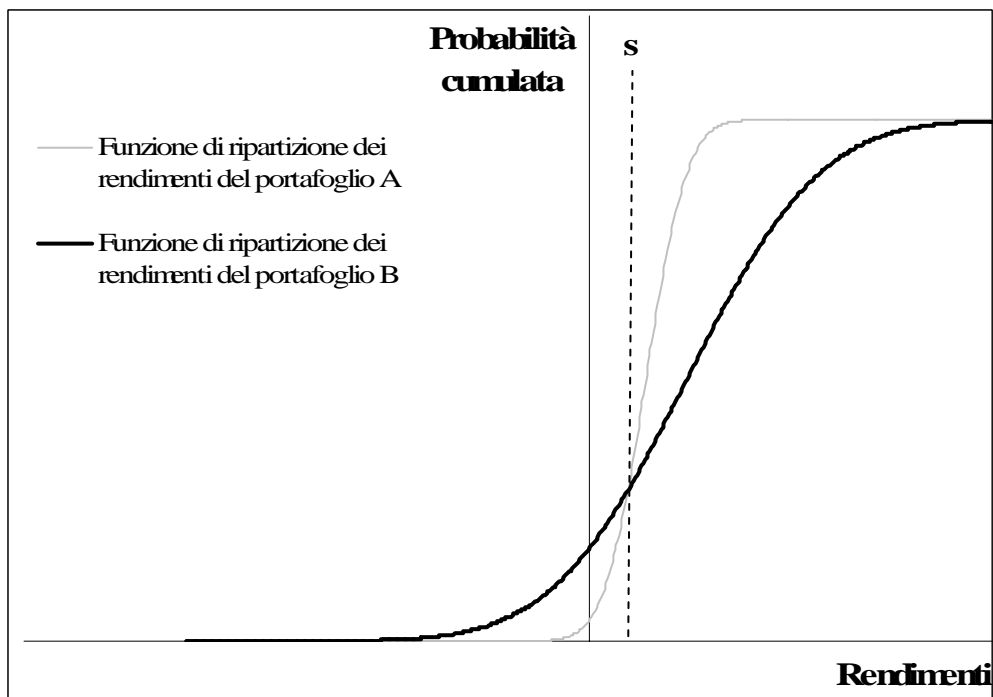


Figura 1.6: Funzioni di ripartizione in caso di assenza di dominanza stocastica in forma *debole*.



In sintesi, le dominanze stocastiche in forma *debole* e *forte* rappresentano, in teoria,

delle ottime soluzioni per identificare il portafoglio preferito dall'investitore; la loro applicazione avrebbe l'ulteriore vantaggio di non obbligare l'investitore ad esprimere preferenze sulla forma della distribuzione dei rendimenti. Tuttavia, queste soluzioni non sono praticabili, essendovi il rischio che non esista alcun portafoglio dominante.

La strada alternativa consiste nell'indurre l'investitore ad esplicitare le proprie preferenze circa gli elementi² che influenzano la forma della distribuzione, fornendo così gli strumenti necessari per discriminare tra i portafogli. Nel concreto all'investitore è richiesto di identificare:

1. le variabili (statistiche) significative ai fini della selezione del portafoglio;
2. la propensione o l'avversione per queste variabili;
3. il peso attribuito a ciascuna variabile.

A titolo puramente esemplificativo, ipotizziamo che l'investitore debba scegliere tra le soluzioni alternative proposte nelle Figura 1.5 e 1.6. Poiché il ricorso alla dominanza stocastica non rappresenta un criterio di discriminazione praticabile, l'investitore identifica le variabili che egli considera rilevanti ai fini della *portfolio selection*:

- il rendimento atteso del portafoglio al quale attribuisce una valenza positiva (maggiore è il rendimento atteso e, *coeteris paribus*, maggiore è la probabilità di conseguire valori più elevati del rendimento finale);
- la variabilità dei rendimenti, misurata ad esempio con la deviazione standard dei rendimenti, alla quale attribuisce una valenza negativa (l'investitore è avverso alla variabilità dei rendimenti, perché, *coeteris paribus*, al crescere di quest'ultima aumenta la probabilità che i rendimenti futuri si discostino dal valore atteso, assumendo così valori negativi pronunciati).

Inoltre, l'investitore manifesta una bassissima tolleranza alla volatilità dei rendimenti ed è indotto quindi a preferire un portafoglio con rendimenti attesi anche ridotti, a condizione che esso presenti una bassa volatilità. Grazie a queste informazioni, il portafoglio A delle Figure 1.5 e 1.6 può essere considerato preferibile al portafoglio B.

Le preferenze si possono spingere ben oltre la predilezione per il rendimento atteso e l'avversione per la volatilità; l'investitore può:

- esprimere avversione per distribuzioni dei rendimenti che presentano una elevata

² Ad esempio, i *momenti* statistici della distribuzione.

- probabilità di assumere valori molto distanti dalla media (fenomeno delle *fat tail*);
- manifestare interesse per il grado di asimmetria (*skewness*) che caratterizza la distribuzione;
 - discriminare tra volatilità positiva (che favorisce l'investitore) e volatilità negativa (che lo penalizza);
 - identificare il rischio nella manifestazione di rendimenti estremi negativi, piuttosto che nella volatilità dei rendimenti.

Le preferenze dell'investitore hanno un forte contenuto di soggettività che rende complessa la traduzione in termini matematici. Tuttavia, l'esigenza di facilitare il processo di ottimizzazione induce a creare una funzione obiettivo all'interno della quale incorporare i parametri a cui l'investitore è sensibile. L'*asset manager* è chiamato a definire il grado di complessità della funzione di preferenza: l'esigenza di cogliere in modo più efficace i desideri degli investitori dovrebbe spingere ad un incremento del numero delle variabili contemplate all'interno della funzione; di contro la necessità di facilitare il processo di stima dei parametri e di successiva ottimizzazione potrebbe indurre ad una semplificazione della funzione stessa.

1.2.2 Stima dell'andamento futuro delle *asset class*

L'*asset manager* è chiamato ad effettuare le previsioni che fungeranno da *input* nella fase finale di ottimizzazione. È importante sottolineare lo stretto legame esistente tra le preferenze dell'investitore e le previsioni sui mercati. Le stime non possono essere prodotte in autonomia, in quanto è l'investitore a definire l'orizzonte temporale, le *asset class* ed i parametri statistici da stimare. La scelta di una funzione obiettivo complessa che incorpora una pluralità di parametri, ha una ricaduta immediata in termini di complessità della fase previsionale. Analogamente la selezione di una molteplicità di *asset class* incide pesantemente sui tempi necessari per la produzione degli *input*.

Il compito dell'*asset manager* è quello di produrre stime affidabili grazie alle quali giungere a portafogli realmente ottimali.

1.2.3 L'ottimizzazione

Il processo di *portfolio selection* si chiude con la fase di ottimizzazione nella quale, delineate le preferenze dell'investitore e stimata la distribuzione futura dei mercati, si

procede alla determinazione del portafoglio che massimizza la soddisfazione dell'investitore. Qualora prevalga un approccio poco rigoroso (le preferenze dell'investitore e le stime non sono esplicitate in termini matematici), la fase di ottimizzazione non può che svolgersi in termini qualitativi, definendo un portafoglio che non è frutto di un modello matematico adeguato. Nasce in tal modo una soluzione che, orfana di un vero processo di massimizzazione, viene definita *naive*.

Di contro, in un *framework* matematico, una volta definiti:

- la funzione di preferenza $[F(p)]$, che evidenzia i parametri statistici ed il loro contributo alla soddisfazione dell'investitore;
- i vincoli (V) alla composizione del portafoglio (necessari per incorporare i desideri degli investitori e/o assicurare la costruzione di soluzioni ragionevoli);

il portafoglio nasce attraverso un processo rigoroso che, esplorando lo spazio delle soluzioni possibili, ricerca la composizione di portafoglio in grado di massimizzare la funzione di preferenza dell'investitore, nel rispetto dei vincoli:

$$(1.2) \quad \begin{array}{c} \text{Max } F(p) \\ W \\ \text{Vincoli: } V \end{array}$$

dove W identifica il vettore dei pesi degli *asset* in portafoglio.

Si chiude così il processo di *portfolio selection* che, se supportato dalla capacità di:

1. misurare le reali preferenze dell'investitore;
2. stimare in modo corretto la distribuzione futura dei rendimenti dei portafogli;
3. processare una ottimizzazione matematica in grado di massimizzare la funzione obiettivo dell'investitore;

è in grado di restituire la migliore soluzione. Ai capitoli successivi si affida il compito di descrivere questo percorso, certamente complesso, ma ancor più stimolante. Teoria e pratica rappresenteranno due poli di attrazione, spesso in contrasto. Non mancheranno le posizioni di compromesso necessarie allo scopo di creare logiche di *portfolio selection* in equilibrio tra rigore metodologico e concreta applicabilità.

INDICE CAPITOLO 2

CAPITOLO 2:	LE ORIGINI: L'OTTIMIZZAZIONE MEDIA-VARIANZA.....	13
2.1	Introduzione	13
2.2	L'investitore di Markowitz.....	15
2.3	Rendimento e rischio di portafoglio	20
2.4	La costruzione della frontiera efficiente.....	25
	2.4.1 Il caso di due soli <i>asset</i> in portafoglio.....	25
	2.4.2 Il caso generico di n <i>asset</i> in portafoglio	29
2.5	Tecniche di calcolo dei portafogli efficienti.....	32
2.6	Una applicazione pratica	36
2.7	La selezione del portafoglio ottimo per l'investitore	40
2.8	Markowitz, tra mito e false credenze	46
Appendice A.2.1: La stima dei portafogli efficienti con il metodo della <i>critical line</i>.....		50
Appendice A.2.2: La costruzione dei portafogli efficienti con il metodo della <i>Lagrangiana</i>		67

CAPITOLO 2: LE ORIGINI: L'OTTIMIZZAZIONE MEDIA-VARIANZA

«Near the end of his reign in 14 AD, the Roman emperor Augustus could boast that he had found Rome a city of brick and left it a city of marble. Markowitz can boast that he found the field of finance awash in the imprecision of English and left it with the scientific precision and insight made possible only by mathematics».

(Mark Rubinstein)

2.1 Introduzione

La pubblicazione nel 1952 dell'articolo "*Portfolio Selection*" (Journal of Finance) rappresenta una pietra miliare per l'*asset management*: le intuizioni di Harry Markowitz introducono infatti in una nuova era, quella della *modern portfolio theory*. In realtà, il problema della costruzione di un portafoglio non era ignoto alla letteratura economica precedente, ma questa, ferma ad un approccio *naive*, fu incapace di ricondurre la costruzione del portafoglio ad un problema di ottimizzazione.

Uno degli elementi più sorprendenti del lavoro di Markowitz è la sua originalità: "*it seems to come out of nowhere*"¹. Tuttavia, è possibile trovare più di un legame tra questa teoria ed il contributo di altri lavori pionieristici nel campo della teoria di portafoglio: Chambers (1934) ed Hicks (1935) intuiscono il concetto di diversificazione ed enfatizzano il ruolo del rischio nelle scelte degli investitori; Roy (1952) propone un processo di costruzione dei portafogli che, sviluppato su un piano media-deviazione standard, ha delle sorprendenti similitudini con il modello di Markowitz. In relazione al contributo offerto da Roy, Markowitz (1999) si esprime nei termini seguenti: «*On the basis of Markowitz (1952), I am called the father of modern portfolio theory (MPT), but*

¹ Rubinstein (2002).

Roy (1952) can claim an equal share of his honour. (...) Comparing the two articles, one might wonder why I got a Nobel Prize for mine and Roy did not for his. (...) the more likely reason was visibility to the Nobel Committee in 1990. Roy's article was his first and last article in finance». Ad onor del vero, pur se i contributi scientifici di Markowitz sono innumerevoli, lo stesso deve essere considerato un “*one-idea-author*” (Brealey, 1991).

Anche l'Italia ha dato il suo contributo alla nascita della *modern portfolio theory*. Recentemente, Marc Rubinstein ha trovato in un articolo del 1940 del matematico italiano de Finetti alcuni spunti che anticipano parte della teoria di portafoglio di Markowitz. A tal proposito Rubinstein (2006) scrive: «*It has just recently come to light that among de Finetti's papers is a treasurer-trove of results in economics and finance written well before the work of the scholars that are traditionally credited with these ideas. [...] But perhaps most astounding is de Finetti's 1940 paper anticipating much of mean-variance portfolio theory*». Animati da uno spirito patriottico, verrebbe da chiedersi come mai il nome di de Finetti abbia tardato a comparire tra quello dei padri della moderna teoria di portafoglio. Stabile (2005) offre una giustificazione plausibile: «*Because he wrote mainly in Italian, de Finetti's view of statistics did not become influential in the United States until 1950s*». In ambito puramente finanziario, il riconoscimento che de Finetti merita si è palesato molto più tardi, ben oltre la sua morte (1987) e in corrispondenza del centenario della sua nascita (1906). Per un approfondimento sui legami tra de Finetti e Markowitz si rinvia a Markowitz (2006).

Senza la pretesa di essere esaustivi, si elencano qui di seguito le innovazioni più significative introdotte da Markowitz. Egli è unanimemente riconosciuto come il “padre della diversificazione”. In realtà il concetto di *portfolio diversification*, lungi dal nascere con Markowitz, è ravvisabile ben prima del 1952 tanto nell'operatività quotidiana delle *Investment Company*, quanto nel pensiero di alcuni autori, tra i quali Daniel Bernoulli (1738) e, sorprendentemente, William Shakespeare². Markowitz è stato però il primo a

² Nella Atto Primo, Scena 1 del *Mercante di Venezia* Antonio afferma:

*«I Thank my fortune for it,
My ventures are not in one bottom trusted,
Not to one place; nor is my whole estate
Upon the fortune of this present year;
Therefore my merchandise makes me not sad».*

giungere ad una formalizzazione matematica³ del concetto di diversificazione. Inoltre egli, a differenza di altri studiosi⁴ forse “accecati” dalla legge dei grandi numeri, ebbe la capacità di riconoscere nella diversificazione un fenomeno in grado di ridurre il rischio piuttosto che di annullarlo.

Il pensiero di Markowitz ha dato un apporto determinante alla diffusione della teoria delle “scelte in condizioni di incertezza”. Infatti, uno dei contributi più significativi dell’Autore è ravvisabile nell’introduzione di una funzione obiettivo di secondo grado a due variabili, all’interno della quale trovano spazio tanto il rendimento atteso, quanto il rischio (rappresentato dalla deviazione standard). Questa intuizione, ponendo fine alla prassi consolidata di identificare l’obiettivo dell’investitore nella mera massimizzazione del rendimento atteso, sposta le scelte di portafoglio su un piano $(\sigma; \mu)$ ⁵.

Non sazio della scelta di una funzione obiettivo innovativa, Markowitz è il primo a formulare il problema della costruzione del portafoglio come un modello di programmazione matematica e a proporre un algoritmo al fine di giungere alla soluzione del problema stesso.

Il capitolo prosegue con la descrizione del modello che Harry Markowitz ha consegnato alla storia, dimostrando delle doti insospettabili di chiarezza e sensibilità finanziaria, e trovando un raro equilibrio tra rigore metodologico e pragmatismo.

2.2 L’investitore di Markowitz

Qualsiasi modello che ambisca a trattare matematicamente il processo di costruzione di un portafoglio deve fare delle precise assunzioni circa il comportamento degli investitori, definendo le preferenze che muovono le scelte di portafoglio. Il modello di Markowitz non fa eccezione, anzi contribuisce in modo significativo a delineare l’idea oggi diffusa di investitore razionale.

In ogni teoria che tenta di modellizzare i comportamenti, l’*homo oeconomicus* non viene mai colto in tutte le sue innumerevoli sfaccettature; così anche l’investitore di

³ Cfr. paragrafo 2.3

⁴ Cfr. Williams (1938) e Hicks (1935).

⁵ Alcuni pensano erroneamente che Markowitz sia stato il primo ad utilizzare la deviazione standard (la varianza) come misura di rischio. In realtà, questo merito va probabilmente attribuito a Fisher (1906).

Markowitz è una stilizzazione dell'investitore reale, un'astrazione dello *stato del mondo*. Tra le più evidenti semplificazioni del modello, citiamo la scarsa numerosità delle variabili di input che influenzano le scelte di investimento e la natura uniperiodale delle preferenze⁶.

Per quanto Markowitz descriva un investitore teorico, egli ci propone, soprattutto in comparazione alla letteratura precedente, una riproduzione condivisibile del comportamento di un investitore *reale* razionale. Inoltre non è peregrino affermare che ancora oggi la teoria di portafoglio (soprattutto quella che trova concreta applicazione nell'ambito dell'*Asset Management*) non abbia innovato l'idea di *rational investor* introdotta nel 1952. Tuttavia, assumere la razionalità degli investitori è pur sempre una ipotesi irrealistica: "*The Rational Man, like the unicorn, does not exist*" (Markowitz, 1959).

Markowitz (1952) scrive: «*We first consider the rule that investor does maximize discounted expected, or anticipated returns. This rule is rejected both as hypothesis to explain, and as a maximum to guide investment behavior. We next consider the rule that investor does consider expected return a desirable thing and variance of returns an undesirable thing*». L'investitore, anziché limitarsi a massimizzare il rendimento atteso, è chiamato a fare delle scelte su un piano bidimensionale, nel quale il rendimento atteso è la variabile *good* da massimizzare (*l'investitore non è mai sazio*), la dispersione dei rendimenti (il rischio) è la variabile *bad* da minimizzare (*l'investitore è avverso al rischio*).

Al fine di indirizzare l'interesse dell'investitore ai primi due momenti della distribuzione dei rendimenti, si può ricorrere alternativamente ad una delle seguenti ipotesi:

- gli investitori sono *neutrali* a fenomeni riconducibili a *momenti* statistici di grado superiore al secondo (ad esempio, l'asimmetria e la curtosi della distribuzione dei rendimenti);
- i rendimenti si distribuiscono secondo una funzione di probabilità normale la cui forma è funzione dei primi due *momenti* statistici.

Entrambe queste assunzioni sembrano però in parziale contrasto tanto con il comportamento degli investitori (i quali non possono essere considerati

⁶ Per una analisi più dettagliata di queste tematiche si rimanda al capitolo 3.

aprioristicamente insensibili a fenomeni quali le *fat tail* e l'asimmetria negativa), quanto con le evidenze empiriche riguardanti la distribuzione dei rendimenti degli *asset*⁷. Tuttavia, a chiunque ritenesse queste semplificazioni inammissibili, va rammentato che l'assenza di calcolatori di infinita potenza, in grado di processare una quantità illimitata di dati, impone sempre una semplificazione della funzione da ottimizzare: “*The Perfect Computing Machine, like the unicorn and the rational man, does not exist*” (Markowitz, 1959).

A completamento del profilo dell'investitore, si aggiunge che le preferenze dello stesso in termini di rendimento atteso e deviazione standard⁸ riguardano uno ed un solo *holding period*. Markowitz introduce quindi l'ipotesi di orizzonte temporale uniperiodale, ovvero assume che l'investitore definisca un unico *holding period T* e faccia le sue scelte di portafoglio sul piano $(\sigma_T; \mu_T)$. Da ciò si evince che l'investitore è *neutrale* al rendimento atteso ed al rischio relativi ad orizzonti temporali diversi da quello (unico) desiderato.

Date le ipotesi di comportamento sopra menzionate, è possibile estrapolare il principio noto come *media-varianza* (M-V), in base al quale, presi due portafogli *A* e *B*, aventi sull'orizzonte temporale *T* rendimenti attesi $E(R_A)$ e $E(R_B)$ e rischi attesi σ_A e σ_B , si dice che *A* domina *B* se:

$$E(A) \geq E(B) \quad \text{e} \quad \sigma(A) \leq \sigma(B);$$

con almeno una disuguaglianza forte.

A conclusione del paragrafo, è opportuno menzionare le condizioni che rendono possibile una conciliazione tra il principio media-varianza e l'*expected utility rule*; va comunque sottolineato che tra questi due criteri non vi è alcuna connessione

⁷ Cfr. Arditti (1967).

⁸ Qualche lettore potrà trovare eccentrica la scelta, reiterata nell'intero lavoro, di parlare di deviazione standard (σ) dei rendimenti piuttosto che di varianza (σ^2). Questa trae prende origine dal fatto che la deviazione standard, a differenza della varianza, trova una sua interpretazione finanziaria. A titolo esemplificativo, una deviazione standard dei rendimenti annuali pari al 25% può essere immediatamente associata ad un investimento ad elevato rischio, poiché una variabilità media dei rendimenti annuali intorno al rendimento medio annuo nell'ordine del 25% è propria dei soli investimenti ad alta volatilità. Di contro una varianza dei rendimenti annuali pari a 0,0625 (= 0,25²) non trova una sua immediata interpretazione, a causa dell'unità di misura nella quale questo indicatore è espresso. Per la stessa medesima ragione il coefficiente di correlazione lineare ($\rho_{i,j}$) viene preferito alla covarianza ($\sigma_{i,j}$). Al fine di rafforzare la bontà di questa scelta, si legga Markowitz (1999) che nel pieno della sua maturità di pensiero afferma: “*Although the article (Markowitz, 1952) noted that the same portfolios that minimize standard deviation for a given E, it failed to point out that standard deviation (rather than variance) is the intuitively meaningful measure of dispersion*”.

obbligatoria.

Le *funzioni di utilità*⁹ sono state introdotte in sostituzione dell'*expected return rule*, rigettata in ragione della inammissibilità dell'ipotesi di *neutralità al rischio*. Queste, al pari del *principio media-varianza*, sono strumenti utili per selezionare gli investimenti in ipotesi di *avversione al rischio*. Formalmente, la funzione di utilità è una funzione U continua che permette di associare valori di utilità a tutti i possibili risultati di un portafoglio. Definiti x_A e x_B i risultati aleatori ottenibili dai portafogli A e B al tempo T , un investitore effettua la scelta comparando i relativi valori di utilità attesa: $E[U(x_A)]$ e $E[U(x_B)]$. Al fine di rispettare le ipotesi di “non sazietà” e di “avversione al rischio” dell'investitore (si continuano a trascurare i comportamenti riconducibili ai *momenti* statistici della distribuzione dei rendimenti superiori al secondo), una *funzione di utilità* deve soddisfare due requisiti:

- $U(x)$ deve essere crescente: $U'(x) > 0$;
- $U(x)$ deve essere concava: $U''(x) < 0$.

Al fine di conciliare il principio media-varianza con l'approccio dell'utilità attesa, è possibile seguire due soluzioni alternative:

- optare per una funzione di utilità quadratica;
- assumere che i rendimenti degli *asset* si caratterizzino per una distribuzione gaussiana.

La funzione di utilità quadratica ha la seguente forma:

$$(2.1) \quad U(x) = ax - \frac{1}{2}bx^2$$

con:

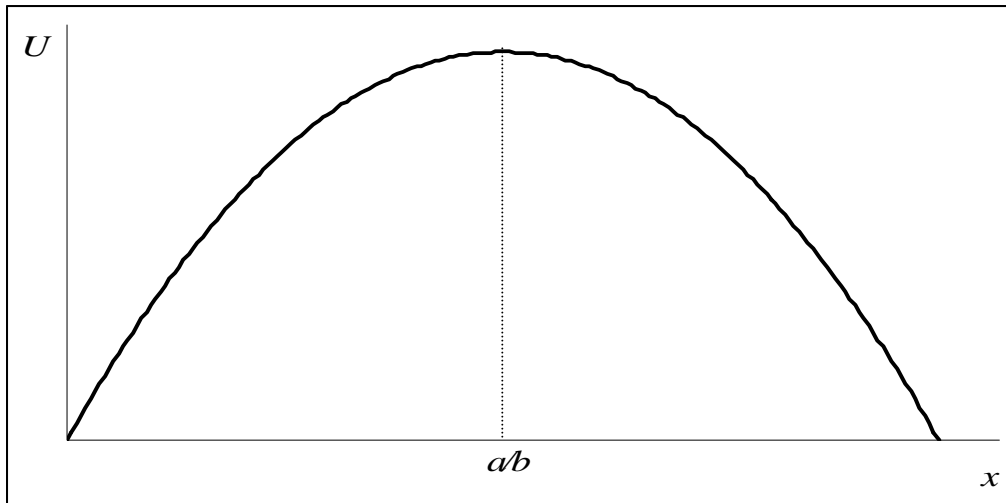
$$U'(x) = a - bx$$

$$U''(x) = -b$$

Tale funzione è concava ($U''(x) < 0$) e quindi coerente con l'ipotesi di *avversione al rischio* solo per valori di $b > 0$; inoltre essa è crescente [$U'(x) > 0$] e quindi coerente con l'ipotesi di *non sazietà* solo per valori di $x \leq a/b$ (Figura 2.1).

⁹ Sul tema generale dell'utilizzo delle funzioni di utilità come base delle decisioni finanziarie, cfr. Von Neumann e Morgenstern (1944), Luce e Raiffa (1957) e Ingersoll (1987). Per una comparazione tra funzioni di utilità alternative nella selezione del portafoglio, cfr. Kallberg e Ziemba (1983).

Figura 2.1: Rappresentazione grafica di una funzione di utilità quadratica



Selezionare il portafoglio ottimale massimizzando il valore atteso di una funzione di utilità quadratica equivale ad applicare il *principio media-varianza* di Markowitz. Infatti, quando la funzione di utilità è quadratica, l'utilità attesa può essere definita in termini di valore atteso e varianza:

$$\begin{aligned}
 E[U(x)] &= E\left(ax - \frac{1}{2}bx^2\right) \\
 &= aE(x) - \frac{1}{2}bE(x^2) \\
 &= a\mu_x - \frac{1}{2}b\mu_x^2 - \frac{1}{2}b\sigma_x^2 \\
 &= \mu_x - A\left(\mu_x^2 + \sigma_x^2\right)
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Se, alternativamente, si ipotizza che i rendimenti si distribuiscano normalmente, il criterio media-varianza porta a risultati equivalenti a quelli della *expected utility rule* per qualsiasi funzione di utilità; ciò perché, in ipotesi di distribuzione gaussiana dei rendimenti, qualsiasi funzione di utilità (avversa al rischio) dà luogo ad una utilità attesa che dipende esclusivamente di σ e μ ¹⁰:

$$E[U(x)] = f(\mu_x; \sigma_x)
 \tag{2.3}$$

¹⁰ Sul tema del confronto tra il principio media varianza e la regola dell'utilità attesa, cfr Kroll, Levi e Markowitz (1984).

2.3 Rendimento e rischio di portafoglio

Una volta definite le preferenze dell'investitore, è immediato identificare gli input necessari al fine di sviluppare l'ottimizzazione alla Markowitz. Scelti gli n asset, occorre stimare sull'*holding period* T :

A. gli n rendimenti attesi degli asset;

$$(2.4) \quad \mu = \begin{bmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ E(R_3) \\ \vdots \\ E(R_i) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{bmatrix}$$

B. le n deviazioni standard dei rendimenti;

$$(2.5) \quad s = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_i \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix}$$

C. gli $[n(n-1)]/2$ coefficienti di correlazione lineare tra le coppie di rendimenti.

$$(2.6) \quad C = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \cdots & \rho_{1,j} & \cdots & \rho_{1,n} \\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3} & \cdots & \rho_{2,j} & \cdots & \rho_{2,n} \\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1 & \cdots & \rho_{3,j} & \cdots & \rho_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{i,1} & \rho_{i,2} & \rho_{i,3} & \cdots & 1 & \cdots & \rho_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \rho_{n,3} & \cdots & \rho_{n,j} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Al prezzo di perdere il significato finanziario dei parametri, le stime di rischio e le misure di correlazione possono essere sintetizzate all'interno della matrice delle covarianze¹¹:

¹¹ Noto il vettore colonna s delle deviazioni standard e la matrice delle correlazioni C , la matrice delle covarianze V può essere calcolata nel modo seguente:

$$V = \text{diag}(s) \cdot C \cdot \text{diag}(s)$$

$$(2.7) \quad V = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \cdots & \sigma_{1,j} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} & \cdots & \sigma_{2,j} & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_{3,3} & \cdots & \sigma_{3,j} & \cdots & \sigma_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{i,1} & \sigma_{i,2} & \sigma_{i,3} & \cdots & \sigma_{i,j} & \cdots & \sigma_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \cdots & \sigma_{n,j} & \cdots & \sigma_{n,n} \end{bmatrix}$$

L'assunto che le preferenze degli investitori siano uniperiodali, nonché definite sul piano (σ, μ) permette di effettuare la scelta sulla base di un numero complessivo di parametri di input pari a $n + n + [n(n-1)]/2 = 2n + [n(n-1)]/2$.

Definito W il vettore colonna contenente gli n pesi assunti dagli asset in portafoglio:

$$(2.8) \quad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

il rendimento ed il rischio attesi del portafoglio possono essere calcolati nel modo seguente:

$$(2.9) \quad E(R_P) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i)$$

$$(2.10) \quad \sigma_P = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}}$$

dove $diag(s)$ è una matrice quadrata di dimensione $n \times n$ nella quale:

- i valori nella diagonale principale sono quelli del vettore s ;
- i valori esterni alla diagonale principale sono nulli.

Analiticamente:

$$diag(s) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_i & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

Le stime di $E(R_P)$ e σ_P vengono frequentemente effettuate ricorrendo all'algebra matriciale:

$$E(R_P) = W^T \cdot \mu = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_i & \cdots & w_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ E(R_3) \\ \vdots \\ E(R_i) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_P = \sqrt{W^T \cdot V \cdot W} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_i & \cdots & w_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \cdots & \sigma_{1,j} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} & \cdots & \sigma_{2,j} & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_{3,3} & \cdots & \sigma_{3,j} & \cdots & \sigma_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{i,1} & \sigma_{i,2} & \sigma_{i,3} & \cdots & \sigma_{i,j} & \cdots & \sigma_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \cdots & \sigma_{n,j} & \cdots & \sigma_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Le formule mostrano chiaramente come il rischio del portafoglio, oltre che dipendere dai pesi e dalle deviazioni standard dei singoli *asset*, sia influenzato dal valore delle correlazioni (delle covarianze) dei rendimenti degli *asset*. A tal proposito, è opportuno approfondire il fenomeno della *diversificazione* che, figlio dell'adagio “*non mettere tutte le uova nello stesso paniere*”, contribuisce a ridurre il rischio di un portafoglio attraverso l'incremento del numero degli *asset* al suo interno.

Supponiamo che il portafoglio sia composto da n attività caratterizzate da:

- a) medesima deviazione standard dei rendimenti ($\sigma_i = \sigma$);
- b) medesima correlazione ($\rho_{ij} = \rho$) tra le coppie di rendimenti;
- c) un peso in portafoglio equivalente, pari a $1/n$.

Dati questi presupposti, il rischio del portafoglio può essere calcolato nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
(2.11) \quad \sigma_P &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{n^2} (n \sigma^2) + n(n-1) \frac{1}{n^2} \sigma^2 \rho} \\
&= \sqrt{\frac{1}{n} \sigma^2 + (n-1) \frac{1}{n} \sigma^2 \rho} \\
&= \sqrt{\frac{1-\rho}{n} \sigma^2 + \rho \sigma^2}
\end{aligned}$$

In presenza di *asset* perfettamente correlati positivamente ($\rho_{ij}=+1$), il rischio di portafoglio è:

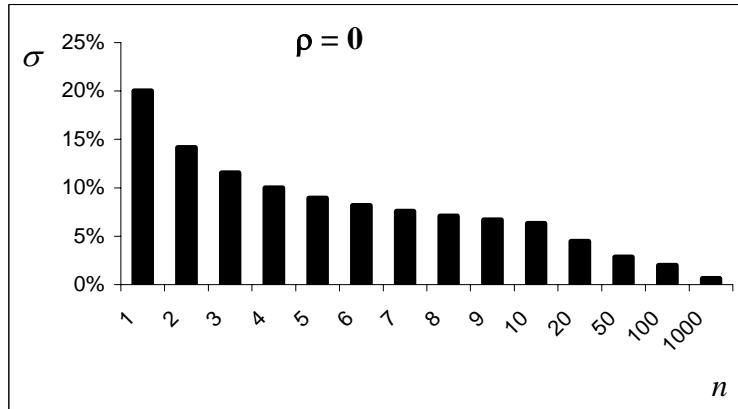
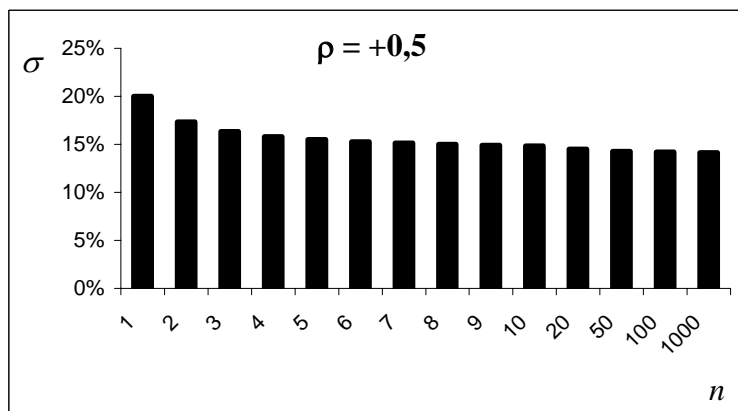
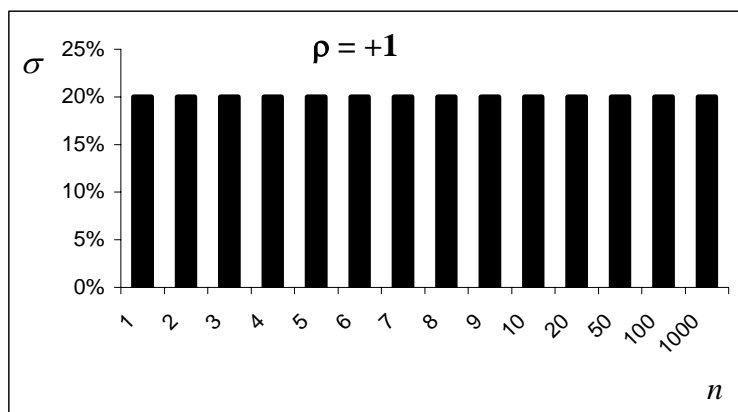
$$(2.12) \quad \sigma_P = \sqrt{\frac{1-1}{n} \sigma^2 + 1 \sigma^2} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

L'effetto diversificazione è nullo perché l'incremento del numero n di attività in portafoglio non contribuisce a ridurre il rischio.

Ipotizzando alternativamente che ciascuna coppia di rendimenti abbia correlazione pari a +0,5, il rischio di portafoglio diventa:

$$(2.13) \quad \sigma_P = \sqrt{\frac{1-0,5}{n} \sigma^2 + 0,5 \sigma^2} = \sqrt{\frac{0,5}{n} \sigma^2 + 0,5 \sigma^2}$$

Figura 2.2: Gli effetti della diversificazione al crescere del numero n di attività in portafoglio ($\sigma_i = 20\%$)



Al crescere del numero di attività il valore $(0,5/n)\sigma^2$ scende, sino ad annullarsi per $n \rightarrow +\infty$. L'aumento di n contribuisce ad accrescere l'effetto di diversificazione, ma il valore $\sigma_p = \sigma\sqrt{\rho} = \sigma\sqrt{0,5}$ rappresenta per la deviazione standard dei rendimenti del portafoglio un valore minimo invalicabile.

Infine, nell'ipotesi in cui tutte le coppie dei rendimenti siano non correlate ($\rho = 0$), il rischio del portafoglio è:

$$(2.14) \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{1-0}{n} \sigma^2 + 0 \sigma^2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sigma \sqrt{\frac{1}{n}}$$

L'incremento progressivo del numero degli *asset* produce una riduzione del rischio che si annulla in ipotesi di numero infinito di titoli.

Gli esempi testé analizzati e sintetizzati graficamente nella Figura 2.2, dimostrano come l'incremento dei titoli in portafoglio, subordinatamente a livelli di correlazione diversi da +1, contribuisca a ridurre il rischio di portafoglio. Inoltre, l'effetto di diversificazione aumenta al ridursi del valore delle correlazioni: *coeteris paribus*, la diminuzione di ρ favorisce una discesa di σ_p . Tuttavia, poiché nella realtà la correlazione media tra le coppie di rendimenti degli *asset* assume valori superiori a zero, il beneficio della diversificazione non è tale da permettere l'annullamento del rischio. Fa eccezione il ricorso alle vendite allo scoperto o a strumenti derivati che, grazie all'assunzione di posizioni corte, permettono di raggiungere livelli di correlazione negativi anche prossimi a -1. In tal caso però è scorretto parlare di diversificazione, trattandosi piuttosto di una strategia di *copertura*.

2.4 La costruzione della frontiera efficiente

Selezionate le n attività e stimati gli n rendimenti attesi, gli n rischi attesi e le $[n \cdot (n-1)]/2$ correlazioni, l'obiettivo è quello di selezionare i portafogli non dominati, ovvero non scartati da un investitore fedele al principio media-varianza. A tale scopo si possono calcolare tutti i portafogli *fattibili* (ovvero tutte le possibili combinazioni dei pesi w_i) e successivamente applicare il principio M-V in modo da selezionare solo quelli non dominati. Le combinazioni rischio-rendimento riportate su un piano $[\sigma, \mu]$ danno quindi forma ad una linea debolmente concava, comunemente denominata *frontiera efficiente*¹².

2.4.1 Il caso di due soli *asset* in portafoglio

Si parte dalla situazione più semplice, quella di due soli *asset*. Si ipotizzi di

¹² È curioso rilevare come il termine *efficient frontier* che oggi identifica il modello di Markowitz non sia stato coniato dall'autore: «Someone aptly coined the phrase “efficient frontier” for what I referred to as the “set of efficient mean-variance combinations”» (Markowitz, 1999).

disporre delle attività A e B che non si dominano l'un l'altra:

$$E(R_A) < E(R_B)$$

$$\sigma_A < \sigma_B$$

Il rendimento ed il rischio attesi di un generico portafoglio possono essere così stimati:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} E(R_P) &= w_A E(R_A) + w_B E(R_B) \\ \sigma_P &= \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}} \end{aligned}$$

Poiché la somma dei pesi deve essere pari a 1 ($w_A + w_B = 1$) e conseguentemente:

$$(2.16) \quad w_B = 1 - w_A$$

il rendimento atteso ed il rischio del portafoglio possono essere scritti nel modo seguente:

$$(2.17) \quad E(R_P) = w_A E(R_A) + (1 - w_A) E(R_B)$$

$$(2.18) \quad \sigma_P = \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + (1 - w_A)^2 \sigma_B^2 + 2w_A (1 - w_A) \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}$$

Risolvendo la 2.17 per w_A e sostituendo il risultato nella 2.18, si giunge al seguente risultato¹³:

$$(2.19) \quad \sigma_P = \sqrt{\frac{[E(R_P) - E(R_B)]^2 \sigma_A^2 + [E(R_A) - E(R_P)]^2 \sigma_B^2 + 2[E(R_P) - E(R_B)][E(R_A) - E(R_P)] \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}{[E(R_A) - E(R_B)]^2}}$$

Questa equazione rappresenta le combinazioni $[\sigma_P, E(R_P)]$ di tutti i portafogli fattibili ottenuti mixando le due attività. L'insieme dei portafogli è differenziato a seconda che si riconosca o meno la possibilità di fare *short selling*, ovvero di attribuire pesi negativi agli asset:

$$- \text{ short selling vietato: } w_i \in [0;1] \text{ e } \sum_{i=1}^n w_i = 1;$$

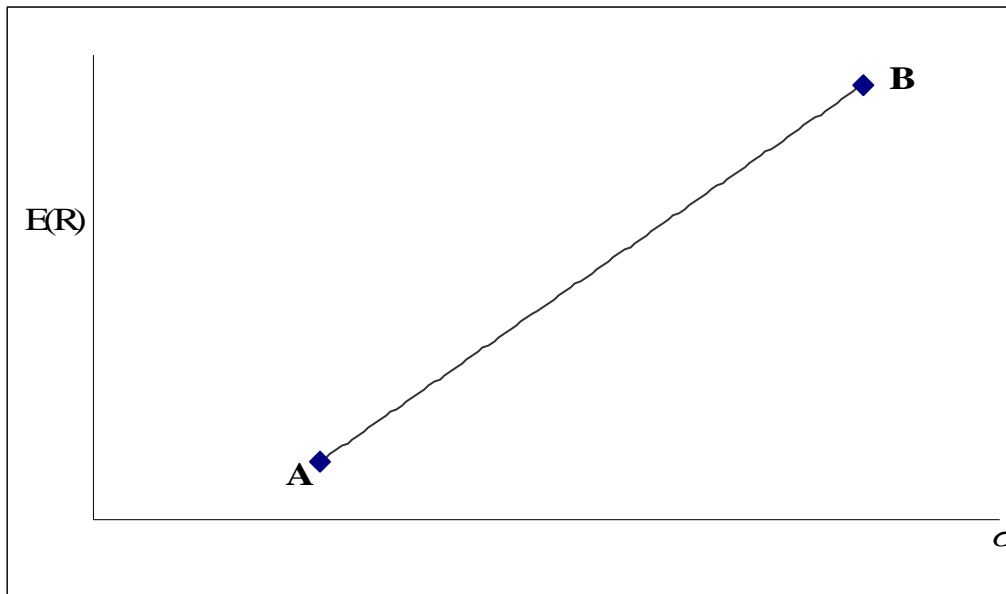
¹³ Si è preferito omettere i tediosi calcoli analitici che permettono di giungere a questa equazione, poiché essi sono ritenuti non funzionali alla trattazione. Sul piano $[\sigma, E(R)]$ l'equazione che identifica l'insieme dei portafogli fattibili non è una funzione, in quanto ad un valore della variabile in ascisse può corrispondere più di un valore della variabile sulle ordinate. Allo scopo di rendere questa espressione una funzione sarebbe necessario esprimere il risultato su un piano $[E(R), \sigma]$: in tal caso tra $E(R)$ e σ esisterebbe una corrispondenza univoca. Poiché la scelta di invertire le variabili sugli assi è interpretata da chi scrive come un *eccesso* di rigore che va a discapito della chiarezza, l'analisi rimane sul piano $[\sigma, E(R)]$.

- *short selling* permesso: $w_i \in (-\infty; +\infty)$ e $\sum_{i=1}^n w_i = 1$;

Nel prosieguo di questo lavoro, se non diversamente specificato, si tratterà il caso che esclude le vendite allo scoperto.

Nell'ipotesi in cui la correlazione tra i rendimenti degli *asset* A e B sia perfettamente positiva, la linea dei portafogli fattibili assume la forma di un segmento¹⁴ (Figura 2.3) che va dal punto $[\sigma_A, E(R_A)]$ al punto $[\sigma_B, E(R_B)]$.

Figura 2.3: Portafogli fattibili ed efficienti in presenza di due soli asset, $\rho_{A,B}=+1$



Nessuno dei portafogli è dominato dagli altri e, conseguentemente, l'insieme dei portafogli fattibili coincide con quello dei portafogli efficienti. Inoltre, non si evidenzia alcun beneficio di diversificazione, in quanto la deviazione standard del portafoglio, al pari del rendimento atteso, è la media ponderata dei rischi dei due asset.

Se, alternativamente, la correlazione tra i rendimenti assume valori compresi tra σ_A/σ_B e $+1$, estremo destro escluso:

¹⁴ Infatti, nell'ipotesi che $\rho_{A,B} = +1$ l'equazione dei portafogli fattibili assume la (più rassicurante) forma $\sigma_P = \alpha + \beta E(R_P)$, con:

$$\alpha = \left[\sigma_B - E(R_B) \frac{\sigma_A - \sigma_B}{E(R_A) - E(R_B)} \right]$$

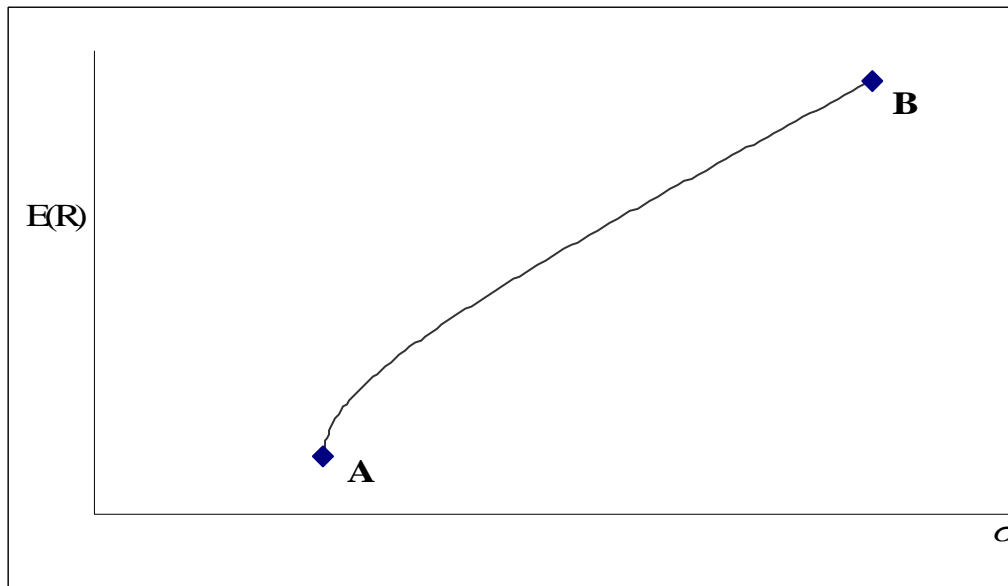
$$\beta = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{E(R_A) - E(R_B)}$$

$$\rho_{A,B} \in \left[\frac{\sigma_A}{\sigma_B}; +1 \right)$$

le combinazioni $[\sigma_P, E(R_P)]$ dei portafogli fattibili si collocano su una linea concava con corrispondenza biunivoca tra $E(R)$ e σ (Figura 2.4).

Anche in questo secondo caso i portafogli dominati sono assenti, e l'insieme dei portafogli fattibili e quello dei portafogli efficienti coincidono. In questo caso il beneficio di diversificazione esiste ($\sigma_P < w_A \sigma_A + w_B \sigma_B$), ma il coefficiente di correlazione lineare non è sufficientemente basso da permettere la creazione di portafogli aventi rischio inferiore a σ_A .

Figura 2.4: Portafogli fattibili ed efficienti in presenza di due soli asset,
 $\rho_{A,B} \in [\sigma_A/\sigma_B, +1)$



Nella Figura 2.5 si mostrano gli ultimi due casi:

- $\rho_{A,B} \in \left(-1; \frac{\sigma_A}{\sigma_B} \right)$;
- $\rho_{A,B} = -1$.

Quando la correlazione è compresa (estremi esclusi) tra σ_A/σ_B e -1, l'insieme dei portafogli fattibili assume una forma curvilinea; inoltre, esistono combinazioni di A e B per le quali è possibile contrarre il rischio del portafoglio al di sotto del rischio

dell'asset meno volatile (A). Con correlazione pari a -1, l'insieme dei portafogli fattibili assume la forma di una spezzata, data dalla combinazione dei segmenti AK e BK ; inoltre, combinando opportunamente le due attività è possibile costruire un portafoglio a rischio nullo¹⁵. In entrambi i casi è possibile identificare dei portafogli dominati, poiché le loro combinazioni rischio-rendimento atteso (quelle che giacciono su AH e AK) non sono appetibili per un investitore *avverso al rischio*. Ne consegue che l'insieme dei portafogli efficienti è un sottoinsieme dei portafogli fattibili: il principio *media-varianza* premia esclusivamente i portafogli le cui combinazioni $[\sigma_P, E(R_P)]$ si collocano sulle porzioni BK e BH .

2.4.2 Il caso generico di n asset in portafoglio

Se si suppone di disporre di $n \geq 3$ attività e di comporre i portafogli utilizzando tutte le combinazioni dei pesi, si ottiene ancora l'insieme dei portafogli fattibili. Tuttavia, a differenza di quanto accade nel caso di due asset, le combinazioni $[\sigma_P, E(R_P)]$ si collocano in una *regione* e non più su una linea. Allo scopo di evidenziare la diversa conformazione assunta dal *set* dei portafogli *fattibili* (sempre in ipotesi di pesi non negativi), si propone un esempio. Si ipotizzi di disporre degli asset A , B e C , le cui combinazioni rendimento-rischio sono:

Figura 2.5: Portafogli fattibili ed efficienti in presenza di due soli asset,
 $\rho_{A,B} \in (-1; \sigma_A/\sigma_B)$ e $\rho_{A,B} = -1$

¹⁵ Con $\rho_{A,B} = -1$ il rischio del portafoglio può essere calcolato nel modo seguente:

$$\sigma_P = |w_A \sigma_A - w_B \sigma_B|$$

Affinché il rischio del portafoglio sia pari a zero, deve valere la seguente uguaglianza:

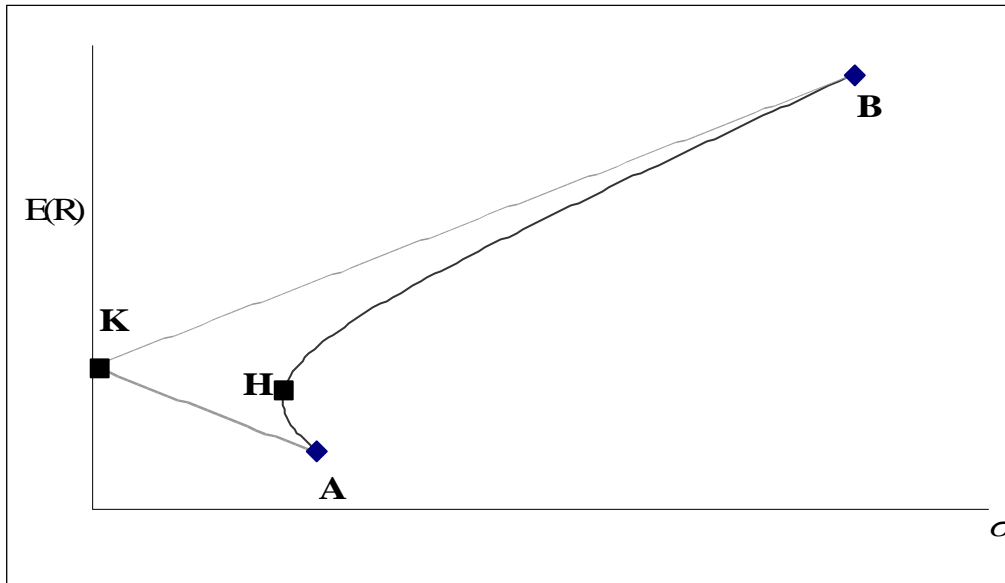
$$w_A \sigma_A = w_B \sigma_B$$

Questa equazione e la condizione che la somma dei pesi sia pari a 1 danno luogo ad un sistema a due equazioni e due incognite:

$$\begin{cases} w_A \sigma_A = w_B \sigma_B \\ w_A + w_B = 1 \end{cases}$$

che, risolto, permette di identificare i pesi di A e B di un portafoglio con rischio nullo:

$$\begin{cases} w_A = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} \\ w_B = \frac{\sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B} \end{cases}$$



$$E(R_A) < E(R_C) < E(R_B)$$

$$\sigma_A < \sigma_B < \sigma_C$$

In virtù del principio media-varianza l'attività B domina l'attività C . Inoltre, supponiamo che le tre coppie di rendimento degli asset non siano correlate ($\rho = 0$).

Limitando l'analisi ad un sottoinsieme (significativo) dei portafogli fattibili, si procede alla costruzione dei portafogli attribuendo i pesi secondo questo criterio¹⁶:

$$(2.20) \quad \sum_{i=1}^3 w_i = 1$$

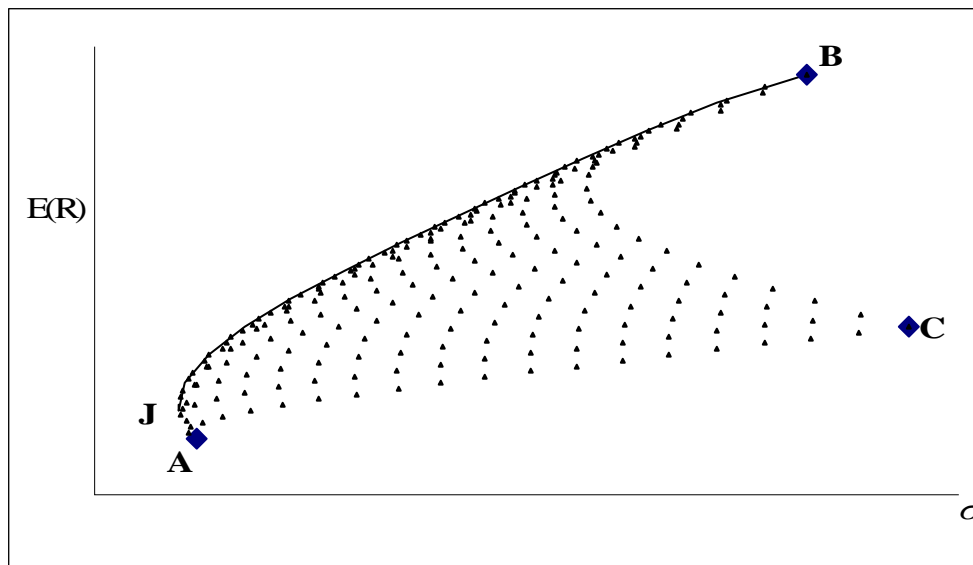
$$w_i = 0,05 * Num_{Intero} \quad \text{con } Num_{Intero} \in [0;20]$$

Figura 2.6: L'area dei portafogli fattibili in presenza di tre asset

¹⁶ Il peso dell'attività i -esima è:

- compreso tra 0 ed 1;
- un multiplo di 0,05.

In tal modo i pesi possono assumere solo 21 valori: 0; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; ... ; 0,9 ; 0,95; 1.



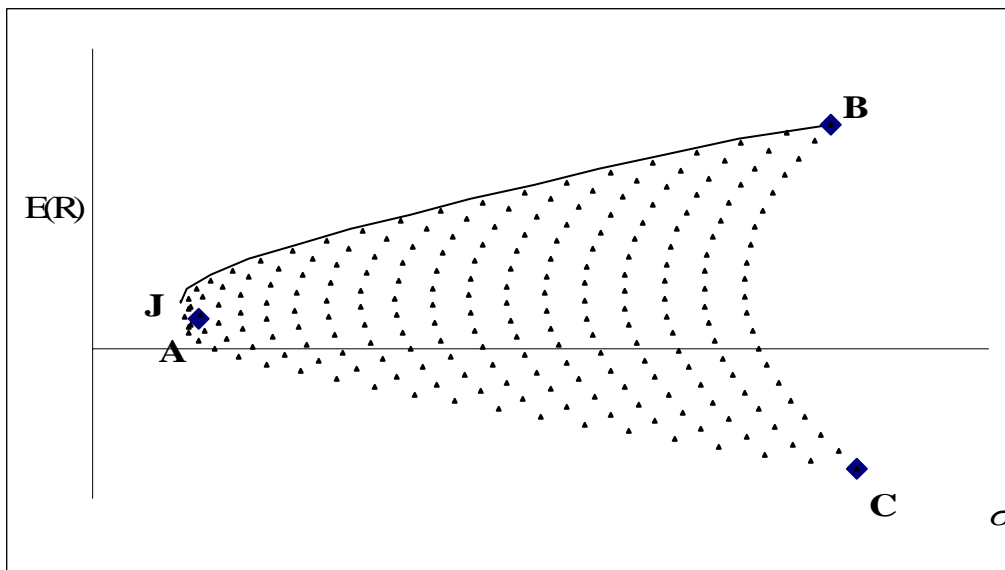
La Figura 2.6 offre una rappresentazione grafica della “nuvola” delle combinazioni rendimento-rischio dei portafogli così costruiti; questa *regione* rappresenta un’ottima *proxy* di quella che otterremmo esplorando l’insieme complessivo dei portafogli *fattibili*. La regione ha una forma che dipende dalle combinazioni rischio-rendimento delle singole asset class (la Figura 2.7 mostra un’altra forma frequente); tuttavia, in presenza di almeno tre asset, non perfettamente correlati e con rendimenti attesi differenti, l’insieme dei portafogli possibili è una regione:

1. continua;
2. convessa verso sinistra.

Il segmento *BJ* delle Figure 2.6 e 2.7 identifica la frontiera efficiente. Il punto J rappresenta la combinazione $[\sigma_P, E(R_P)]$ del portafoglio a minimo rischio, comunemente denominato *minimum variance portfolio*; il punto B identifica il portafoglio caratterizzato da massimo rendimento atteso¹⁷. Quando il *minimum variance portfolio* è anche il portafoglio con rendimento atteso massimo, la frontiera efficiente “degenera” in un punto.

Figura 2.7: La regione dei portafogli possibili a forma di “proiettile”

¹⁷ Occorre puntualizzare che se esiste una attività *j-esima* con rendimento atteso superiore a quello delle restanti *n-1* attività, allora il portafoglio efficiente con rischio massimo si compone esclusivamente dell’attività *j* ($w_j = 1$).



Al di là della valenza teorica del processo qui analizzato, va sottolineato che nella pratica la stima dei portafogli efficienti non passa attraverso la costruzione dell'intero set dei portafogli fattibili, poiché esistono infinite combinazioni:

$$(2.21) \quad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

che rispettano la condizione:

$$(2.22) \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Pertanto i portafogli vengono stimati applicando degli algoritmi che non richiedono l'identificazione di tutti portafogli fattibili.

2.5 Tecniche di calcolo dei portafogli efficienti

Se un processore elettronico avesse la capacità di interpretare perfettamente il linguaggio umano, il problema della costruzione di un portafoglio coerente con la teoria di Markowitz potrebbe essere enunciato con estrema semplicità: «*Seleziona i pesi delle*

attività in modo tale che, dato un valore di rendimento atteso del portafoglio, il rischio sia minimo; inoltre, cerca la soluzione nello spazio W tale per cui la somma dei pesi sia pari al 100% ed ogni peso sia non negativo».

Ricorrendo ai più canonici termini analitici:

$$\begin{aligned}
 & \underset{W}{Min} \quad \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} \\
 & \text{Con vincoli :} \\
 (2.23) \quad & \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = R^* \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Questo problema viene chiamato Programmazione Quadratica (PQ): la funzione obiettivo è appunto quadratica ed i vincoli sono uguaglianze e disuguaglianze lineari. Allo scopo di selezionare l'insieme dei portafogli *non dominati*, la PQ va risolta per valori crescenti di R^* .

Alternativamente, il problema di ottimizzazione può essere espresso secondo una logica di massimizzazione dell'utilità attesa $E(U)$ dell'investitore. Data la funzione:

$$(2.24) \quad E(U) = E(R)_{Port} - \lambda \cdot \sigma_{Port}^2 = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) - \lambda \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}$$

la composizione dei portafogli efficienti può essere calcolata risolvendo il seguente problema¹⁸:

$$\begin{aligned}
 & \underset{W}{Max} \quad \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) - \lambda \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} \\
 (2.25) \quad & \text{Con vincoli :} \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

La PQ va risolta per valori crescenti di λ .

La minimizzazione della varianza di portafoglio al variare del rendimento atteso

¹⁸ Il vantaggio di esprimere il problema media-varianza in questi termini consisterebbe nell'introdurre il coefficiente di avversione al rischio λ , il quale identifica le preferenze dell'investitore circa il *trade-off* rischio-rendimento. Tuttavia, è altamente opinabile l'idea che l'investitore riesca ad attribuire a λ un valore numerico in grado di riflettere la sua effettiva *risk aversion*. Il tema dell'identificazione "consapevole" delle preferenze dell'investitore, è affrontato nel paragrafo 2.7.

condurre al medesimo set di portafogli efficienti ottenuto mediante la massimizzazione dell'utilità attesa, al variare del parametro λ di avversione al rischio.

Problemi di questo tipo non possono essere ridotti alla soluzione di una serie di equazioni lineari; in altri termini, non è possibile risolvere il problema attraverso un algoritmo di tipo *diretto*, in grado di trovare la soluzione esatta mediante un numero finito di operazioni. Tuttavia, gli algoritmi *iterativi*¹⁹, generando una sequenza di soluzioni approssimate capaci di convergere verso la soluzione esatta, rendono piuttosto semplice la ricerca dei portafogli efficienti. Nell'Appendice A.1 si propone un esempio numerico dell'utilizzo del metodo della *critical line* implementato da Markowitz (1956, 1959).

Nel caso in cui venga rimossa l'ipotesi di non negatività dei pesi:

$$(2.26) \quad \begin{aligned} & \underset{w}{Min} \quad \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} \\ & \text{Con vincoli:} \\ & \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = R^* \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{aligned}$$

l'ottimizzazione è più semplice e non impone il ricorso a tecniche iterative; essa, infatti, può essere risolta analiticamente²⁰, scrivendo la Lagrangiana²¹. A tale fine occorre

¹⁹ Tra questi: il metodo del gradiente coniugato e (per equazioni simultanee non lineari) il metodo Newton-Raphson. Sull'utilizzo degli algoritmi iterativi, si vedano: Baldick (2006), Dennis, Schnabel (1983), Gill, Murray e Wright (2005) e Kelley (1995)

²⁰ Sul tema della derivazione analitica della frontiera efficiente, si veda Merton (1972).

²¹ I moltiplicatori di Lagrange sono riconducibili al tema generale della trattazione delle funzioni reali di più variabili reali. Essi sono utili qualora occorra ottimizzare una variabile dipendente che è funzione di due o più variabili indipendenti, in presenza di vincoli sulle variabili stesse. Limitandosi al caso più semplice di due sole variabili indipendenti ed un unico vincolo, ipotizziamo di voler massimizzare la funzione $f(x,y)$ rispettando il vincolo $g(x,y)=0$:

$$\underset{x,y}{Max} f(x, y)$$

Con vincolo:

$$g(x, y) = 0$$

È possibile introdurre una funzione detta appunto Lagrangiana così definita:

$$\mathcal{L}(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

Il parametro λ viene comunemente denominato moltiplicatore di Lagrange.

Identificando i valori x^* , y^* e λ^* che massimizzano la funzione di Lagrange noi riusciamo a risolvere il problema di massimizzazione vincolata; è infatti dimostrato che in corrispondenza dei valori x^* , y^* e λ^* anche la funzione $f(x,y)$ viene massimizzata, nel rispetto del vincolo $g(x,y)=0$.

convertire ogni vincolo in un'equazione il cui secondo membro è nullo:

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) - R^* &= 0 \\ \sum_{i=1}^n w_i - 1 &= 0 \end{aligned}$$

I primi termini delle equazioni vengono poi moltiplicati per i fattori λ e γ (i moltiplicatori di Lagrange) e sottratti alla funzione obiettivo:

$$(2.28) \quad L = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} + \lambda \left[R^* - \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) \right] + \gamma \left(1 - \sum_{i=1}^n w_i \right)$$

Differenziando la Lagrangiana rispetto a ciascun peso w_i e rispetto ai moltiplicatori λ e γ e ponendo successivamente ogni derivata pari a zero, si giunge ad un sistema a $n+2$ equazioni ed $n+2$ incognite:

$$(2.29) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_1} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_n} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = 0 \end{cases}$$

risolvendo il quale, si ottengono i pesi del portafoglio efficiente.

Nell'Appendice A.2 si propone un esempio numerico di applicazione del metodo della Lagrangiana. Ribadiamo, tuttavia, che questa procedura è impraticabile sotto l'ipotesi di divieto di *short selling*.

La *condicio sine qua non* per l'esistenza di un punto di massimo per la funzione di Lagrange è data dal contemporaneo annullamento delle derivate parziali prime rispetto a x , y e λ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Per un approfondimento si consulti un buon testo di Matematica Generale.

2.6 Una applicazione pratica

Al di là del profilo teorico, il tema di maggiore interesse è l'applicazione del modello di Markowitz sul piano operativo. Lo scopo di questo paragrafo è quello di mostrare un caso pratico di implementazione.

Mentre nel suo sviluppo canonico il modello di Markowitz viene applicato ai titoli, esso ha assunto una grossa diffusione soprattutto ai fini della produzione di strategie di *asset allocation*: gli *asset manager* identificano gli investimenti “elementari” nei singoli mercati, ed i portafogli costruiti sono dati dalla loro combinazione. Infatti, dato l'ampissimo numero di titoli emessi sui mercati internazionali, è pressoché impossibile procedere alla costruzione della frontiera a livello di titoli. Si ricorrere dunque ad un primo *step* consistente nel trovare i pesi da attribuire a singole macroclassi di titoli (ed è in questo ambito che Markowitz trova prevalente utilizzo); successivamente ci si preoccupa di “riempire” ogni macroclasse, identificando il peso da attribuire ai titoli negoziati su ogni singolo mercato presente in portafoglio²². Coerentemente con quanto testé affermato, si propone una applicazione del modello di Markowitz ai fini dello sviluppo di strategie di *asset allocation*.

L'iter di identificazione delle strategie di investimento coerenti con i principi di *non sazietà e avversione al rischio* ha avvio con la definizione dell'*holding period*. Successivamente l'*asset manager* è chiamato ad identificare i mercati nei quali intende investire, tenendo eventualmente conto delle preferenze espresse dall'investitore. In questa fase egli non decide i mercati da inserire in portafoglio, bensì quelli che è potenzialmente disposto a includere. Effettuata tale scelta, l'investitore deve identificare, per ogni asset class, un indice di mercato (o *benchmark*), ovvero un indicatore rappresentativo dell'andamento del mercato. L'associazione mercato-benchmark è fondamentale ai fini della stima dei parametri necessari per la costruzione della frontiera efficiente. Sono infatti gli indici di mercato a fornire le serie storiche utili per la stima degli *input*.

L'iter procede con la stima dei seguenti parametri:

- il rendimento atteso di ogni mercato;
- il rischio (deviazione standard dei rendimenti) atteso di ogni mercato;

²² La *stock-bond selection* non è tra i temi trattati all'interno di questo lavoro.

- la correlazione tra i rendimenti di ogni coppia di mercati²³.

Il processo di *portfolio selection* si chiude risolvendo il problema di programmazione quadratica.

Le fasi che caratterizzano l'identificazione dei portafogli di mercati efficienti sono quindi le seguenti:

1. definizione dell'orizzonte temporale;
2. identificazione dei mercati e quindi delle *asset class* in cui investire;
3. associazione benchmark- *asset class*;
4. stima dei parametri di *input*;
5. ottimizzazione.

Si procede con l'esempio numerico. Un *asset manager* italiano vuole costruire portafogli combinando più mercati: monetari, obbligazionari ed azionari. L'orizzonte temporale d'investimento è annuale. I mercati che egli considera potenzialmente interessanti sono otto ed a ciascuno di essi viene associato un indice di mercato (Tabella 2.1).

Tabella 2.1: Mercati e Benchmark selezionati

Mercati	Indici di Mercato
Monetario Area Euro	I. Mkt. 1 = JPM Euro Cash 3M - Tot Return Ind
Obbligazionario Area Euro	I. Mkt. 2 = CGBI WGBI EMU All Mats. - Tot Return Ind
Obbligazionario Internazionale	I. Mkt. 3 = CGBI WGBI BD All Mats - Tot Return Ind
Azionario Europa	I. Mkt. 4 = MSCI Europe - Gross Index
Azionario Nord America	I. Mkt. 5 = MSCI North America - Gross Index
Azionario Giappone	I. Mkt. 6 = MSCI Japan - Gross Index
Azionario Pacifico con esclusione del Giappone	I. Mkt. 7 = MSCI Pacific free ex Japan - Gross Index
Azionario Paesi Emergenti	I. Mkt. 8 = MSCI EM (Emerging Markets) - Gross Index

Ipotizzando che i rendimenti degli indici siano serialmente indipendenti ed identicamente distribuiti (*i.i.d.*), gli input vengono stimati utilizzando il criterio della *classical rule*, ovvero estrapolando i parametri sulla base di un campione storico²⁴ di rendimenti di 19 anni (Gennaio 1988 - Dicembre 2006); i rendimenti sono espressi in euro²⁵, ipotizzando quindi una posizione aperta al cambio. Nella Tabella 2.2 vengono riportate le serie storiche dei rendimenti, utili a chi volesse replicare l'esempio di

²³ Le stime fanno riferimento all'orizzonte temporale prefissato.

²⁴ Fonte: Datastream.

²⁵ Prima del 1999 si è utilizzato il marco quale *proxy* dell'euro.

seguito descritto.

Tabella 2.2: I rendimenti campionari

Anni	I. Mkt. 1	I. Mkt. 2	I. Mkt. 3	I. Mkt. 4	I. Mkt. 5	I. Mkt. 6	I. Mkt. 7	I. Mkt. 8
1988	7,28%	4,30%	17,20%	30,65%	30,32%	52,18%	46,50%	57,68%
1989	9,16%	1,40%	-0,53%	23,05%	24,80%	-2,93%	9,09%	57,29%
1990	11,55%	3,10%	-0,78%	-14,38%	-13,97%	-43,31%	-20,79%	-20,74%
1991	10,41%	11,37%	17,51%	15,33%	31,79%	10,69%	42,64%	62,26%
1992	11,11%	12,80%	12,37%	1,96%	13,01%	-16,19%	13,68%	18,62%
1993	9,03%	14,44%	21,49%	39,21%	18,56%	34,82%	94,42%	87,53%
1994	6,30%	-1,84%	-8,65%	-8,36%	-9,19%	8,56%	-22,89%	-17,27%
1995	6,58%	16,27%	9,92%	12,78%	26,58%	-6,86%	5,32%	-12,47%
1996	4,83%	7,29%	11,57%	30,89%	33,85%	-8,89%	30,66%	14,16%
1997	4,42%	6,16%	16,95%	44,91%	55,10%	-10,80%	-20,86%	3,16%
1998	4,46%	10,94%	6,81%	19,41%	19,53%	-2,51%	-12,04%	-30,84%
1999	3,15%	-2,97%	11,62%	35,52%	43,95%	88,61%	61,69%	94,02%
2000	4,32%	8,39%	9,68%	-0,83%	-4,73%	-22,34%	-8,44%	-25,08%
2001	4,74%	6,25%	4,54%	-15,15%	-7,51%	-25,34%	-4,37%	3,08%
2002	3,53%	8,49%	0,42%	-31,17%	-34,74%	-24,46%	-20,82%	-21,01%
2003	2,54%	3,77%	-4,59%	15,53%	8,05%	13,05%	22,08%	29,76%
2004	2,18%	7,56%	2,32%	12,56%	3,19%	7,51%	20,13%	16,79%
2005	2,20%	5,67%	7,52%	26,93%	23,47%	45,05%	32,60%	55,34%
2006	3,02%	-0,28%	-4,95%	20,35%	3,44%	-4,75%	19,27%	18,76%

La Tabella 2.3 sintetizza l'insieme delle stime campionarie.

L'applicazione di un modello di ottimizzazione²⁶ permette di identificare le combinazioni rendimento-rischio che sul piano $[\sigma, E(R)]$ disegnano il *set of points representing efficient portfolios* (Figura 2.8); il compito di esibire la composizione dei (100) portafogli ottimali è affidato ad un grafico ad area (Figura 2.9).

²⁶ Si è utilizzata la funzione “*portopt*” disponibile nel *Financial Toolbox* di *Matlab*.

Tabella 2.3: Le stime campionarie

Indici di Mercato	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi
I. Mkt. 1	5,83%	3,09%
I. Mkt. 2	6,48%	5,31%
I. Mkt. 3	6,86%	8,56%
I. Mkt. 4	13,64%	20,41%
I. Mkt. 5	13,97%	22,05%
I. Mkt. 6	4,85%	31,57%
I. Mkt. 7	15,15%	31,59%
I. Mkt. 8	20,58%	38,72%

Correlazioni	I. Mkt. 1	I. Mkt. 2	I. Mkt. 3	I. Mkt. 4	I. Mkt. 5	I. Mkt. 6	I. Mkt. 7	I. Mkt. 8
I. Mkt. 1	1	0,28	0,28	-0,11	0,03	-0,24	0,08	0,11
I. Mkt. 2	0,28	1	0,56	-0,01	0,06	-0,28	0,12	-0,15
I. Mkt. 3	0,28	0,56	1	0,54	0,64	0,33	0,54	0,44
I. Mkt. 4	-0,11	-0,01	0,54	1	0,90	0,62	0,62	0,63
I. Mkt. 5	0,03	0,06	0,64	0,90	1	0,53	0,46	0,54
I. Mkt. 6	-0,24	-0,28	0,33	0,62	0,53	1	0,74	0,79
I. Mkt. 7	0,08	0,12	0,54	0,62	0,46	0,74	1	0,89
I. Mkt. 8	0,11	-0,15	0,44	0,63	0,54	0,79	0,89	1

Il decisore fedele al principio media-varianza dovrà quindi investire in un portafoglio che permetta di raggiungere una delle combinazioni rischio-rendimento collocate sulla frontiera efficiente; infatti, date le stime, non esiste nessuna altra combinazione dalla quale aspettarsi delle combinazioni migliori. Come era lecito attendersi, i punti più a sinistra della frontiera efficiente (quelli caratterizzati da minore rischio, la cui composizione è riportata nella parte sinistra della Figura 2.9) sono ottenuti combinando quasi esclusivamente mercati obbligazionari e monetari; i punti più a destra della frontiera efficiente (la cui composizione è riportata nella parte destra della Figura 2.9) sono ottenuti combinando prevalentemente mercati azionari. L'ultimo punto all'estrema destra (*maximun expected return portfolio*) è stato ottenuto selezionando esclusivamente il mercato azionario *Emerging Markets*. Alcuni mercati (l'obbligazionario Internazionale, l'azionario Giappone e quello Pacifico ex Giappone) non sono mai selezionati: infatti, qualora vi si investisse, la combinazione rischio-rendimento così ottenuta verrebbe irrimediabilmente scartata dal principio media-varianza.

Figura 2.8: La frontiera efficiente

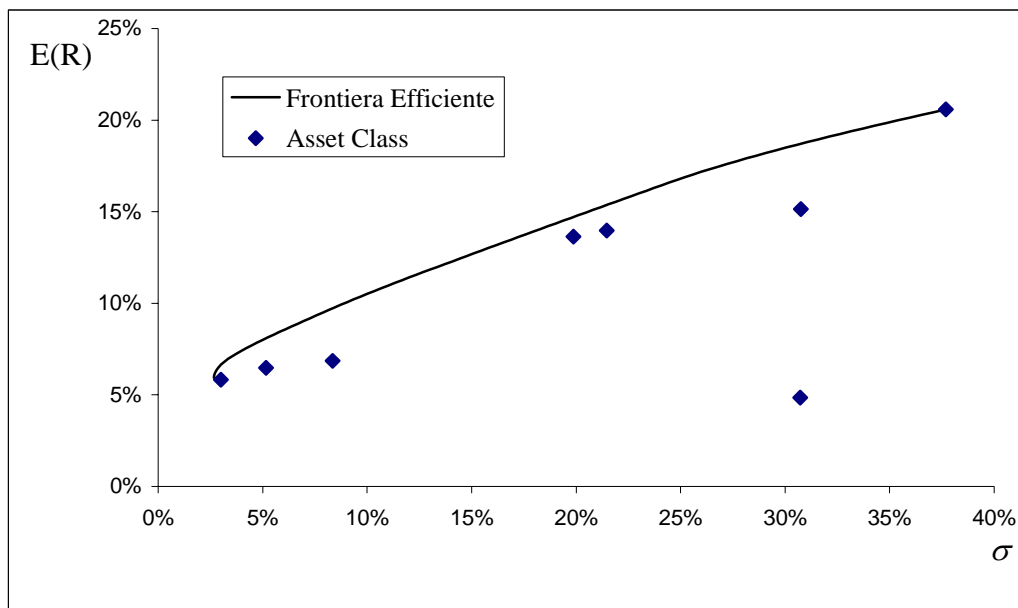
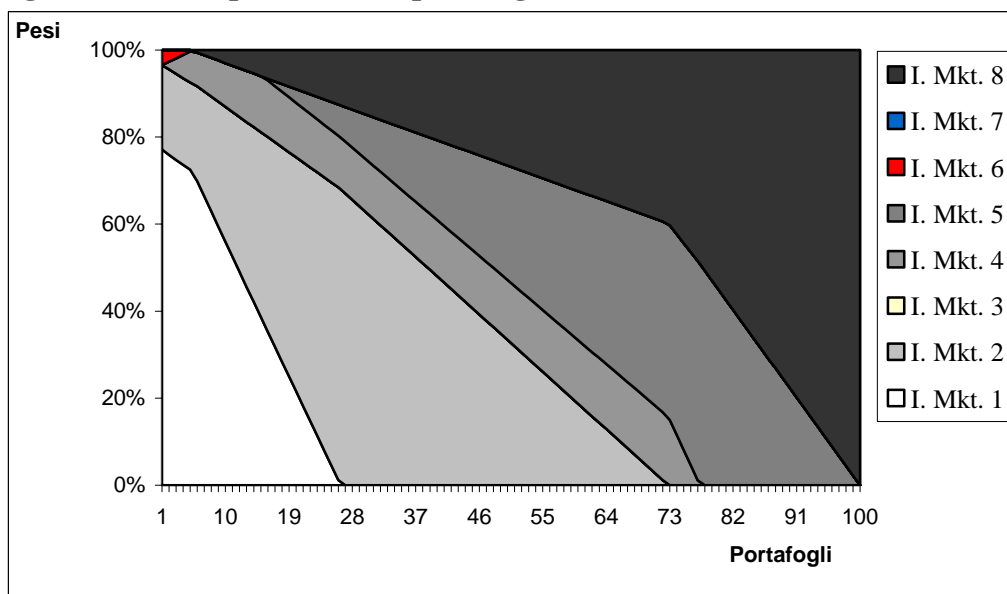


Figura 2.9: Composizione dei portafogli efficienti



2.7 La selezione del portafoglio ottimo per l'investitore

La costruzione della frontiera efficiente permette di identificare l'intero spettro dei portafogli non dominati. Assumendo i panni di uno specifico investitore, il processo di *portfolio selection* si chiude solo con l'identificazione di quell'unico portafoglio in grado di massimizzare le sue preferenze. Infatti l'insieme dei portafogli efficienti

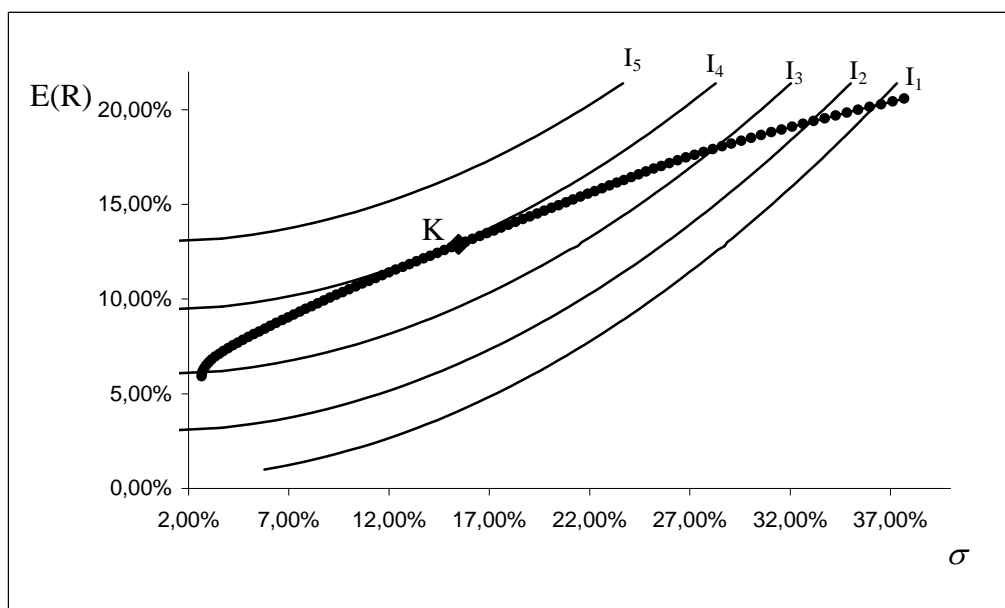
soddisfa ogni investitore *avverso al rischio* e *mai sazio*: il singolo investitore è poi chiamato a isolare quello prescelto sulla base delle proprie preferenze²⁷. Il presente lavoro si focalizza sul tema della costruzione, non su quello sequenziale di selezione del portafoglio coerente con la *risk tolerance* dell'investitore. Ciò nonostante, è utile dedicare uno spazio a questo tema.

Una logica di selezione “politicamente corretta”, perché fedele all’approccio teorico descritto, è quella basata sull’identificazione di una funzione di utilità e sulla successiva massimizzazione della *expected utility*. Ipotizzando che le preferenze dell’investitore siano sintetizzate dalla seguente funzione di utilità attesa:

$$(2.30) \quad \begin{aligned} E[U(x)] &= E(R) - \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \sigma^2 \\ E[U(x)] &= E(R) - \frac{3}{2} \cdot \sigma^2 \end{aligned}$$

la ricerca del miglior portafoglio passa attraverso la sua massimizzazione.

Figura 2.10: La selezione del portafoglio attraverso la costruzione delle curve di indifferenza.

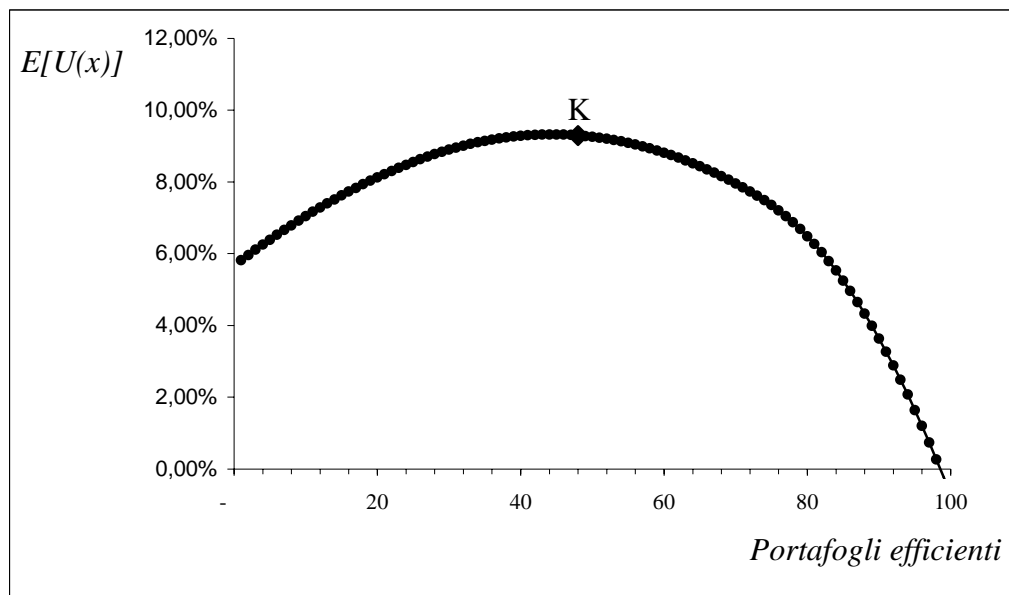


Riprendendo l’esempio numerico proposto nel paragrafo precedente e costruendo la curve di indifferenza *I* che mostrano le combinazioni $[\sigma_P, E(R_P)]$ con

²⁷ Questo processo è imitato dalle reti dei promotori finanziari, dai *private banker*, dai *financial advisor* quando essi selezionano, all’interno della propria gamma, la gestione più adatta a soddisfare le esigenze di un cliente.

medesimi valori di $E[U(x)]$, la Figura 2.10 permette di identificare il punto K della frontiera efficiente che, assicurando la maggiore utilità attesa, massimizza le preferenze dell'investitore. Il medesimo risultato si otterrebbe calcolando direttamente il valore della *expected utility* dei portafogli efficienti e selezionando quello che ne massimizza il valore (Figura 2.11).

Figura 2.11: La selezione del portafoglio attraverso la massimizzazione dell'utilità attesa.



Il processo testé descritto, per quanto teoricamente ineccepibile, è impraticabile nella realtà: qualsiasi *financial advisor* confermerebbe che nessun investitore è capace di definire scientemente una funzione di utilità in grado di riflettere le proprie preferenze. Infatti, pur ipotizzando che l'utilizzo di una funzione di utilità quadratica sia adeguato per ogni investitore, questi non sarebbe capace di comunicare il valore del parametro λ che riflette le sue preferenze. A proposito del legame tra funzioni di utilità e selezione del portafoglio, Markowitz (1959) scrive: «*The most interesting and relevant argument against the expected utility maxim involves specific cases in which human subject, after careful deliberation, choose alternatives inconsistent with the maxim. The situations are reasonably simple, the human choice fairly definite, the contradiction between choice and maxim apparently inescapable. Either we must conclude that the expected utility maxim is not the criterion of rational behavior, or else we must conclude that human being has a natural propensity toward irrationality, even*

in his most reflective moments».

Circa le ragioni dell'inconsistenza pratica dell'*expected utility rule*, Markowitz sembra propendere per l'irrazionalità dell'investitore. Si è pronti a scommettere che ogni *financial advisor* sottoscriverebbe questa posizione: l'investitore-tipo non ha le competenze matematiche sufficienti per interpretare una funzione di utilità e quindi tradurre nei parametri numerici la propria avversione al rischio²⁸.

Ed è a causa dell'inconsistenza pratica del processo di selezione basato sulle funzioni di utilità, che operativamente si opta per soluzioni meno rigorose da un punto di vista teorico, ma più vicine al modo di ragionare degli investitori. Ad esempio è prassi identificare il grado di tolleranza al rischio attraverso l'indice di Sharpe:

$$(2.31) \quad \frac{E(R) - r_f}{\sigma} = S$$

dove:

r_f = tasso di rendimento *risk-free*.

Questo indicatore di *risk adjusted performance* identifica il premio al rischio che l'investitore richiede per ogni unità di rischio assunto. L'investitore caratterizzato da una elevata tolleranza al rischio si contraddistinguerà per un basso valore di S , poiché egli è disposto a ricevere un minor *risk premium* per ogni unità di σ . Ipotizziamo che le preferenze dell'investitore siano sintetizzate da un valore dell'indice pari a 0,639. Basandosi ancora sull'esempio numerico precedente e costruendo le combinazioni²⁹ $[\sigma_P, E(R_P)]$ caratterizzate da un indice di Sharpe pari a 0,639, la Figura 2.12 permette di identificare il punto di incontro K sulla frontiera efficiente che è coerente con il grado di tolleranza al rischio. Lo stesso risultato si ottiene calcolando direttamente il valore dell'indice di Sharpe dei portafogli efficienti e selezionando quello che si caratterizza per un valore di S pari al valore prescelto (Figura 2.13).

È ammissibile che il lettore possa esprimere delle serie perplessità circa la capacità dell'indice di Sharpe di alleviare il problema dell'irrazionalità dell'investitore e

²⁸ Il concetto di incapacità matematica e quello di irrazionalità finanziaria non coincidono. Piuttosto, l'incapacità matematica, ovvero l'assenza di competenze matematiche sufficienti, viene interpretata come una causa (tra le tante) scatenante il comportamento irrazionale dell'investitore.

²⁹ Sul piano $[\sigma; E(R)]$ tali combinazioni si collocano su una linea retta ribattezzata *shorfall line*:

$$\begin{aligned} \frac{E(R) - r_f}{\sigma} &= 0,639 \\ E(R) &= r_f + 0,639\sigma \end{aligned}$$

quindi rappresentare una soluzione pratica al problema della *portfolio selection*. In realtà pochi semplici passaggi algebrici, unitamente all'ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti, contribuiranno a rafforzare l'efficacia di questo indice:

$$\begin{aligned} \frac{E(R) - r_f}{\sigma} &= S \\ (2.32) \quad E(R) - r_f &= S \cdot \sigma \\ E(R) - S \cdot \sigma &= r_f \end{aligned}$$

Grazie alle proprietà della distribuzione gaussiana, è possibile associare ad S (identificabile come multiplo della deviazione standard) la probabilità di conseguire un rendimento inferiore al tasso di rendimento *risk free*:

$$(2.33) \quad \Pr = N(S)$$

Dove $N(\cdot)$ è la funzione di ripartizione di una normale standard.

Figura 2.12: La selezione del portafoglio attraverso l'indice di Sharpe

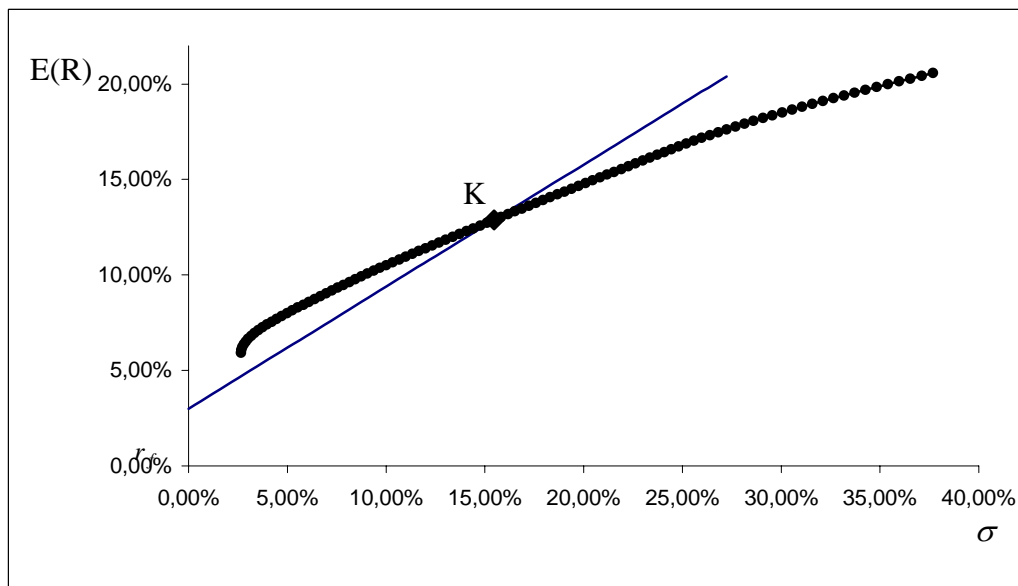
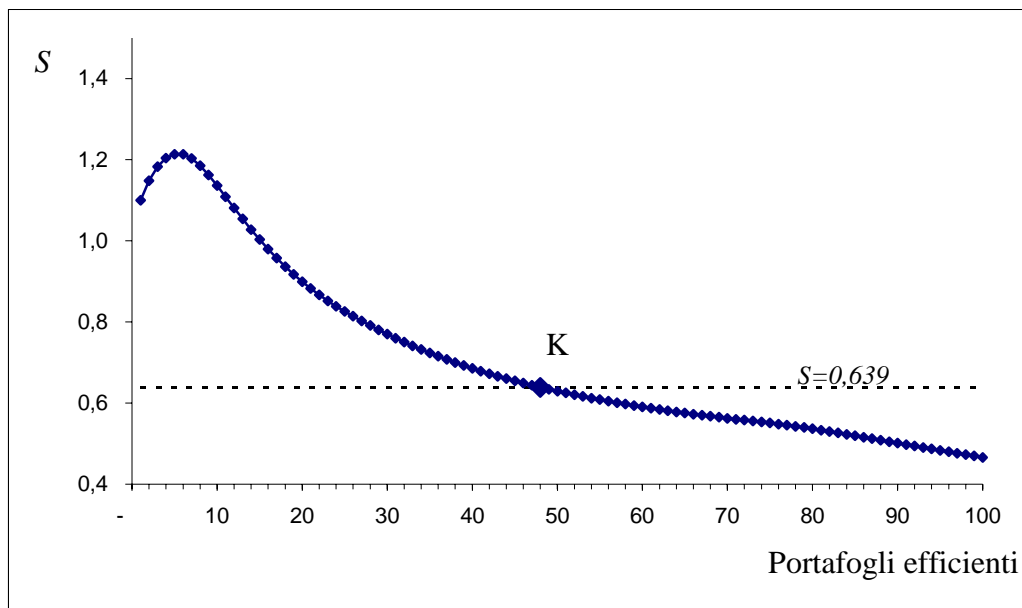


Figura 2.13: La stima dell'indice di Sharpe dei portafogli.



Nella Tabella 2.4 vengono riportate le *shortfall probability* - ovvero le probabilità di conseguire rendimenti inferiori a r_f - corrispondenti a diversi valori dell'indice di Sharpe. Si noti come l'incremento dell'indice produca una riduzione della probabilità di conseguire risultati inferiori al tasso di rendimento privo di rischio: minore è la tolleranza al rischio, maggiore deve essere il valore S, così da ridurre la possibilità di conseguire valori inferiori al tasso privo di rischio.

Tabella 2.4: Indice di Sharpe e *shortfall probability*

Indice di Sharpe	Shortfall Probability
0,250	40,13%
0,500	30,85%
0,639	26,14%
0,750	22,66%
1,000	15,87%
1,250	10,56%
1,500	6,68%
2,000	2,28%

Se il criterio basato sulle funzioni di utilità è praticamente inapplicabile, è invece fattibile un processo di *portfolio selection* basato sul seguente iter:

1. l'investitore fissa la probabilità di *shortfall* tollerata (26,14%);
2. ricorrendo alle proprietà delle distribuzioni gaussiane si identifica il valore

dell'indice di Sharpe corrispondente a tale probabilità ($S=0,639$)³⁰;

3. si disegna la *shortfall line* - $E(R) = r_f + 0,639\sigma$ - grazie alla quale viene identificato il portafoglio efficiente coerente con il livello di tolleranza al rischio dell'investitore³¹.

Il tentativo di utilizzare il concetto di *shortfall probability* come strumento di valutazione della *risk tolerance* va inserito nel filone della letteratura finanziaria applicata, che identifica nella stima degli eventi estremi probabilistici (i *lower partial moments*) la risposta all'esigenza di conciliare l'utilizzo di tecniche quantitative con il ricorso a concetti comprensibili anche per gli investitori finanziariamente impreparati³².

L'analisi del tema della selezione del portafoglio coerente con le preferenze dell'investitore si chiude qui, non prima però di osservare che nella pratica si ricorre sovente a metodologie di *selection* (percentuale tollerata di *risky assets*, questionari, *worst case scenario*, ecc.) qui ignorate perché non sempre consistenti da un punto di vista teorico.

2.8 Markowitz, tra mito e false credenze

Harry Markowitz ha lasciato una traccia indelebile nel campo della teoria di portafoglio. Ne sono una prova la sterminata letteratura sul tema e la puntuale presenza di esami *ad hoc* in ogni corso di laurea, master e dottorato di stampo economico-finanziario. La fama di Markowitz e della sua teoria ha però valicato i confini della teoria e dell'accademia, entrando in pianta stabile nella quotidianità dell'*asset*

³⁰ Tale valore può essere calcolato ricorrendo all'inversa di una normale standardizzata:

Calcolare S in modo che: $N(S) = \text{Shortfall Probability}$

Dove $N(\cdot)$ è la funzione di ripartizione di una normale standard.

³¹ Il processo può essere ulteriormente generalizzato:

1. l'investitore definisce il rendimento soglia R^* sotto il quale non desidera scendere;
2. l'investitore fissa la probabilità di *shortfall*, ovvero la probabilità tollerata di conseguire rendimenti inferiori a R^* ;
3. ricorrendo alle proprietà delle distribuzioni gaussiane si identifica il valore dell'indice $G = [E(R) - R^*] / \sigma$ corrispondente alla probabilità di *shortfall* desiderata;
4. infine, si disegna la *shortfall line* $E(R) = R^* + G\sigma$ grazie alla quale è possibile selezionare il portafoglio efficiente coerente con il livello di tolleranza al rischio.

Sull'utilizzo della *short fall line* nelle scelte di portafoglio, cfr. Leibowitz e Kogelman (1991).

³² L'utilizzo dei modelli VaR nell'*asset management* rientra pienamente in questa corrente di studi. Per una analisi generale sui modelli VaR, cfr. Jorion (2001), Resti e Sironi (2007), Saita (2000) e Sironi (2005); sull'utilizzo dei modelli VaR nell'ambito della *portfolio construction*, cfr. Basak e Shapiro (2001), Cuoco, He e Issaenko (2001), Alexander e Baptista (2002).

management: l'ottimizzazione di Markowitz rappresenta il momento topico di ogni corso di *portfolio construction* dedicato a gestori, consulenti finanziari, *private bankers*; tutti i software di *financial planning* fanno della programmazione quadratica il modello matematico dominante per lo sviluppo dell'attività di *asset allocation*. Queste sconfinite fonti informative hanno contribuito ad accrescere la fama di questo modello, ma anche a favorire la diffusione di *common mistakes*, ovvero di errori interpretativi che attribuiscono a Markowitz pensieri che non trovano fondamento nei suoi scritti. Da qui l'esigenza di confutare alcune delle convinzioni più radicate.

Il fatto che Markowitz abbia evidenziato i benefici riconducibili alla *portfolio diversification* induce erroneamente a ipotizzare che il modello di ottimizzazione produca portafogli efficienti molto diversificati, ovvero composti da un gran numero di attività. A tal proposito Markowitz (1952) scrive: «*It is conceivable that one security might have an extremely higher yield and a lower variance than all other securities; so much so that one particular undiversified portfolio would give maximum E (rendimento atteso) and minimum V (varianza). But for a large, presumably representative range of μ_i , σ_{ij} the E-V rule leads to efficient portfolios almost all of which are diversified. Not only does the E-V hypothesis imply diversification, it implies the "right kind" of diversification for the "right reason"*». Il livello di diversificazione dei portafogli efficienti non è identificabile a priori, dipendendo dal valore dei parametri di input: in alcuni casi l'ottimizzazione restituisce portafogli concentrati in pochi asset; in altri i portafogli sono molto diversificati. A dimostrazione di ciò, riprendiamo l'esempio numerico proposto nel paragrafo 2.6, ipotizzando però correlazioni nulle tra le 28 coppie di asset class. Ottimizzando, si ottengono portafogli efficienti la cui composizione è sintetizzata nella Figura 2.14. Si noti come la riduzione dei coefficienti di correlazione contribuisca ad incrementare la diversificazione dei portafogli. Se alternativamente le correlazioni tra le coppie di rendimenti fossero perfettamente positive, il risultato sarebbe sensibilmente differente, con portafogli decisamente più concentrati (Figura 2.15). Risultati simili si otterrebbero mutando i parametri $E(R)$ e σ . Ad ogni modo, la probabilità che i portafogli efficienti siano estremamente concentrati è elevata: «*Portfolios constructed using sample moments of returns often involve very extreme positions [...] Admittedly, the theoretical link between "diversification", in the sense of putting small weight on any asset, and variance minimization are tenuous*»

(Green e Hollifield, 1992). Per un approfondimento sul tema della diversificazione nella ottimizzazione alla Markowitz, si rimanda al lavoro degli autori testé menzionati.

Troppo spesso si sostiene che Markowitz identifichi nella *classical rule* la strada per la stima dei parametri. Questo pensiero appare tanto errato quanto sorprendente, se si pensa che il suo primo articolo del 1952 inizia con queste testuali parole: «*The process of selecting a portfolio may be divided into two stages. The first stage starts with observation and experience and ends with beliefs about the future performances of available securities. The second stage starts with the relevant beliefs about future performances and ends with the choice of portfolio. This paper is concerned with the second stage*». L'autore dunque non è interessato al problema della stima degli input, ma a quello sequenziale di costruzione dei portafogli efficienti. Non che la stima degli input sia una fase irrilevante, semplicemente è un altro tema o, afferma Markowitz: «*is "another story". It is a story of which I have read only the first page of the first chapter*».

Pur non occupandosene, Markowitz non ha mancato di commentare il problema della stima dei parametri di *input*, e dalle sue parole si evince quanto il suo pensiero sia distante dall'esprimere una preferenza per un approccio basato sul solo uso di serie storiche: «*To use the E-V rule in the selection of securities we must have procedures for finding reasonable μ_i and σ_{ij} . The procedures, I believe, should combine statistical techniques and the judgment of practical men. [...] One suggestion as to tentative μ_i and σ_{ij} is to use the observed μ_i and σ_{ij} for some period of the past. I believe that better methods, which take into account more information, can be found*» (Markowitz, 1952). In conclusione, il ricorso a stime campionarie è la soluzione di ripiego di chi rinuncia ad utilizzare tecniche più sofisticate che devono contemplare anche il coinvolgimento degli esperti. Il capitolo 5 contribuirà a dimostrare come le parole dell'autore abbiano anticipato uno dei temi di ricerca più significativi nati intorno al modello di Markowitz.

Figura 2.14: La composizione dei portafogli efficienti in ipotesi di correlazione nulla tra i rendimenti dei mercati.

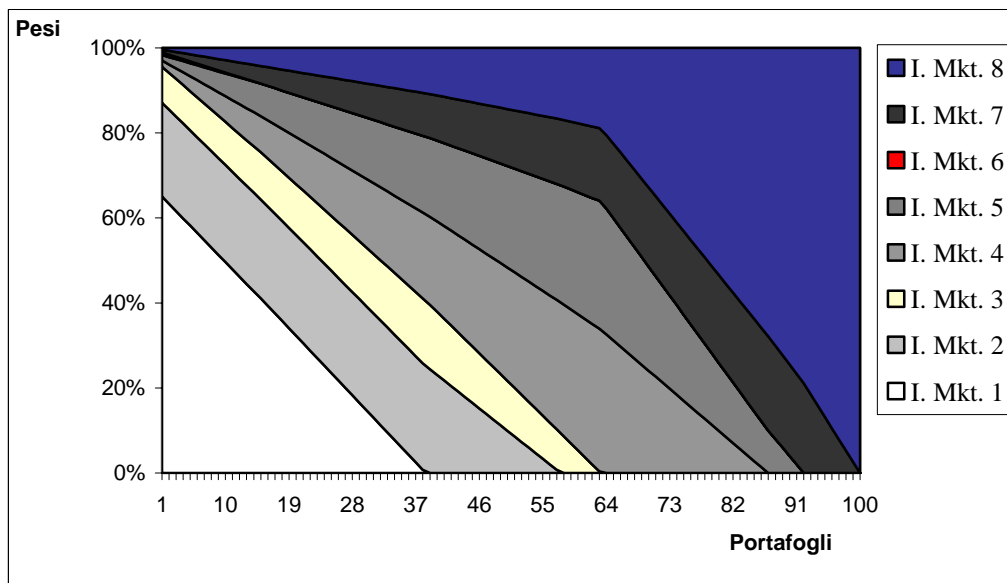
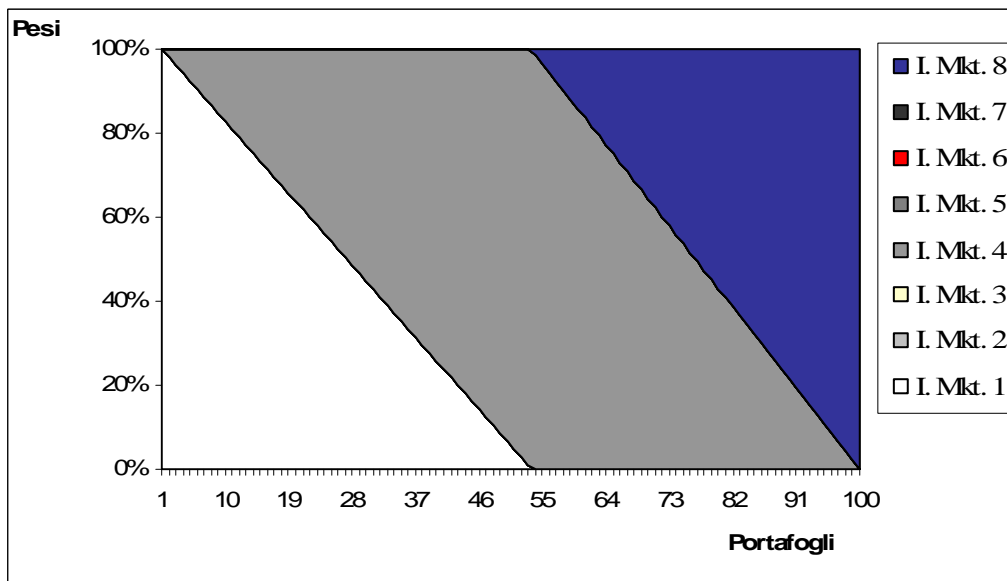


Figura 2.15: La composizione dei portafogli efficienti in ipotesi di correlazioni perfettamente positive tra i rendimenti dei mercati.



Appendice A.2.1: La stima dei portafogli efficienti in ipotesi di divieto di *short selling* con il metodo della *critical line*

Il problema di Programmazione Quadratica implicito nel principio media-varianza consiste essenzialmente in una minimizzazione vincolata della varianza del portafoglio. Poiché la funzione da minimizzare è globalmente concava, qualsiasi algoritmo di ottimizzazione (gradiente, Newton, ecc...) si comporta efficacemente, e si è quindi immuni dal rischio che lo stesso incappi in un minimo locale. Tuttavia, nella speranza che l'analisi seguente non assuma una valenza "archeologica", ma contribuisca piuttosto alla completezza della trattazione, proponiamo una applicazione della tecnica della *critical line* originariamente proposta da Markowitz per risolvere il problema di Programmazione Quadratica. Il lettore non incuriosito dai processi di ottimizzazione può saltare questa parte (e la successiva Appendice), senza temere ripercussioni sulla comprensibilità delle parti successive.

È un ispirato Markowitz (1959) ad offrirci una interpretazione intuitiva della relazione esistente tra le *critical line* e i portafogli ottimali: «*Image the critical line as railroad tracks. Image, further, that a passenger boards a train at \underline{X} [il portafoglio a minimo rischio] and travels in the direction of increasing expected return. The first time his train crosses another track – as soon as the first critical line intersects a second critical line – the passenger transfers to the next track, the new critical line and again travels in the direction of increasing E [il rendimento atteso] This continues until the passenger reaches \bar{X} with maximum E* ».

Al fine di facilitare la comprensione della procedura, si fa ricorso ad un esempio numerico semplificato che limita l'analisi al caso di tre soli *asset*. Per costruire i portafogli *non dominati* sono necessari i seguenti input:

1. La matrice varianze-covarianze:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,039 & 0,038 & 0,047 \\ 0,038 & 0,046 & 0,044 \\ 0,047 & 0,044 & 0,142 \end{bmatrix}$$

2. il vettore colonna dei rendimenti attesi

$$\mu = \begin{bmatrix} E(R)_1 \\ E(R)_2 \\ E(R)_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \end{bmatrix}$$

Definiti con w_1 , w_2 e w_3 i pesi dei 3 asset in portafoglio, si pone un unico vincolo lineare (somma dei pesi pari a 1):

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

con $w_i \geq 0$ per $i = 1, 2, 3$

Dati i vettori e scalari:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad b = 1$$

il vincolo lineare può essere espresso in forma matriciale:

$$AW = b$$

Ai fini dello sviluppo del *critical line method* occorre costruire tre nuove matrici definite M , R e S :

$$M = \begin{bmatrix} V & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,039 & 0,038 & 0,047 & 1 \\ 0,038 & 0,046 & 0,044 & 1 \\ 0,047 & 0,044 & 0,142 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definiamo *unit cross* la combinazione (all'interno di una matrice) di un vettore riga ed un vettore colonna composti da tutti zero con eccezione del valore di intersezione che assume valore 1. Così, data la matrice M , sostituendo la terza riga e la terza colonna con una *unit cross* si giunge al seguente risultato:

$$\begin{bmatrix} 0,039 & 0,038 & 0 & 1 \\ 0,038 & 0,046 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'insieme dei portafogli efficienti è costituito da porzioni di specifiche *critical lines*; ciascuna *critical line* viene costruita combinando solo alcuni asset che denominiamo *in*; gli asset non considerati sono definiti *out*. L'equazione di una *critical line* è la seguente:

$$\tilde{M} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = R + \tilde{S} \lambda_E$$

La matrice non singolare \tilde{M} coincide con la matrice M , con l'eccezione delle righe e colonne corrispondenti agli asset *out* le quali vengono sostituite da *unit crosses*. Il ruolo del parametro λ_1 emergerà in seguito. Il vettore colonna \tilde{S} coincide con il vettore S , con l'eccezione dei valori corrispondenti agli asset *out* che vengono sostituiti con valori nulli. Ad esempio, se gli asset 2 e 3 sono *in* e l'asset 1 è *out*, \tilde{M} e \tilde{S} assumono le forme:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,046 & 0,044 & 1 \\ 0 & 0,044 & 0,142 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,140 \\ 0,206 \\ 0 \end{bmatrix}$$

λ_E è uno scalare; noto questo parametro, l'equazione della *critical line* può essere risolta per w_1 , w_2 e w_3 .

Attraverso alcuni passaggi algebrici elementari è possibile scrivere la formula analitica della *critical line* nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = (\tilde{M})^{-1} R + (\tilde{M})^{-1} \tilde{S} \lambda_E$$

dove $(\tilde{M})^{-1}$ è la matrice inversa di \tilde{M} .

Al fine di semplificare il processo di calcolo è utile modificare la matrice $(\tilde{M})^{-1}$, sostituendo le *unit cross* con *zero crosses*³³. Definendo $N(i)$ la matrice che si ottiene attraverso questa sostituzione, la formula della *i-esima critical line* può essere scritta:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = N(i)R + N(i)S\lambda_E$$

Si noti come il ricorso agli *zero cross* permetta di usare il vettore S al posto di \tilde{S} .

Il processo di calcolo della frontiera efficiente ha inizio con l'identificazione del portafoglio con massimo rendimento atteso. Tale portafoglio è sempre di facile identificazione, poiché esso è composto per il 100% dall'asset con massimo rendimento atteso; nel caso qui illustrato il portafoglio si compone dell'attività 3:

$$W^{(1)} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A questo punto è possibile calcolare la *critical line* calcolata quando solo l'asset 3 è *in*. In tal caso le matrici \tilde{M} , $(\tilde{M})^{-1}$ e $N(1)$ sono:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,142 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\tilde{M})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0,142 \end{bmatrix} \quad N(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0,142 \end{bmatrix}$$

La formula della prima *critical line* è quindi la seguente:

³³ Lo *zero cross* è uguale ad un *unit cross*, con l'unica eccezione rappresentata dal fatto di presentare un valore nullo anche in corrispondenza del valore di intersezione. Per passare da un *unit cross* ad un *zero cross* è quindi sufficiente azzerare il valore all'intersezione tra righe e colonne.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} &= N(1)R + N(1)S\lambda_E \\
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0,142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0,142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_E \\
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,142 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,206 \end{bmatrix} \lambda_E
\end{aligned}$$

Per qualsiasi valore assunto da λ_E i pesi assunti in portafoglio non subiscono variazioni (con $w_1 = w_2 = 0$ e $w_3 = 1$); solo il parametro λ_1 varia al variare di λ_E .

L'analisi procede identificando il valore λ_E per il quale questa prima *critical line* interseca le altre *critical line* aventi le seguenti proprietà:

- sono *in* tutti gli asset che sono *in* nella prima *critical line* (l'attività 3 deve essere *in*);
- un'altra attività è *in*, tutte le altre sono *out*, o alternativamente si trasforma in *out* una attività precedentemente *in*.

Denominata cl_3 la prima *critical line*³⁴, sulla base di queste condizioni possono essere considerate le seguenti *critical line*: $cl_{1,3}$ e $cl_{2,3}$. L'obiettivo è trovare i valori λ_E per i quali cl_3 interseca rispettivamente $cl_{1,3}$ e $cl_{2,3}$. Nella intersezione tra cl_3 e $cl_{1,3}$ devono valere le seguenti uguaglianze:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,142 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,206 \end{bmatrix} \lambda_E \\ \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = E(R)_1 \lambda_E \end{cases}$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda, si giunge alla seguente

³⁴ In cl_3 il pedice identifica le variabili *in*.

uguaglianza:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,142 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,206 \end{bmatrix} \lambda_E = E(R)_1 \lambda_E$$

la cui soluzione è:

$$\begin{bmatrix} 0,039 & 0,046 & 0,142 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,142 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,039 & 0,046 & 0,142 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,206 \end{bmatrix} \lambda_E = 0,136 \lambda_E$$

$$-0,095 + 0,205 \lambda_E = 0,136 \lambda_E$$

$$\lambda_E = 1,368$$

Nella intersezione tra cl_3 e $cl_{2,3}$ devono invece valere le seguenti uguaglianze:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = N(1)R + N(1)S\lambda_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,142 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,206 \end{bmatrix} \lambda_E \\ \begin{bmatrix} \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = E(R)_2 \lambda_E \end{array} \right.$$

Sostituendo ancora la prima equazione del sistema nella seconda, si giunge alla seguente espressione:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,142 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,206 \end{bmatrix} \lambda_E = E(R)_2 \lambda_E$$

la cui soluzione è:

$$\begin{bmatrix} 0,038 & 0,046 & 0,044 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,142 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,038 & 0,046 & 0,044 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,206 \end{bmatrix} \lambda_E = 0,140 \lambda_E$$

$$-0,098 + 0,206 \lambda_E = 0,140 \lambda_E$$

$$\lambda_E = 1,486$$

Il primo sottoinsieme dei portafogli efficienti coincide con la *critical line* che interseca la cl_3 in corrispondenza del valore di λ_E più elevato; la prima sezione della frontiera efficiente viene quindi identificata da $cl_{2,3}$, la *critical line* nella quale sono in (attive) le attività 2 e 3. Se i valori di λ_E fossero tutti ≤ 0 , allora i portafogli efficienti giacerebbero esclusivamente sulla cl_3 , ovvero la frontiera efficiente degenererebbe in un unico punto corrispondente ad un portafoglio composto esclusivamente dall'*asset* 3.

A questo punto è possibile calcolare la formula analitica della *critical line* $cl_{2,3}$.

Le matrici \tilde{M} , $(\tilde{M})^{-1}$ e $N(2)$ sono:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,046 & 0,044 & 1 \\ 0 & 0,044 & 0,142 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\tilde{M})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9,959 & -9,959 & 0,978 \\ 0 & -9,959 & 9,959 & 0,022 \\ 0 & 0,978 & 0,022 & -0,046 \end{bmatrix}$$

$$N(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9,959 & -9,959 & 0,978 \\ 0 & -9,959 & 9,959 & 0,022 \\ 0 & 0,978 & 0,022 & -0,046 \end{bmatrix}$$

La formula di $cl_{2,3}$ è quindi la seguente:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = N(2)R + N(2)S\lambda_E$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9,959 & -9,959 & 0,978 \\ 0 & -9,959 & 9,959 & 0,022 \\ 0 & 0,978 & 0,022 & -0,046 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9,959 & -9,959 & 0,978 \\ 0 & -9,959 & 9,959 & 0,022 \\ 0 & 0,978 & 0,022 & -0,046 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_E$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,978 \\ 0,022 \\ -0,046 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,658 \\ 0,658 \\ 0,141 \end{bmatrix} \lambda_E$$

Si noti che quando λ_E assume valore 1,486 (quello corrispondente all'intersezione tra cl_3 e $cl_{2,3}$) il risultato dell'equazione è:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,978 \\ 0,022 \\ -0,046 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,658 \\ 0,658 \\ 0,141 \end{bmatrix} 1,486 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0,164 \end{bmatrix}$$

La riduzione del valore di λ_E contribuisce a ridurre w_3 a favore di w_2 ; ad esempio per $\lambda_E = 1,10$ l'output è il seguente:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,978 \\ 0,022 \\ -0,046 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,658 \\ 0,658 \\ 0,141 \end{bmatrix} 1,10 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,254 \\ 0,746 \\ 0,109 \end{bmatrix}$$

I portafogli efficienti che giacciono su questa *critical line* possono essere identificati attribuendo a λ_E valori $\leq 1,486$. Se $cl_{2,3}$ interseca tutte le altre *critical line* in corrispondenza di valori di λ_E :

- negativi, ciò significa che l'intero insieme dei portafogli efficienti giace sulla presente *critical line* (tutti i portafogli efficienti sono composti dalle sole attività 2 e 3);
- positivi, ciò significa che l'insieme dei portafogli efficienti “salta” su un'altra *critical line*; quella per la quale il punto di intersezione con $cl_{2,3}$ corrisponde al valore di λ_E più elevato.

L'analisi procede identificando il valore λ_E per cui la *critical line* $cl_{2,3}$ interseca le altre *critical line* aventi le seguenti proprietà:

- a. sono *in* tutti gli asset che sono *in* nella prima *critical line*;
- b. un'altra attività è *in*, tutte le altre rimangono *out* o alternativamente una delle attività *in* diventa *out*.

Sulla base di queste condizioni possono essere considerate le seguenti *critical line*: cl_2 , cl_3 , $cl_{1,2,3}$. La *critical line* cl_3 può essere trascurata perché già presa in considerazione; per le due restanti occorre identificare il valore λ_E di intersezione con $cl_{2,3}$ in modo da identificare la *critical line* corrispondente al λ_E più elevato.

Riprendendo la funzione della *critical line* $cl_{2,3}$:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,978 \\ 0,022 \\ -0,046 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,658 \\ 0,658 \\ 0,141 \end{bmatrix} \lambda_E$$

il punto di intersezione con cl_2 richiede che il peso della terza attività sia nullo ($w_3 = 0$); a tale scopo deve valere la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} w_3 &= 0,022 + 0,658 \lambda_E \\ 0 &= 0,022 + 0,658 \lambda_E \\ \lambda_E &= \frac{-0,022}{0,658} = -0,033 \end{aligned}$$

L'intersezione avviene in corrispondenza di un valore negativo, conseguentemente cl_2 può essere trascurato.

Nel punto di intersezione tra $cl_{1,2,3}$ e $cl_{2,3}$ devono invece valere le seguenti uguaglianze:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} &= N(2)R + N(2)S\lambda_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,978 \\ 0,022 \\ -0,046 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,658 \\ 0,658 \\ 0,141 \end{bmatrix} \lambda_E \\ \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} &= E(R)_1 \lambda_E \end{aligned} \right.$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda si giunge alla seguente uguaglianza:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,978 \\ 0,022 \\ -0,046 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0,658 \\ 0,658 \\ 0,141 \end{bmatrix} \lambda_E = E(R)_1 \lambda_E$$

la cui soluzione è:

$$\begin{aligned}
& [0,039 \quad 0,038 \quad 0,047 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0,978 \\ 0,022 \\ -0,046 \end{bmatrix} + [0,039 \quad 0,038 \quad 0,047 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -0,658 \\ 0,658 \\ 0,141 \end{bmatrix} \lambda_E = 0,136 \lambda_E \\
& -0,008 + 0,147 \lambda_E = 0,136 \lambda_E \\
& \lambda_E = 0,714
\end{aligned}$$

In corrispondenza di questo valore di λ_E l'insieme dei portafogli efficienti cessa di coincidere su $cl_{2,3}$ e "salta" su $cl_{1,2,3}$.

Adesso è possibile calcolare la formula analitica della *critical line* $cl_{1,2,3}$. Le matrici \tilde{M} , $(\tilde{M})^{-1}$ e $N(3)$ sono:

$$\begin{aligned}
\tilde{M} &= \begin{bmatrix} 0,039 & 0,038 & 0,047 & 1 \\ 0,038 & 0,046 & 0,044 & 1 \\ 0,047 & 0,044 & 0,142 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\tilde{M})^{-1} = \begin{bmatrix} 127,440 & -113,351 & -14,089 & 0,967 \\ -113,351 & 110,779 & 2,572 & 0,118 \\ -14,089 & 2,572 & 11,517 & -0,085 \\ 0,967 & 0,118 & -0,085 & -0,039 \end{bmatrix} \\
N(3) &= \begin{bmatrix} 127,440 & -113,351 & -14,089 & 0,967 \\ -113,351 & 110,779 & 2,572 & 0,118 \\ -14,089 & 2,572 & 11,517 & -0,085 \\ 0,967 & 0,118 & -0,085 & -0,039 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La formula di $cl_{1,2,3}$ è quindi la seguente:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} &= N(3)R + N(3)S\lambda_E \\
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 127,440 & -113,351 & -14,089 & 0,967 \\ -113,351 & 110,779 & 2,572 & 0,118 \\ -14,089 & 2,572 & 11,517 & -0,085 \\ 0,967 & 0,118 & -0,085 & -0,039 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 127,440 & -113,351 & -14,089 & 0,967 \\ -113,351 & 110,779 & 2,572 & 0,118 \\ -14,089 & 2,572 & 11,517 & -0,085 \\ 0,967 & 0,118 & -0,085 & -0,039 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_E \\
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,967 \\ 0,118 \\ -0,085 \\ -0,039 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,354 \\ 0,546 \\ 0,808 \\ 0,131 \end{bmatrix} \lambda_E
\end{aligned}$$

Quando λ_E assume valore 0,714 (quello corrispondente all'intersezione tra $cl_{1,2,3}$ e $cl_{2,3}$) il risultato dell'ultima equazione è:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,967 \\ 0,118 \\ -0,085 \\ -0,039 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,354 \\ 0,546 \\ 0,808 \\ 0,131 \end{bmatrix} 0,714 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,508 \\ 0,492 \\ 0,055 \end{bmatrix}$$

Come era lecito attendersi, solo le attività 2 e 3 sono presenti in portafoglio. Per valori di $\lambda_E < 0,714$ i portafogli sulla *critical line* $cl_{1,2,3}$ saranno composti anche dalla attività w_1 ; ad esempio per $\lambda_E = 0,5$ l'*output* è il seguente:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,967 \\ 0,118 \\ -0,085 \\ -0,039 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,354 \\ 0,546 \\ 0,808 \\ 0,131 \end{bmatrix} 0,5 = \begin{bmatrix} 0,290 \\ 0,391 \\ 0,319 \\ 0,027 \end{bmatrix}$$

Come nei casi precedenti, se questa *critical line* ne interseca altre per valori di λ_E maggiori di zero, ciò implica che l'insieme dei portafogli efficienti abbandona la prima *critical line* a favore di un'altra, corrispondente nell'intersezione ad un valore di λ_E più elevato.

L'analisi procede con l'identificazione del valore λ_E per cui la *critical line* $cl_{1,2,3}$ interseca le altre *critical line* aventi le seguenti proprietà:

- a. sono *in* tutti gli asset che sono *in* nella prima *critical line*;
- b. una delle attività *in* diventa *out*.

Sulla base di queste condizioni possono essere considerate le seguenti *critical line*: $cl_{1,2}$, $cl_{2,3}$, $cl_{1,3}$. La linea critica $cl_{2,3}$ può essere trascurata perché già considerata in precedenza; per le due restanti occorre identificare il valore λ_E di intersezione con $cl_{1,2,3}$ in modo da identificare ancora la *critical line* corrispondente al λ_E più elevato.

Riprendendo la funzione della *critical line* $cl_{1,2,3}$:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,967 \\ 0,118 \\ -0,085 \\ -0,039 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,354 \\ 0,546 \\ 0,808 \\ 0,131 \end{bmatrix} \lambda_E$$

il punto di intersezione con $cl_{1,2}$ richiede che il peso della terza attività sia nullo ($w_3 = 0$); a tale scopo deve valere la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} w_3 &= -0,085 + 0,808 \lambda_E \\ 0 &= -0,085 + 0,808 \lambda_E \\ \lambda_E &= \frac{0,085}{0,808} = 0,105 \end{aligned}$$

Questa *critical line* deve essere presa in considerazione in quanto il punto di intersezione corrisponde ad un valore positivo di λ_E . Il punto di intersezione tra $cl_{1,2,3}$ e $cl_{1,3}$ richiede che il peso della seconda attività sia nullo ($w_2 = 0$); deve quindi valere la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} w_2 &= 0,118 + 0,546 \lambda_E \\ 0 &= 0,118 + 0,546 \lambda_E \\ \lambda_E &= \frac{-0,118}{0,546} = -0,216 \end{aligned}$$

L'intersezione avviene in corrispondenza di un valore negativo, conseguentemente la $cl_{1,3}$ può essere trascurata.

In corrispondenza di un valore di λ_E pari a 0,105 l'insieme dei portafogli efficienti termina di coincidere su $cl_{1,2,3}$ e “salta” su $cl_{1,2}$.

È possibile calcolare la formula analitica della *critical line* $cl_{1,2}$. Le matrici \tilde{M} , $(\tilde{M})^{-1}$ e $N(4)$ sono:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0,039 & 0,038 & 0 & 1 \\ 0,038 & 0,046 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\tilde{M})^{-1} = \begin{bmatrix} 110,204 & -110,204 & 0 & 0,863 \\ -110,204 & 110,204 & 0 & 0,137 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,863 & 0,137 & 0 & -0,039 \end{bmatrix}$$

$$N(4) = \begin{bmatrix} 110,204 & -110,204 & 0 & 0,863 \\ -110,204 & 110,204 & 0 & 0,137 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,863 & 0,137 & 0 & -0,039 \end{bmatrix}$$

La formula di $cl_{I,2}$ è:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = N(4)R + N(4)S\lambda_E$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110,204 & -110,204 & 0 & 0,863 \\ -110,204 & 110,204 & 0 & 0,137 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,863 & 0,137 & 0 & -0,039 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 110,204 & -110,204 & 0 & 0,863 \\ -110,204 & 110,204 & 0 & 0,137 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,863 & 0,137 & 0 & -0,039 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_E$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,863 \\ 0,137 \\ 0 \\ -0,039 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,366 \\ 0,366 \\ 0 \\ 0,137 \end{bmatrix} \lambda_E$$

Quando λ_E assume valore 0,105 (quello corrispondente all'intersezione tra $cl_{I,2,3}$ e $cl_{I,2}$) il risultato dell'ultima equazione è:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,863 \\ 0,137 \\ 0 \\ -0,039 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,366 \\ 0,366 \\ 0 \\ 0,137 \end{bmatrix} 0,105 = \begin{bmatrix} 0,825 \\ 0,175 \\ 0 \\ -0,025 \end{bmatrix}$$

In tal caso solo le attività 1 e 2 sono presenti in portafoglio; per valori di λ_E minori di 0,105 i portafogli sulla *critical line* $cl_{I,2}$ vedranno ridurre il peso della attività 2 a favore dell'attività 1; ad esempio per $\lambda_E = 0,01$ l'*output* è il seguente:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,863 \\ 0,137 \\ 0 \\ -0,039 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,366 \\ 0,366 \\ 0 \\ 0,137 \end{bmatrix} 0,01 = \begin{bmatrix} 0,871 \\ 0,139 \\ 0 \\ -0,040 \end{bmatrix}$$

I portafogli efficienti che giacciono su questa *critical line* possono essere identificati attribuendo a λ_E valori $\leq 0,105$. Come nei casi precedenti, se $cl_{1,2}$ interseca tutte le altre *critical line* in corrispondenza di valori di λ_E :

- negativi, non esiste alcuna altra *critical line* sulla quale identificare i portafogli efficienti;
- positivi, ciò significa che l'insieme dei portafogli efficienti “salta” su una ulteriore *critical line*, quella per la quale il punto di intersezione con $cl_{1,2}$ corrisponde al valore di λ_E più elevato.

L'analisi procede identificando il valore λ_E per cui la *critical line* $cl_{1,2}$ interseca le altre *critical line* aventi le solite proprietà:

- a. sono *in* tutti gli asset che sono *in* nella prima *critical line*;
- b. un'altra attività è *in*, tutte le altre rimangono *out* o alternativamente una delle attività *in* diventa *out*.

Sulla base di queste condizioni possono essere considerate le seguenti *critical line*: cl_2 , cl_1 , $cl_{1,2,3}$. Le linee critiche $cl_{1,2,3}$ e cl_2 vengono trascurate perché già prese in considerazione; per quella restante occorre identificare il valore λ_E di intersezione con $cl_{1,2}$ in modo da identificare se λ_E sia maggiore di zero.

Riprendendo la funzione della *critical line* $cl_{1,2}$:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,863 \\ 0,137 \\ 0 \\ -0,039 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,366 \\ 0,366 \\ 0 \\ 0,137 \end{bmatrix} \lambda_E$$

il punto di intersezione con cl_1 richiede che il peso della seconda attività sia nullo ($w_2 = 0$); a tale scopo deve valere la seguente uguaglianza:

$$w_2 = 0,137 + 0,366 \lambda_E$$

$$0 = 0,137 + 0,366 \lambda_E$$

$$\lambda_E = \frac{-0,137}{0,366} = -0,374$$

L'intersezione avviene in corrispondenza di un valore negativo,

conseguentemente cl_1 può essere trascurato. Ciò significa che λ_E raggiunge un valore nullo prima che la *critical line* $cl_{1,2}$ ne intersechi una nuova. In particolare il portafoglio a minimo rischio si ottiene attribuendo a λ_E un valore nullo:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,863 \\ 0,137 \\ 0 \\ -0,039 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,366 \\ 0,366 \\ 0 \\ 0,137 \end{bmatrix} 0 = \begin{bmatrix} 0,863 \\ 0,137 \\ 0 \\ -0,039 \end{bmatrix}$$

Qui di seguito viene riportata la rappresentazione analitica complessiva dell'insieme dei portafogli efficienti:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,142 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,206 \end{bmatrix} \lambda_E & cl_3 & \text{per } \lambda_E = 1,486 \\ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,978 \\ 0,022 \\ -0,046 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,658 \\ 0,658 \\ 0,141 \end{bmatrix} \lambda_E & cl_{2,3} & \text{per } 1,486 < \lambda_E \leq 0,714 \\ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,967 \\ 0,118 \\ -0,085 \\ -0,039 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,354 \\ 0,546 \\ 0,808 \\ 0,131 \end{bmatrix} \lambda_E & cl_{1,2,3} & \text{per } 0,714 < \lambda_E \leq 0,105 \\ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,863 \\ 0,137 \\ 0 \\ -0,039 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,366 \\ 0,366 \\ 0 \\ 0,137 \end{bmatrix} \lambda_E & cl_{1,2} & \text{per } 0,105 < \lambda_E \leq 0 \end{cases}$$

È possibile sintetizzare l'intero processo, identificando i portafogli efficienti di *confine* in corrispondenza dei quali l'insieme dei portafogli efficienti passa da una *critical line* all'altra (Tabella A.1.1).

Tali portafogli, definiti *corner portfolios*, hanno una interessante proprietà: le interpolazioni lineari di *corner portfolio* adiacenti sono anch'esse portafogli efficienti. Conseguentemente, interpolando tutte le coppie di *corner portfolio* adiacenti è possibile ricostruire l'insieme complessivo dei portafogli non dominati. Nella Figura A.1.1 viene rappresentata graficamente la frontiera efficiente, con l'indicazione delle combinazioni rischio-rendimento dei *corner portfolios*. Infine, la rappresentazione tridimensionale nella figura A.1.2 conferma che tutti i portafogli efficienti presentano delle

composizioni che si ottengono combinando linearmente i *corner portfolios*.

L'Appendice A in Markowitz (1959) offre la dimostrazione che il metodo della *critical line* qui descritto conduce alla costruzione dei portafogli efficienti.

Tabella A.1.1: I portafogli di confine tra le *critical lines*.

	w_1	w_2	w_3
Port. con Max E(R) (passaggio da cl_3 a $cl_{2,3}$)	0,000	0,000	1,000
Corner Portfolio intermedio (passaggio da $cl_{2,3}$ a $cl_{1,2,3}$)	0,000	0,508	0,492
Corner Portfolio intermedio (passaggio da $cl_{1,2,3}$ a $cl_{1,2}$)	0,825	0,175	0,000
Port. con Min σ ($cl_{1,2}$)	0,863	0,137	0,000

Figura A.1.1: Frontiera efficiente e *corner portfolios*

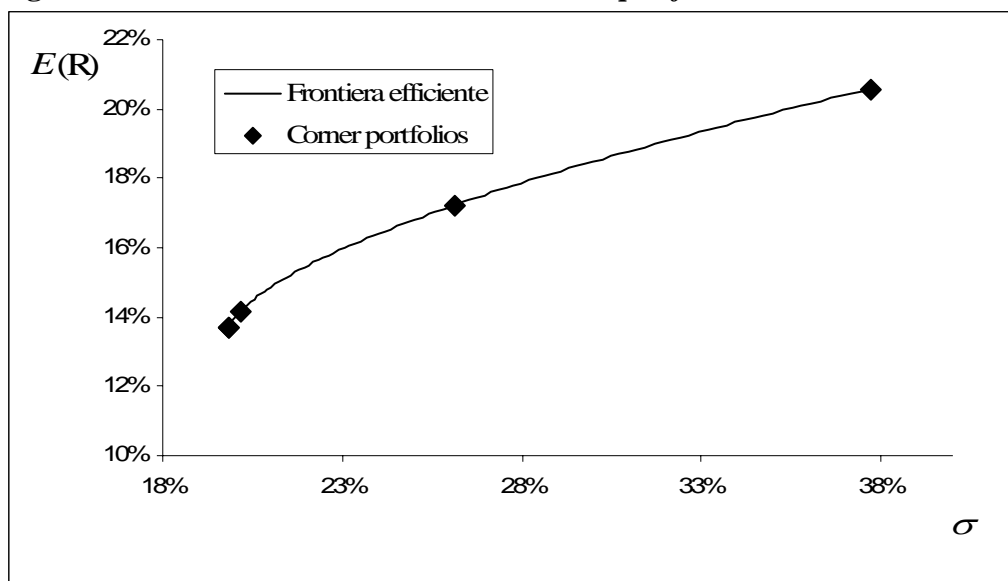
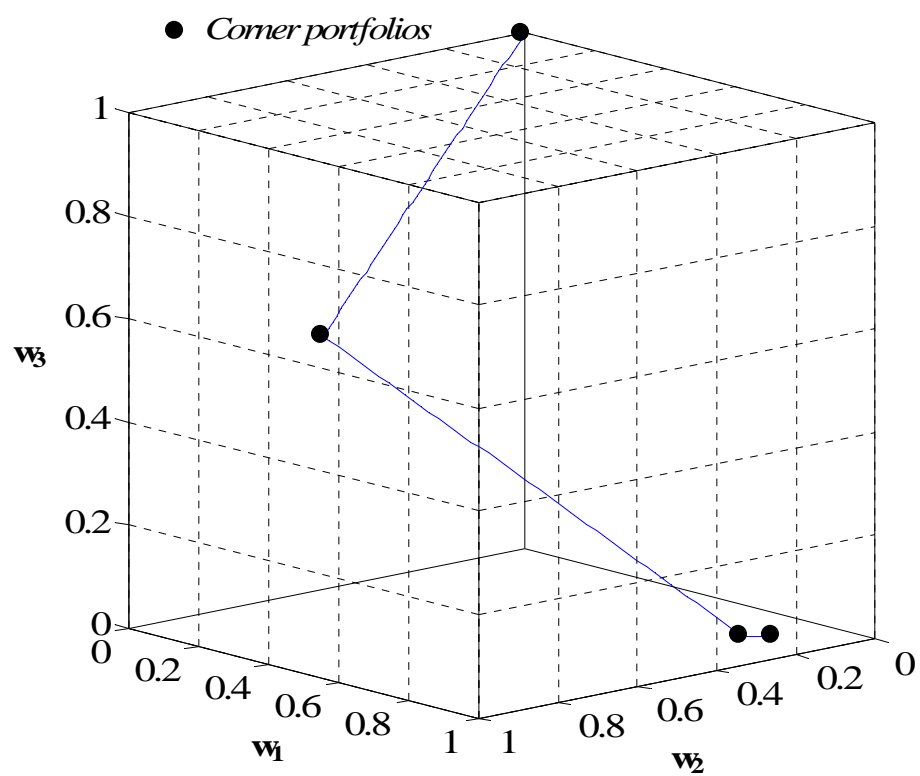


Figura A.1.2: Rappresentazione della composizione dei portafogli efficienti



Appendice A.2.2: La costruzione dei portafogli efficienti in ipotesi di ammissione dello *short selling* con il metodo della *Lagrangiana*

Al fine di focalizzare l'attenzione sulla procedura di calcolo, evitando ogni altra fonte di complicazione, si ricorre ad un esempio numerico semplificato. Gli asset potenzialmente selezionabili sono solo 3 e ad essi corrispondono i medesimi input utilizzati nella precedente Appendice:

- matrice varianze-covarianze:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,039 & 0,038 & 0,047 \\ 0,038 & 0,046 & 0,044 \\ 0,047 & 0,044 & 0,142 \end{bmatrix}$$

- vettore colonna dei rendimenti attesi:

$$\mu = \begin{bmatrix} E(R)_1 \\ E(R)_2 \\ E(R)_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \end{bmatrix}$$

- il vettore colonna dei pesi:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Inoltre:

$$I = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'ottimizzazione, in ipotesi di vendita allo scoperto, è la seguente:

$$\underset{W}{Min} \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}$$

Con vincoli :

$$\sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = R^*$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Rispetto alla formulazione analitica presentata nel paragrafo 2.5, la funzione minimizzanda viene moltiplicata per lo scalare 0,5. Questo modifica, che non incide sul

risultato finale, ha lo scopo di facilitare i calcoli analitici. In forma matriciale ed in termini numerici:

$$\underset{W}{Min} \quad \frac{1}{2} W^T \cdot V \cdot W$$

Con vincoli :

$$W^T \cdot I = 1$$

$$W^T \cdot \mu = R^*$$

$$\underset{W}{Min} \quad \frac{1}{2} W^T \cdot \begin{bmatrix} 0,039 & 0,038 & 0,047 \\ 0,038 & 0,046 & 0,044 \\ 0,047 & 0,044 & 0,142 \end{bmatrix} \cdot W$$

Con vincoli :

$$W^T \cdot I = 1$$

$$W^T \cdot \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \end{bmatrix} = R^*$$

Allo scopo di risolvere analiticamente il problema, scriviamo la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} W^T \cdot \begin{bmatrix} 0,039 & 0,038 & 0,047 \\ 0,038 & 0,046 & 0,044 \\ 0,047 & 0,044 & 0,142 \end{bmatrix} \cdot W + \lambda \left\{ R^* - W^T \cdot \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \end{bmatrix} \right\} + \gamma (1 - W^T \cdot I)$$

A questo punto occorre differenziare \mathcal{L} rispetto a ciascuna incognita (ovvero rispetto ai pesi del vettore W ed ai moltiplicatori λ e γ), ponendo successivamente ogni derivata pari a zero:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W} = V \cdot W - \lambda \cdot \mu - \gamma \cdot I = \begin{bmatrix} 0,039 & 0,038 & 0,047 \\ 0,038 & 0,046 & 0,044 \\ 0,047 & 0,044 & 0,142 \end{bmatrix} \cdot W - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \end{bmatrix} - \gamma \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Questa prima uguaglianza identifica una serie di 3 equazioni (tante quanti sono gli asset).

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = R^* - W^T \cdot \mu = R^* - W^T \cdot \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \end{bmatrix} = 0$$

Questa equazione assicura che il portafoglio ottimale abbia un rendimento atteso pari al valore target.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = 1 - W^T \cdot I = 1 - W^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Infine, questa uguaglianza garantisce che la somma algebrica dei pesi delle tre asset class sia pari ad 1 (al 100%).

La soluzione del problema di minimizzazione della varianza del portafoglio si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} V \cdot W - \lambda \cdot \mu - \gamma \cdot I = 0 \\ R^* - W^T \cdot \mu = 0 \\ 1 - W^T \cdot I = 0 \end{cases}$$

Numericamente:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 0,039 & 0,038 & 0,047 \\ 0,038 & 0,046 & 0,044 \\ 0,047 & 0,044 & 0,142 \end{bmatrix} \cdot W - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \end{bmatrix} - \gamma \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ R^* - W^T \cdot \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \end{bmatrix} = 0 \\ 1 - W^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

Allo scopo di giungere alla soluzione finale, occorre effettuare una serie di passaggi algebrici relativi alla prima espressione del sistema. Moltiplichiamo entrambi i membri per l'inversa della matrice varianze covarianze (V^{-1}) ed esprimiamo il tutto in funzione di W :

$$\begin{aligned} V \cdot W - \lambda \cdot \mu - \gamma \cdot I &= 0 \\ V^{-1} \cdot (V \cdot W - \lambda \cdot \mu - \gamma \cdot I) &= V^{-1} \cdot 0 \\ W - (V^{-1} \cdot \mu) \cdot \lambda - (V^{-1} \cdot I) \cdot \gamma &= 0 \\ W &= (V^{-1} \cdot \mu) \cdot \lambda + (V^{-1} \cdot I) \cdot \gamma \end{aligned}$$

Noti i valori λ e γ , questa espressione permette di identificare il vettore colonna dei pesi W in grado di minimizzare la varianza del portafoglio. Riscriviamo il sistema incorporando le variazioni apportate alla prima espressione:

$$\begin{cases} W = (V^{-1} \cdot \mu) \cdot \lambda + (V^{-1} \cdot I) \cdot \gamma \\ R^* = W^T \cdot \mu \\ 1 = W^T \cdot I \end{cases}$$

A questo punto moltiplichiamo ambo i membri della prima espressione per la trasposta di μ :

$$\mu^T \cdot W = \mu^T \cdot (V^{-1} \cdot \mu) \cdot \lambda + \mu^T \cdot (V^{-1} \cdot I) \cdot \gamma$$

Poiché $W^T \cdot \mu = \mu^T \cdot W = R^*$, l'espressione del sistema può essere scritta nel modo seguente:

$$\mu^T \cdot (V^{-1} \cdot \mu) \cdot \lambda + \mu^T \cdot (V^{-1} \cdot I) \cdot \gamma = R^*$$

Ancora, moltiplichiamo ambo i membri della prima espressione per la trasposta di I :

$$I^T \cdot W = I^T \cdot (V^{-1} \cdot \mu) \cdot \lambda + I^T \cdot (V^{-1} \cdot I) \cdot \gamma$$

Poiché $W^T \cdot I = I^T \cdot W = 1$, la prima espressione del sistema può essere scritta così:

$$I^T \cdot (V^{-1} \cdot \mu) \cdot \lambda + I^T \cdot (V^{-1} \cdot I) \cdot \gamma = 1$$

Operando in questo modo otteniamo due equazioni in due incognite (λ e γ):

$$\begin{cases} \mu^T \cdot (V^{-1} \cdot \mu) \cdot \lambda + \mu^T \cdot (V^{-1} \cdot I) \cdot \gamma = R^* \\ I^T \cdot (V^{-1} \cdot \mu) \cdot \lambda + I^T \cdot (V^{-1} \cdot I) \cdot \gamma = 1 \end{cases}$$

Allo scopo di semplificare i passaggi algebrici, poniamo:

$$\begin{aligned} M &= \mu^T \cdot (V^{-1} \cdot \mu) = \\ &= [0,136 \quad 0,140 \quad 0,206] \cdot \begin{bmatrix} 151,616 & -110,403 & -16,212 \\ -110,403 & 111,138 & 2,313 \\ -16,212 & 2,313 & 11,703 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \end{bmatrix} = 0,501 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \mu^T \cdot (V^{-1} \cdot I) = I^T \cdot (V^{-1} \cdot \mu) = \\ &= [0,136 \quad 0,140 \quad 0,206] \cdot \begin{bmatrix} 151,616 & -110,403 & -16,212 \\ -110,403 & 111,138 & 2,313 \\ -16,212 & 2,313 & 11,703 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3,384 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= I^T \cdot (V^{-1} \cdot I) = \\ &= [1 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 151,616 & -110,403 & -16,212 \\ -110,403 & 111,138 & 2,313 \\ -16,212 & 2,313 & 11,703 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 25,852 \end{aligned}$$

Conseguentemente, le ultime due equazioni possono essere scritte in una forma più semplice:

$$\begin{cases} M \cdot \lambda + T \cdot \gamma = R^* \\ T \cdot \lambda + P \cdot \gamma = 1 \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti del sistema costituito da queste due equazioni è sempre positivo; conseguentemente il sistema ha una sola soluzione che, trascurando i passaggi algebrici, è la seguente:

$$\lambda = \frac{R^* \cdot P - T}{M \cdot P - T^2} = \frac{R^* \cdot 25,852 - 3,384}{0,501 \cdot 25,852 - 3,384^2} = \frac{R^* \cdot 25,852 - 3,384}{1,496}$$

$$\gamma = \frac{M - R^* \cdot T}{M \cdot P - T^2} = \frac{0,501 - R^* \cdot 3,384}{0,501 \cdot 25,852 - 3,384^2} = \frac{0,501 - R^* \cdot 3,384}{1,496}$$

Ritornando alla equazione $W = (V^{-1} \cdot \mu) \cdot \lambda + (V^{-1} \cdot I) \cdot \gamma$ e sostituendo al suo interno i valori λ e γ , otteniamo l'espressione finale in grado di identificare il vettore colonna W con i pesi ottimali:

$$W = (V^{-1} \cdot \mu) \cdot \frac{R^* \cdot P - T}{M \cdot P - T^2} + (V^{-1} \cdot I) \cdot \frac{M - R^* \cdot T}{M \cdot P - T^2}$$

$$W = \begin{bmatrix} 151,616 & -110,403 & -16,212 \\ -110,403 & 111,138 & 2,313 \\ -16,212 & 2,313 & 11,703 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,136 \\ 0,140 \\ 0,206 \end{bmatrix} \cdot \frac{R^* \cdot 25,852 - 3,384}{1,496} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 151,616 & -110,403 & -16,212 \\ -110,403 & 111,138 & 2,313 \\ -16,212 & 2,313 & 11,703 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{0,501 - R^* \cdot 3,384}{1,496}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1,919 \\ 0,945 \\ 0,520 \end{bmatrix} \cdot \frac{R^* \cdot 25,852 - 3,384}{1,496} + \begin{bmatrix} 25,000 \\ 3,048 \\ -2,196 \end{bmatrix} \cdot \frac{0,501 - R^* \cdot 3,384}{1,496}$$

Ad esempio, i pesi ottimali di un portafoglio efficiente con rendimento atteso pari a 0,25 possono essere stimati nel modo seguente:

$$W = \begin{bmatrix} 1,919 \\ 0,945 \\ 0,520 \end{bmatrix} \cdot \frac{0,25 \cdot 25,852 - 3,384}{1,496} + \begin{bmatrix} 25,000 \\ 3,048 \\ -2,196 \end{bmatrix} \cdot \frac{0,501 - 0,25 \cdot 3,384}{1,496} = \begin{bmatrix} -181,9\% \\ 124,2\% \\ 157,7\% \end{bmatrix}$$

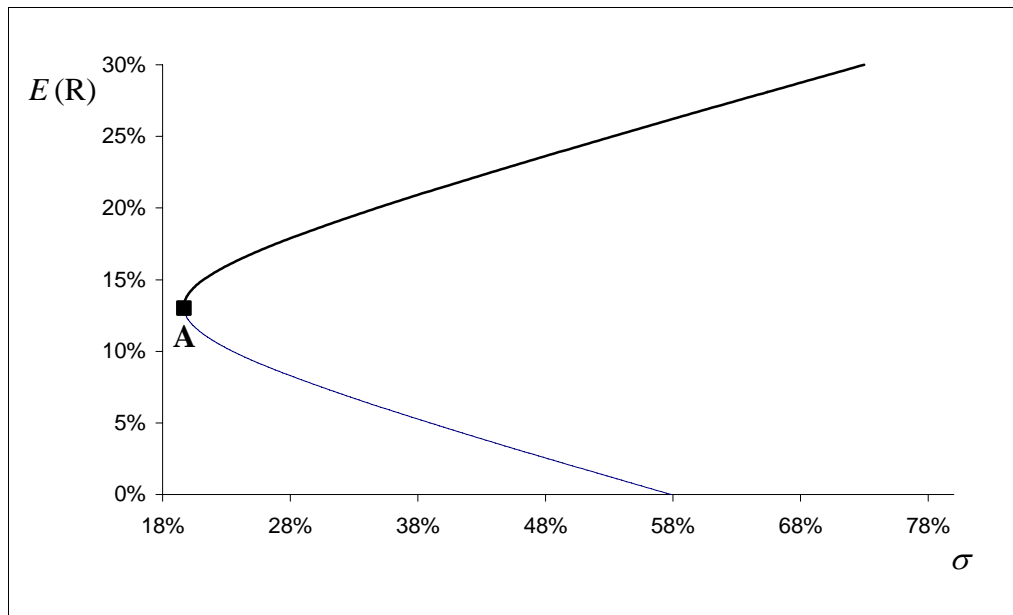
La deviazione standard di questo portafoglio è:

$$\sigma = \sqrt{W^T \cdot V \cdot W}$$

$$= \sqrt{\begin{bmatrix} -181,9\% & 124,2\% & 157,7\% \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,039 & 0,038 & 0,047 \\ 0,038 & 0,046 & 0,044 \\ 0,047 & 0,044 & 0,142 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -181,9\% \\ 124,2\% \\ 157,7\% \end{bmatrix}} = 0,533$$

A questo punto, disponendo delle 2 equazioni in grado di stimare rispettivamente i vettori W dei portafogli ottimali e le corrispondenti deviazioni standard minime, e attribuendo diversi valori a R^* , possiamo identificare le combinazioni rendimento atteso – rischio dei portafogli ottimali. La figura A.2.1 mostra il risultato per valori del rendimento atteso appartenenti allo spazio $[0; 0,3]$.

Figura A.2.1: La Frontiera efficiente in ipotesi di *short selling*



La curva rappresentata ha la forma di una iperbole³⁵ con vertice A di coordinate:

³⁵ Infatti data l'espressione:

$$W = (V^{-1} \cdot \mu) \cdot \frac{R^* \cdot P - T}{M \cdot P - T^2} + (V^{-1} \cdot I) \cdot \frac{M - R^* \cdot T}{M \cdot P - T^2}$$

moltiplicando entrambi i membri prima per la matrice varianze-covarianze V e successivamente per il vettore W^T , si ottiene la seguente equazione:

$$\sigma^2 = \frac{P \cdot (R^*)^2 - 2 \cdot T \cdot R^* + M}{M \cdot P - T^2}$$

Ponendo entrambi i membri sotto radice giungiamo alla equazione di una iperbole:

$$E(R) = \frac{T}{P} = \frac{3,384}{25,852} = 0,1309$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{25,852}} = 0,1967$$

In coerenza con il principio media-varianza, la frontiera efficiente è rappresentata solo dal tratto superiore (linea continua). Il tratto inferiore (linea tratteggiata) identifica invece le combinazioni rischio-rendimento dei portafogli di massima inefficienza, ovvero quelli che minimizzano il rendimento atteso per ogni livello di deviazione standard.

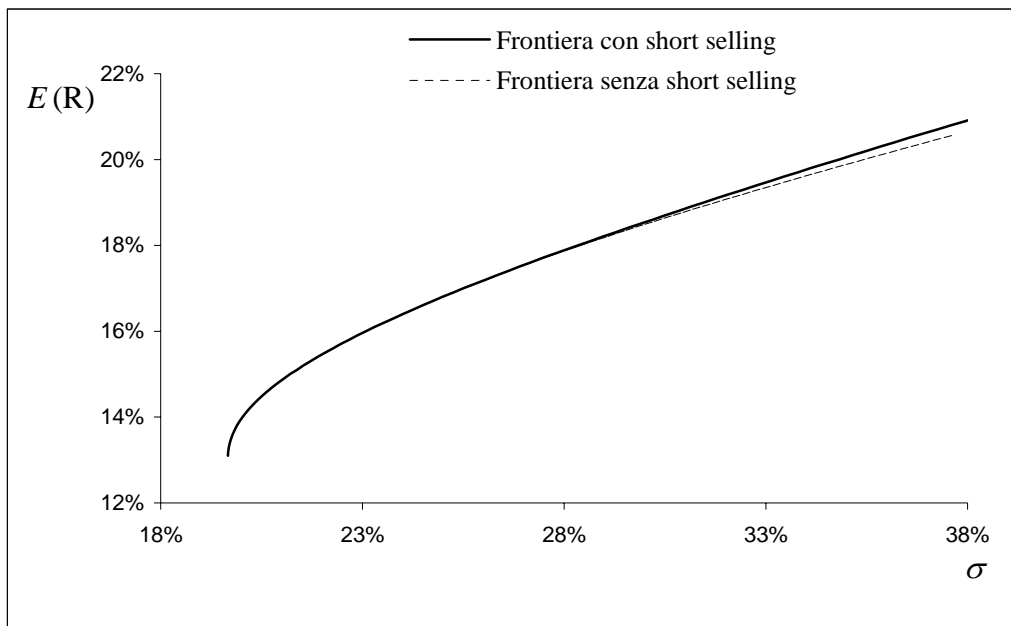
Poiché in questa e nella precedente appendice sono stati utilizzati i medesimi dati di input, è possibile effettuare un confronto tra:

- i portafogli efficienti calcolati con il metodo della *critical line* coerenti con l'ipotesi di assenza di vendite allo scoperto;
- i portafogli efficienti calcolati con il metodo della *Lagrangiana* in ipotesi di rimozione del vincolo di non negatività dei pesi.

La Figura A.2.2, mostrando le frontiere efficienti ottenute con i due metodi, dà modo di apprezzare come la possibilità di *short selling* permetta di raggiungere migliori combinazioni rendimento-rischio. Le motivazioni alla base di questa evidenza sono ragionevoli: il vincolo di pesi non negativi, riducendo lo spazio delle soluzioni possibili, finisce con lo scartare combinazioni di peso che il metodo della *Lagrangiana* identifica come ottimali.

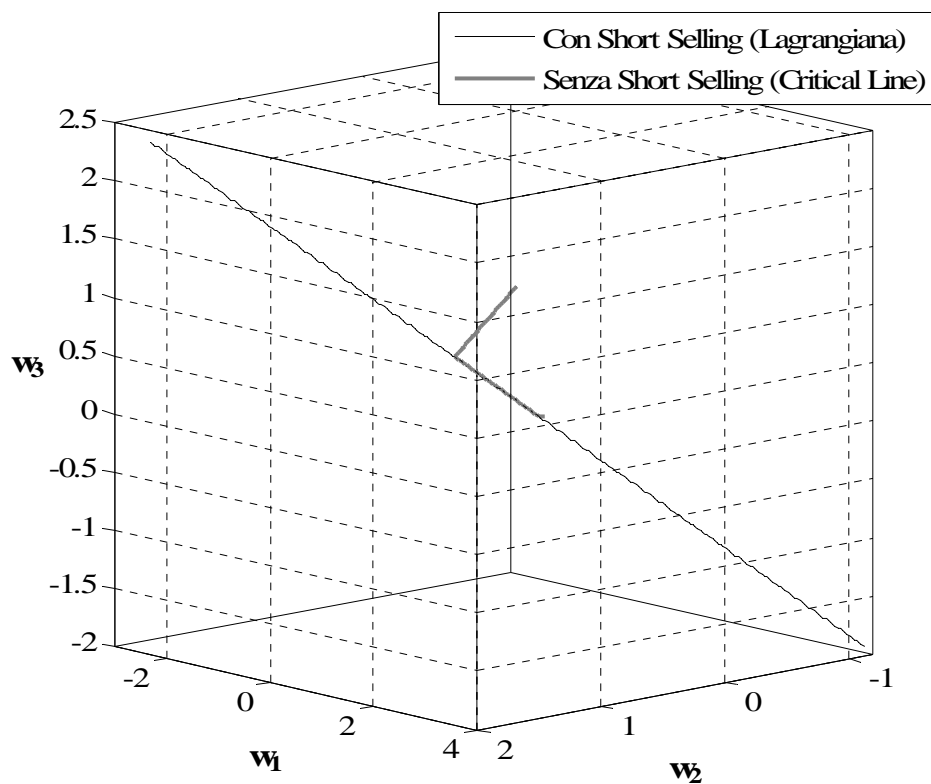
Figura A.2.2: Confronto delle frontiere efficienti ottenute con i metodi della *critical line* e della *Lagrangiana*

$$\sigma = \sqrt{\frac{P \cdot (R^*)^2 - 2 \cdot T \cdot R^* + M}{M \cdot P - T^2}}$$



Infine, la rappresentazione tridimensionale nella Figura A.2.3 mostra le differenze dei portafogli in termini di composizione degli asset. Come specificato nel precedente capitolo, nel caso di divieto di vendita allo scoperto i portafogli efficienti si ottengono attraverso l'interpolazione lineare dei *corner portfolio* adiacenti. Nel caso di ammissione dello *short selling*, invece, tutti i portafogli efficienti si collocano su una unica linea: nota la composizione di due portafogli ottimali, la loro combinazione lineare permette di ottenere qualsiasi altro portafoglio efficiente. Adoperando il medesimo linguaggio usato nella precedente appendice, possiamo affermare che, in ipotesi di *short selling*, tutti i portafogli efficienti “giacciono” sulla *critical line* $cl_{1,2,3}$.

Figura A.2.3: Confronto delle composizioni dei portafogli ottimali ottenuti con i metodi della *critical line* e della *Lagrangiana*



INDICE CAPITOLO 3

CAPITOLO 3:	ESTIMATION ERROR ED ALTRI PROBLEMI DELLA MARKOWITZ-BASED PORTFOLIO	
	CONSTRUCTION	77
3.1	Introduzione	77
3.2	Le critiche mosse alle ipotesi del modello	78
3.2.1	L'ottimizzazione basata sul principio media-varianza ignora qualsiasi preferenza verso momenti statistici di ordine superiore al secondo.....	78
3.2.2	Il modello di Markowitz suppone che gli investitori siano caratterizzati da un unico orizzonte temporale	86
3.2.3	La deviazione standard è una misura di rischio troppo semplificata	92
3.3	Le critiche mosse all'applicazione pratica del modello	100
3.4	L'instabilità dei portafogli efficienti.....	107
3.5	Le conseguenze degli errori di stima	117
3.5.1	L'esperimento di Jobson e Korkie (1980).....	121
3.5.2	L'esperimento di Frankfurter, Phillips e Seagle (1971)	129
3.5.3	<i>Efficient versus Naive portfolio</i>	138
3.6	Conclusioni.....	142

CAPITOLO 3: ESTIMATION ERROR ED ALTRI PROBLEMI DELLA MARKOWITZ-BASED PORTFOLIO CONSTRUCTION

«Under realistic conditions, are portfolios selected according to the mean-variance criteria any more likely to be efficient (in the sense of the model) than portfolios that are selected at random? The answer is “no”».

(Frankfurter, Phillips e Seagle)

3.1 Introduzione

Come più volte ribadito, la teoria di Markowitz rappresenta ancora oggi il principale riferimento teorico per la categoria degli *asset manager*, ovvero il modello dominante nello sviluppo di processi quantitativi di costruzione dei portafogli¹; Green e Hollified scrivono: “*The mean-variance efficient frontier plays an important role in pedagogy and applications in finance*”.

Anche in virtù di quanto affermato nel precedente capitolo, non è difficile identificare le ragioni che motivano questa popolarità. In primo luogo, il paradigma proposto da Markowitz incorpora due aspetti determinanti per ogni *asset manager*: il contributo della diversificazione ed il *trade-off* esistente tra rischio e rendimento atteso. Inoltre, il modello permette di giungere velocemente ad una soluzione ottimale senza l’ausilio di potenti processori. Ciò nonostante l’approccio di Markowitz è stato oggetto di numerose critiche. Fatta eccezione per un primo periodo nel quale la letteratura economica ha ignorato tale metodologia, a partire dalla metà degli anni ’60 i lavori dedicati alle *common objections* si sono moltiplicati, dando luogo ad un vero e proprio filone letterario. I successivi paragrafi saranno dedicati alla descrizione dei problemi

¹ Ne è una prova inconfutabile l’ampia diffusione del modello all’interno dei software di *asset allocation*.

dell'ottimizzazione alla Markowitz; una volta elencate le critiche più frequenti, l'analisi si focalizzerà su due specifici problemi: l'instabilità dei portafogli efficienti e le conseguenze degli errori di stima.

3.2 Le critiche mosse alle ipotesi del modello

Sebbene il modello in oggetto rappresenti un criterio “normativo” di selezione degli investimenti estremamente attraente, non mancano gli elementi di debolezza che tendono a ridurne il concreto utilizzo. Un prima fonte di perplessità, qui analizzata, è direttamente identificabile nelle ipotesi concernenti il comportamento degli investitori:

1. l'ottimizzazione basata sul principio media-varianza ignora qualsiasi preferenza verso momenti statistici di ordine superiore al secondo;
2. il modello suppone che gli investitori siano caratterizzati da un unico orizzonte temporale;
3. pur in un contesto bidimensionale, la deviazione standard (la varianza) è una misura di rischio troppo semplificata, incapace di discriminare tra fenomeni premianti e penalizzanti.

Per certi versi appare inusuale che un modello sviluppato con l'ausilio di un set di ipotesi tanto stringenti abbia poi trovato così ampia applicazione nella realtà. Le ragioni della diffusione vanno senza dubbio identificate nella difficoltà di sviluppare modelli in grado di rimuovere le ipotesi semplificatrici e contestualmente preservare la facilità di implementazione. Non stupisce dunque che negli anni si siano alimentate vere e proprie “tenzioni letterarie” tra critici e fautori della teoria di Markowitz; si cita, ad esempio, il dibattito - sul *Journal of Investing* - tra Rom e Fergusson (1993 e 1994) e Kaplan e Siegel (1994).

3.2.1 L'ottimizzazione basata sul principio media-varianza ignora qualsiasi preferenza verso momenti statistici di ordine superiore al secondo

Questo problema ha alimentato una ricerca finalizzata al superamento del principio media-varianza mediante l'inclusione, all'interno della funzione di preferenze dell'investitore, di *higher order moments* (generalmente l'asimmetria e in alcuni casi

anche la curtosi)². Tra i numerosi lavori che si collocano all'interno di questo filone, citiamo: Samuelson (1958), Arditti e Levy (1975), Lee (1977), Kraus e Litzenberger (1976), Kane (1982), Lai (1991), Konno, Shirakawa e Yamazaki (1993), Simaan (1993), Konno e Suzuki (1995), Chunchinda, Dandapani et al. (1997), de Athayde e Flores (2004). L'inclusione di momenti statistici di grado superiore comporta una sensibile complicazione del processo di ottimizzazione necessario al fine di identificare i portafogli efficienti. Inoltre, in caso di inclusione della asimmetria (Sk) e della curtosi (Ku)³, il problema della costruzione dei portafogli deve essere sviluppato su un piano quadridimensionale, con la conseguente impossibilità di rappresentare graficamente le combinazioni $[E(R), \sigma, Sk, Ku]$ dei portafogli efficienti.

Infine, le misure di asimmetria e di curtosi dei portafogli, al pari della deviazione standard, non possono essere stimate come media ponderata delle misure di Sk , Ku dei singoli asset, essendo queste influenzate dai movimenti congiunti delle attività. Ne deriva una ulteriore complicazione del processo di stima degli input.

Prendendo spunto dal lavoro di Lai (1991), si propone un esempio di ottimizzazione nel caso di un investitore sensibile ai primi tre momenti della distribuzione dei rendimenti. Coerentemente con quanto mostrato dalle evidenze empiriche, ipotizziamo che l'investitore:

- sia avverso alla varianza (σ_{Port}^2) dei rendimenti del portafoglio;
- punti a massimizzare tanto il valore atteso $E(R)_{Port}$ quanto l'asimmetria Sk_{Port} dei rendimenti del portafoglio.

Dati questi presupposti, il problema di ottimizzazione - in assenza di vendite allo scoperto - può essere posto nei termini seguenti:

² Nel disegnare la nuova funzione delle preferenze è usuale ipotizzare che gli investitori preferiscano, *coeteris paribus*:

- distribuzioni dei rendimenti con *asimmetria* positiva, la cui coda asimmetrica si estende verso i rendimenti più positivi (i rendimenti molto superiori al rendimento mediano sono più probabili dei rendimenti specularmente molto inferiori al rendimento mediano); quanto qui affermato è anche coerente con i risultati di alcune evidenze empiriche (Arditti, 1967).
- distribuzioni dei rendimenti con livelli bassi di *curtosi*, grazie ai quali si riduce la probabilità di osservare rendimenti che si collocano nelle "code" estreme della distribuzione.

³ È possibile identificare due giustificazioni alternative alla decisione di implementare un modello di *four-moment portfolio construction*:

1. gli investitori hanno una funzione di utilità di grado quarto;
2. i portafogli non presentano distribuzioni normali dei rendimenti, e l'inclusione della asimmetria e della curtosi permettono di approssimarle meglio.

$$\underset{W}{Max} \begin{cases} E(R)_{Port} \\ Sk_{Port} \end{cases}$$

Con vincoli :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{Port}^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = (\sigma_{Port}^2)^* \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ w_i &\geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Questo si configura come un problema di programmazione con obiettivi multipli ed è altamente probabile che non esista una vettore di pesi W in grado di massimizzare contemporaneamente il rendimento atteso e l'asimmetria del portafoglio. Per tale ragione, occorre riformulare il problema identificando un'unica funzione (da minimizzare), la quale incorpori le preferenze degli investitori concernenti tanto $E(R)$ quanto Sk . Procediamo alla riformulazione.

Indicato con $(\sigma_{Port}^2)^*$ il livello di varianza desiderato, applicando il principio media-varianza:

$$\underset{W}{Max} E(R)_{Port}$$

Con vincoli :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{Port}^2 &= (\sigma_{Port}^2)^* \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ w_i &\geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

è possibile identificare il il rendimento atteso massimo a cui può ambire un portafoglio con varianza $(\sigma_{Port}^2)^*$.

Ancora, ipotizzando l'avversione al rischio per la sola asimmetria dei rendimenti, è possibile identificare, sulla base di una ottimizzazione sul piano media-skewness:

$$\underset{W}{Max} Sk_{Port}$$

Con vincoli :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{Port}^2 &= (\sigma_{Port}^2)^* \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ w_i &\geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

il valore massimo di asimmetria (Sk^*) corrispondente ad un portafoglio con varianza

$$(\sigma_{Port}^2)^*.$$

Sk^* e $E(R)^*$ rappresentano i valori massimi delle variabili obiettivo, sotto il vincolo di comporre un portafoglio con varianza nota, pesi non negativi e somma dei pesi pari a 1. A questo punto definiamo:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} d_{\mu} &= E(R)^* - E(R)_{Port} \\ d_{Sk} &= Sk^* - Sk_{Port} \end{aligned}$$

d_{μ} identifica la differenza tra il rendimento atteso massimo raggiungibile (in ipotesi di neutralità alla asimmetria) ed il rendimento atteso del portafoglio finale ottenuto incorporando anche la preferenza per l'asimmetria. L'obiettivo di un soggetto razionale è quello di minimizzare questo parametro, in modo che il rendimento atteso del portafoglio sia prossimo al valore massimo perseguibile. L'espressione d_{Sk} identifica la differenza tra l'asimmetria massima raggiungibile (in ipotesi di neutralità al rendimento atteso) e l'asimmetria effettiva che il portafoglio finale consegue considerando anche la preferenza per $E(R)$. Anche in questo caso l'obiettivo è la minimizzazione del parametro d_{Sk} , in modo che l'asimmetria del portafoglio sia prossima al valore massimo perseguibile. Allo scopo di ridurre congiuntamente la distanza tra i valori massimi di $E(R)$ e di Sk e quelli effettivi, è possibile impostare una funzione da minimizzare di questo tipo:

$$(3.5) \quad \frac{(d_{\mu})}{A} + \frac{(d_{Sk})}{B}$$

Con:

$$A > 0;$$

$$B > 0.$$

Nel caso in cui sia possibile identificare un unico vettore W in grado di azzerare sia d_{μ} che d_{Sk} , ci si collocherebbe nel caso fortuito in cui esiste un unico portafoglio in grado di raggiungere i valori $E(R)^*$ e Sk^* . Nel concreto è probabile che l'ottimo assoluto non esista e che vi sia quindi la necessità di trovare una soluzione sub-ottimale che punti a ridurre maggiormente d_{μ} o d_{Sk} a seconda che l'investitore dimostri una predilezione maggiore per il rendimento atteso o l'asimmetria. Il ruolo delle variabili A e B consiste appunto nell'identificare il tipo di preferenze dell'investitore. In particolare, minore è il valore di A (di B), più importante è il rendimento medio (l'asimmetria), e quindi l'interesse a ridurre il parametro d_{μ} (d_{Sk}). Più in generale, all'aumentare (al

diminuire) del rapporto A/B , aumenterà proporzionalmente il grado di preferenza per l'asimmetria (per il rendimento atteso). È innegabile che la razionalità limitata dell'investitore-tipo, e la sua scarsa dimestichezza con i momenti di una distribuzione, rendono assai complessa l'identificazione di questi parametri, anche in ragione della impossibilità di attribuire ad essi una significato che vada oltre la mera valenza matematica (A e B sono scalari all'interno di una funzione che andremo a minimizzare).

Esplicitate le preferenze dell'investitore, il problema di ottimizzazione può essere riformulato nel modo seguente:

$$\min_w \left(\frac{d_\mu}{A} + \frac{d_{Sk}}{B} \right)$$

Con vincoli :

$$(3.6) \quad \sigma_{Port}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = (\sigma_{Port}^2)^*$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n$$

Si procede con un esempio numerico. Ipotizziamo che un investitore desideri un portafoglio con deviazione standard pari al 10% (varianza pari a 0,01) e che il suo grado di preferenze per i parametri $E(R)$ e Sk sia espresso dai coefficienti A e B pari rispettivamente a 1 e 40. Inoltre, le ottimizzazioni basate sui principi media-varianza e media-asimmetria permettono di identificare i valori massimi possibili dei parametri $E(R)$ e Sk :

$$E(R)^* = 0,105$$

$$Sk^* = 1,044$$

Sulla base di questi presupposti, il problema di minimizzazione può essere espresso nel modo seguente:

$$\min_w \left(\frac{d_\mu}{1} + \frac{d_{Sk}}{40} \right) = \min_w \left\{ \frac{[E(R)^* - E(R)_{Port}]}{1} + \frac{Sk^* - Sk_{Port}}{40} \right\}$$

Con vincoli :

$$\sigma_{Port}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = 0,01$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n$$

Mutuando i dati già proposti nel paragrafo 2.6, utilizziamo i rendimenti campionari presenti nella Tabella 3.1 allo scopo di sviluppare una ottimizzazione con input stimati secondo il criterio della *classical rule*. La Tabella 3.2 mostra i dati storici campionari più significativi⁴.

Tabella 3.1: I rendimenti campionari

Anni	I. Mkt. 1	I. Mkt. 2	I. Mkt. 3	I. Mkt. 4	I. Mkt. 5	I. Mkt. 6	I. Mkt. 7	I. Mkt. 8
1988	7,28%	4,30%	17,20%	30,65%	30,32%	52,18%	46,50%	57,68%
1989	9,16%	1,40%	-0,53%	23,05%	24,80%	-2,93%	9,09%	57,29%
1990	11,55%	3,10%	-0,78%	-14,38%	-13,97%	-43,31%	-20,79%	-20,74%
1991	10,41%	11,37%	17,51%	15,33%	31,79%	10,69%	42,64%	62,26%
1992	11,11%	12,80%	12,37%	1,96%	13,01%	-16,19%	13,68%	18,62%
1993	9,03%	14,44%	21,49%	39,21%	18,56%	34,82%	94,42%	87,53%
1994	6,30%	-1,84%	-8,65%	-8,36%	-9,19%	8,56%	-22,89%	-17,27%
1995	6,58%	16,27%	9,92%	12,78%	26,58%	-6,86%	5,32%	-12,47%
1996	4,83%	7,29%	11,57%	30,89%	33,85%	-8,89%	30,66%	14,16%
1997	4,42%	6,16%	16,95%	44,91%	55,10%	-10,80%	-20,86%	3,16%
1998	4,46%	10,94%	6,81%	19,41%	19,53%	-2,51%	-12,04%	-30,84%
1999	3,15%	-2,97%	11,62%	35,52%	43,95%	88,61%	61,69%	94,02%
2000	4,32%	8,39%	9,68%	-0,83%	-4,73%	-22,34%	-8,44%	-25,08%
2001	4,74%	6,25%	4,54%	-15,15%	-7,51%	-25,34%	-4,37%	3,08%
2002	3,53%	8,49%	0,42%	-31,17%	-34,74%	-24,46%	-20,82%	-21,01%
2003	2,54%	3,77%	-4,59%	15,53%	8,05%	13,05%	22,08%	29,76%
2004	2,18%	7,56%	2,32%	12,56%	3,19%	7,51%	20,13%	16,79%
2005	2,20%	5,67%	7,52%	26,93%	23,47%	45,05%	32,60%	55,34%
2006	3,02%	-0,28%	-4,95%	20,35%	3,44%	-4,75%	19,27%	18,76%

Risolvendo l'ottimizzazione mediante un modello iterativo, si giunge alla

⁴ Si evita di riportare i co-momenti, comunque necessari per la stima della varianza e della asimmetria dei portafogli.

selezione del portafoglio coerente con le preferenze dell'investitore. Il vettore dei pesi è:

$$W = \begin{bmatrix} 19,3\% \\ 51,0\% \\ 0 \\ 0,5\% \\ 0 \\ 0 \\ 19,0\% \\ 10,2\% \end{bmatrix}$$

I valori di rendimento atteso e asimmetria sono:

$$E(R)_{Port} = 0,095$$

$$Sk_{Port} = 0,853$$

Il tentativo congiunto di ottenere valori massimi di $E(R)$ e Sk impedisce di raggiungere i valori massimi (rispettivamente 0,105 e 1,044) conseguibili ignorando uno dei parametri.

Tabella 3.2: Le stime campionarie

Indici di Mercato	W	E(R)	σ	Sk
I. Mkt. 1	w_1	0,0583	0,0309	0,6439
I. Mkt. 2	w_2	0,0648	0,0531	- 0,0039
I. Mkt. 3	w_3	0,0686	0,0856	- 0,1198
I. Mkt. 4	w_4	0,1364	0,2041	- 0,5813
I. Mkt. 5	w_5	0,1397	0,2205	- 0,2906
I. Mkt. 6	w_6	0,0485	0,3157	1,1503
I. Mkt. 7	w_7	0,1515	0,3159	0,8340
I. Mkt. 8	w_8	0,2058	0,3872	0,4671

Allo scopo di mostrare la diversa conformazione dei portafogli al variare delle preferenze dell'investitore, si analizzano diverse combinazioni delle variabili A e B. Nello specifico, lasciando inalterato il valore unitario del coefficiente A, attribuiamo a B valori pari a:

$$B \in [1; 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100]$$

La Tabella 3.3 riporta i risultati conseguiti nelle diverse ottimizzazioni.

Tabella 3.3: L'output delle ottimizzazioni

	w ₁	w ₂	w ₃	w ₄	w ₅	w ₆	w ₇	w ₈	E(R)	σ	Sk
Neutralità E(R)	43,8%	14,4%	12,6%	0,0%	0,0%	0,0%	29,2%	0,0%	0,09	0,10	1,04
A = 1 B = 1	43,2%	15,5%	11,9%	0,0%	0,0%	0,0%	29,3%	0,0%	0,09	0,10	1,04
A = 1 B = 10	37,5%	27,5%	4,8%	0,0%	0,0%	0,0%	30,1%	0,0%	0,09	0,10	1,04
A = 1 B = 20	33,1%	36,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	30,7%	0,0%	0,09	0,10	1,03
A = 1 B = 30	27,8%	41,8%	0,0%	0,2%	0,0%	0,0%	26,8%	3,4%	0,09	0,10	0,98
A = 1 B = 40	19,3%	51,0%	0,0%	0,5%	0,0%	0,0%	19,0%	10,2%	0,09	0,10	0,85
A = 1 B = 50	11,1%	60,1%	0,0%	1,3%	0,0%	0,0%	9,4%	18,2%	0,1	0,10	0,68
A = 1 B = 60	4,0%	67,9%	0,0%	2,8%	0,0%	0,0%	0,0%	25,2%	0,1	0,10	0,5
A = 1 B = 70	1,9%	69,4%	0,0%	4,0%	0,0%	0,0%	0,0%	24,7%	0,1	0,10	0,47
A = 1 B = 80	0,0%	70,6%	0,0%	5,1%	0,0%	0,0%	0,0%	24,3%	0,1	0,10	0,45
A = 1 B = 90	0,0%	69,9%	0,0%	6,2%	0,0%	0,0%	0,0%	23,9%	0,1	0,10	0,43
A = 1 B = 100	0,0%	69,3%	0,0%	7,1%	0,0%	0,0%	0,0%	23,6%	0,1	0,10	0,42
Neutralità Sk	0,0%	59,8%	0,0%	12,2%	11,9%	0,0%	0,0%	16,0%	0,11	0,10	-0,2

Nelle Figure 3.1 e 3.2 si mostrano, per i diversi profili di preferenza dell'investitore, le rappresentazioni grafiche:

- delle combinazioni ottimali dei parametri $E(R)$, σ e Sk ;
- della composizione dei portafogli efficienti.

Figura 3.1: Le combinazioni ottimali dei parametri

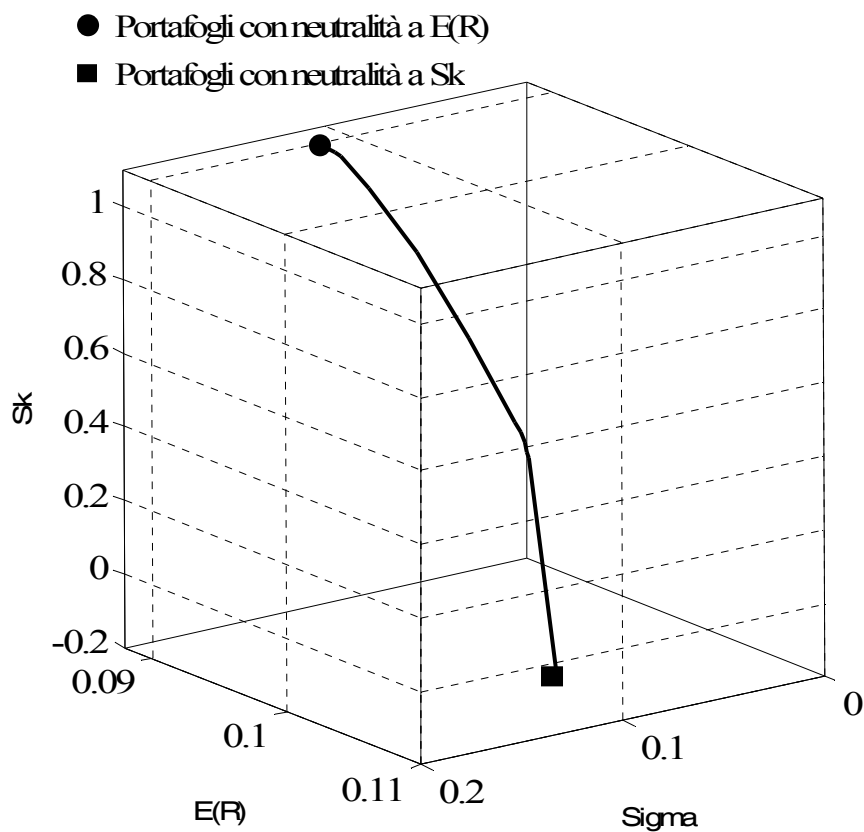
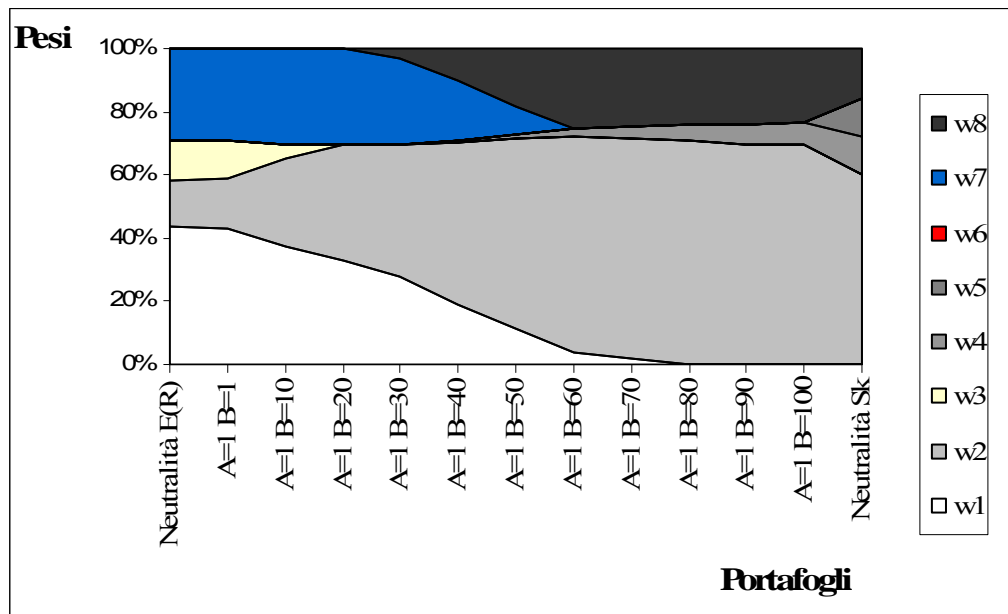


Figura 3.2: La composizione dei portafogli efficienti



Si noti come i mercati 1 e 7 (JPM Euro Cash 3 Mesi e MSCI Pacific free ex Japan), entrambi assenti nel portafoglio costruito secondo il principio media-varianza e caratterizzati da valori elevati di *skewness*, assumano un peso progressivamente crescente all'aumentare del grado di preferenza dell'investitore per l'asimmetria.

Il grosso punto interrogativo che si nasconde dietro l'applicazione di modelli in grado di incorporare *higher statistical moments* è il seguente: può un investitore medio esprimere, con razionalità, il suo grado di preferenza per indicatori non comuni come l'asimmetria e la curtosi dei rendimenti? Il dubbio è legittimo.

3.2.2 Il modello di Markowitz suppone che gli investitori siano caratterizzati da un unico orizzonte temporale

L'ipotesi di orizzonte temporale uniperiodale rappresenta un'ulteriore semplificazione della realtà poiché, a differenza di quanto prescritto nel modello classico di Markowitz, gli investitori si caratterizzano per un'attenzione ai risultati infraperiodali e per un'esigenza di ribilanciamento del portafoglio: «*Extant portfolio theory, being principally based on the mean-variance model, is fundamentally single-period in nature, whereas the larger problem accents the multiperiod, sequential nature*

of investment decision» (Grauer e Hakansson, 1982). La percezione che gli investitori hanno della bontà di un investimento è, per così dire, *path dependent*, ovvero subordinata all'evoluzione temporale del montante dell'investimento stesso. In altri termini, è plausibile immaginare che gli investitori, scontando gli effetti di un disinvestimento anticipato, attribuiscono valore anche all'evoluzione dei rendimenti attesi. Il modello classico di Markowitz è però incapace di incorporare questa "complicazione" della funzione di preferenza dell'investitore e si limita a determinare le strategie di investimento in una logica uniperiodale: «*The investor makes his portfolio decision at the beginning of a period and then waits until the end of the period when the rate of return of his portfolio materializes. He cannot make any intermediate changes on the composition of his portfolio*» (Mossin, 1968).

Passando ad un modello multiperiodale, l'investitore continua ad avere un orizzonte temporale complessivo nel quale massimizzare le sue preferenze, ma tale periodo viene diviso in n sottoperiodi, alla fine dei quali l'investitore può effettuare una ricomposizione di portafoglio. Ogni decisione di investimento implementata nel singolo sottoperiodo dipende da quanto conseguito nei precedenti periodi e dalle opportunità relative ai futuri sottoperiodi⁵. Se, al contrario, le decisioni venissero prese indipendentemente da quanto fatto prima e, soprattutto, ignorando le future distribuzioni di probabilità, il modello multiperiodale si trasformerebbe in un *roll-over* di strategie uniperiodali alla Markowitz: «*If the investor's sequence of decisions is obtained as a series of single period decisions, where each period is treated as if it were the last one, then he behaves myopically*» (Mossin, 1968). La modalità più semplice per rimuovere un approccio *myopic* consiste nel formulare il problema come massimizzazione di una funzione di utilità attesa intertemporale, ovvero di una funzione di utilità che varia nel tempo a seconda dei risultati conseguiti.

Mutuando l'esempio proposto da Mossin (1968), si propone un caso semplificato di modello multiperiodale. Si considerino due attività A e B, i cui rendimenti (R_A e R_B) sono:

1. serialmente non correlati;
2. indipendenti tra loro;
3. stazionari (la distribuzione dei rendimenti non varia nel tempo).

⁵ Solo all'inizio dell'ultimo sottoperiodo la costruzione del portafoglio può essere impostata secondo la logica uniperiodale di Markowitz.

Non si sostengono costi di transazione. La Tabella 3.4 riporta i possibili valori che R_A e R_B possono assumere in ciascun sottoperiodo ed i corrispondenti livelli di rendimento e deviazione standard attesi.

Tabella 3.4: I dati di input.

Asset 1		Asset 2	
R_A	Probabilità	R_B	Probabilità
0,0%	50,0%	-20,0%	50,0%
4,0%	50,0%	40,0%	50,0%
$E(R_A)$	2,0%	$E(R_B)$	10,0%
σ_A	2,0%	σ_B	30,0%

Il livello iniziale di ricchezza - $C(t_0)$ - è pari a 100, e l'orizzonte temporale di investimento è composto di due distinti sottoperiodi, all'inizio dei quali l'investitore è chiamato a costruire il portafoglio che permette di massimizzare la propria utilità attesa. Indichiamo:

- con $X_{A(1)}$ e $X_{A(2)}$ l'importo investito nell'asset A rispettivamente all'inizio del primo e del secondo sottoperiodo;
- con $C(t_1)$, $C(t_2)$ la ricchezza dell'investitore alla fine del primo e del secondo sottoperiodo.

Inoltre, l'investitore presenta una funzione di utilità definita su $C(t_2)$, ovvero sulla ricchezza complessiva conseguita alla fine dell'intero orizzonte temporale:

$$(3.7) \quad U = C(t_2) - aC(t_2)^2 = C(t_2) - 0,003C(t_2)^2$$

Collocandosi momentaneamente all'inizio del secondo sottoperiodo, date la funzione U e l'assunzione di indipendenza dei rendimenti delle attività, il valore massimo della utilità attesa dell'investitore si ottiene così⁶:

⁶Si noti come il valore massimo dell'utilità attesa dipenda da $C(t_1)$, ovvero dalla ricchezza dell'investitore alla fine del primo periodo. Ciò accade perché, data la funzione di utilità:

$$U = Y - aY^2$$

dove Y identifica la ricchezza finale dell'investitore; la composizione ottimale che il portafoglio assume in uno specifico sottoperiodo dipende dal livello di ricchezza che l'investitore ha all'inizio del sottoperiodo stesso. Di fatti, poiché il valore massimo dell'utilità attesa alla fine di un sottoperiodo dipende dalla composizione (del portafoglio) e questa dipende a sua volta dalla ricchezza di inizio sottoperiodo, si può concludere che il valore massimo dell'utilità attesa dipende dalla ricchezza dell'investitore all'inizio sottoperiodo. Per un approfondimento, si veda Mossin (1968).

$$\begin{aligned}
(3.8) \quad MaxE(U) &= \frac{\sigma_A^2[1 + E(R_B)] + \sigma_B^2[1 + E(R_A)]}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + [E(R_A) - E(R_B)]^2} \times \\
&\times \left\{ C(t_1) - \frac{\sigma_A^2[1 + E(R_B)]^2 + \sigma_B^2[1 + E(R_A)]^2 + \sigma_A^2 \cdot \sigma_B^2}{\sigma_A^2[1 + E(R_B)] + \sigma_B^2[1 + E(R_A)]} \cdot a \cdot C(t_1)^2 \right\} + \\
&+ \frac{[E(R_A) - E(R_B)]^2}{4 \cdot a \{ \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + [E(R_A) - E(R_B)]^2 \}}
\end{aligned}$$

Inserendo i valori numerici:

$$(3.9) \quad MaxE(U) = \frac{0,092}{0,097} \times \left[C(t_1) - \frac{0,094}{30,747} C(t_1)^2 \right] + 5,510$$

Al fine di massimizzare l'utilità attesa complessiva dell'investitore occorre quindi massimizzare l'espressione:

$$(3.10) \quad C(t_1) - \frac{0,094}{30,747} C(t_1)^2 = C(t_1) - 0,00306 \cdot C(t_1)^2 = C(t_1) - a_1 C(t_1)^2$$

Questa può essere interpretata come la funzione di utilità U_I che l'investitore deve massimizzare nel primo sottoperiodo, allo scopo di costruire un portafoglio che sia coerente con l'obiettivo di investimento complessivo. La funzione di utilità dell'investitore è quindi destinata a mutare in ogni sottoperiodo.

Nota la funzione di utilità valida per il primo sottoperiodo, il valore $X_{A(1)}$ da investire nella prima attività può essere determinato nel modo seguente⁷:

$$\begin{aligned}
(3.11) \quad X_{A(1)} &= \frac{E(R_A) - E(R_B) - 2a_1 C(t_0) \{ [1 + E(R_B)] [E(R_A) - E(R_B)] - \sigma_B^2 \}}{2a_1 \{ \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + [E(R_A) - E(R_B)]^2 \}} \\
&= \frac{2\% - 10\% - 2 \cdot 0,00306 \cdot C(t_0) \{ [1 + 10\%] [2\% - 10\%] - 0,09 \}}{2 \cdot 0,00306 \cdot \{ 0,0004 + 0,09 + [2\% - 10\%]^2 \}} = \\
&= \frac{-0,08 + 0,00109 \cdot C(t_0)}{0,00059} = \frac{-0,08 + 0,00109 \cdot 100}{0,00059} = 48,95
\end{aligned}$$

La composizione ottimale consiste nell'investire 48,95 nella attività A e il residuale 52,05 nella attività B. Tale procedura permette di evidenziare una delle caratteristiche di un modello multiperiodale: i valori X_A e X_B sono funzione tanto della ricchezza iniziale dell'investitore, quanto delle aspettative future di rendimento incorporate nella funzione di utilità U_I .

Dati i rendimenti che le attività A e B possono assumere, la Tabella 3.5 identifica i possibili livelli di ricchezza $C(t_1)$ ⁸ che l'investitore può ottenere alla fine del primo

⁷ Cfr. sempre Mossin (1968), pag. 220.

⁸ $C(t_1) = X_{A(1)} \cdot (1 + R_A) + [C(t_0) - X_{A(1)}] \cdot (1 + R_B)$.

sottoperiodo.

Tabella 3.5: I valori di $C(t_1)$ corrispondenti ai possibili stati del mondo del primo sottoperiodo.

	R_A	R_B	$X_{A(1)}$	$X_{B(1)}$	$C(t_1)$
Stato del mondo 1	0,0%	-20,0%	48,95	51,05	89,79
Stato del mondo 2	0,0%	40,0%	48,95	51,05	120,42
Stato del mondo 3	4,0%	-20,0%	48,95	51,05	91,75
Stato del mondo 4	4,0%	40,0%	48,95	51,05	122,38

All'inizio dell'ultimo sottoperiodo la funzione di utilità da considerare è quella iniziale $[U = C(t_2) - a \cdot C(t_2)^2 = C(t_2) - 0,002C(t_2)^2]$; il valore $X_{A(2)}$ da investire nella prima attività può essere determinata replicando la procedura già utilizzata:

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad X_{A(2)} &= \frac{E(R_A) - E(R_B) - 2aC(t_1)\{[1 + E(R_B)][E(R_A) - E(R_B)] - \sigma_B^2\}}{2a\{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + [E(R_A) - E(R_B)]^2\}} \\
 &= \frac{2\% - 10\% - 2 \cdot 0,003 \cdot C(t_1)\{[1 + 10\%][2\% - 10\%] - 0,09\}}{2 \cdot 0,003 \cdot \{0,0004 + 0,09 + [2\% - 10\%]^2\}} = \\
 &= \frac{-0,08 + 0,00107 \cdot C(t_1)}{0,000581}
 \end{aligned}$$

La quantità investita nella attività A è quindi funzione della ricchezza accumulata nel primo sottoperiodo, che dipende a sua volta dalla composizione di portafoglio. La Tabella 3.6 riporta la composizione di portafoglio relativa ad ogni possibile valore assunto da $C(t_1)$.

Tabella 3.6: La composizione di portafoglio riconducibile ad ogni possibile valore assunto dalla ricchezza alla fine del primo periodo

$C(t_1)$	$X_{A(2)}$	$X_{B(2)}$	$X_{A(2)}$ in % di $C(t_1)$	$X_{B(2)}$ in % di $C(t_1)$
89,79	27,37	62,42	30,5%	69,5%
120,42	83,69	36,73	69,5%	30,5%
91,75	30,97	60,78	33,8%	66,2%
122,38	87,29	35,09	71,3%	28,7%

L'esempio numerico suggerisce alcune considerazioni:

- la decisione di investimento di ogni sottoperiodo può essere assunta solo dopo aver

- conosciuto il risultato dell'investimento implementato nel sottoperiodo precedente;
- in ogni sottoperiodo l'investitore si trova a massimizzare una funzione di utilità che cambia forma⁹; da ciò si desume che anche nell'ipotesi in cui alla fine del primo sottoperiodo la ricchezza rimanesse immutata, la composizione del portafoglio ottimale del secondo sottoperiodo non coinciderebbe con quella identificata nel primo sottoperiodo¹⁰;
 - le funzioni di utilità sottoperiodali sono derivate dalla forma della funzione di utilità complessiva dell'investitore (quella utilizzata nell'ultimo sottoperiodo) e dalle distribuzioni di probabilità dei rendimenti degli asset relativi ai futuri sottoperiodi.

Ampliando il numero dei sottoperiodi e degli asset e rimuovendo le ipotesi semplificatrici relative ai rendimenti delle attività, il modello qui descritto assume una complessità analitica tale da limitarne seriamente la concreta applicazione nell'*asset management*.

In conclusione di questa breve disamina si citano le condizioni da rispettare affinché una strategia multiperiodale risulti equivalente alla combinazione, in serie, di più strategie uniperiodali:

1. la composizione ottimale dei portafogli non deve essere influenzata dalla ricchezza iniziale;
2. i rendimenti degli asset non devono essere serialmente correlati;
3. nell'orizzonte temporale complessivo non possono essere effettuati conferimenti e/o riscatti intermedi;
4. non esistono costi di transazione.

Per un approfondimento del tema della *multiperiod portfolio theory* si rimanda a Mossin (1968), Leland, (1972), Hakansson (1971, 1974), Ross (1974), Grauer e Hakansson (1982, 1985, 1993). Infine, è curioso rilevare che lo stesso Markowitz, nel suo lavoro del 1959, creò i presupposti per queste critiche: “*Markowitz laid the groundwork for some of this latter attack on his one-period model by exploring the dynamic nature of portfolio management policy*” (Elton e Gruber, 1999 b).

⁹ Nell'esempio, la funzione di utilità è sempre quadratica, ma il coefficiente a muta.

¹⁰ Se $C(t_1)$ fosse ancora pari a $C(t_0) = 100$, l'ammontare investito nel titolo A sarebbe:

$$X_{A(2)} = \frac{-0,08 + 0,00107 \cdot C(t_1)}{0,000581} = \frac{-0,08 + 0,00107 \cdot 100}{0,000581} = 46,14$$

Tale asset vede quindi ridurre il suo valore investito, così come quello percentuale.

3.2.3 La deviazione standard è una misura di rischio troppo semplificata

Pur operando in un contesto uniperiodale ed in uno spazio di preferenze bidimensionale, alcuni autori sollevano delle perplessità relativamente all'utilizzo della deviazione standard quale parametro di rischio. Questo problema è stato affrontato dallo stesso Markowitz ed è significativo rilevare che l'utilizzo della deviazione standard quale misura di rischio non sia riconducibile al fatto che l'autore considerasse tale indicatore la migliore misura di dispersione. Dalle sue parole si evince in modo inconfutabile che il ricorso al σ è una scelta "di comodo", suggerita dalla necessità di non appesantire il processo di programmazione matematica: «*One of the measures considered, the semideviation, produces efficient portfolios some what preferable to those of the standard deviation. Those produced by the standard deviation are satisfactory, however, and the standard deviation itself is easier to use, more familiar to many, and perhaps easier to interpret than the semideviation (...) Efficient portfolios based on variance, however, cannot be characterized as bad or undesirable*». (Markowitz, 1959).

Soprattutto nei casi in cui l'assunzione di normalità di distribuzione dei rendimenti ci allontana dalla realtà¹¹, è ipotizzabile che gli investitori piuttosto che essere avversi alla generica dispersione dei rendimenti (alla deviazione standard), siano preoccupati della manifestazione di rendimenti penalizzanti, perché collocati nella porzione sinistra della distribuzione dei rendimenti. Le misure che cercano di cogliere il comportamento della parte sinistra (*downside*) di una distribuzione sono definiti *lower partial moments* (*lpm*)¹². Ipotizzando che l'investitore sia avverso esclusivamente alla presenza di rendimenti inferiori ad un valore soglia h , i rendimenti superiori alla soglia dovrebbero essere ignorati perché incapaci di produrre un evento penalizzante. Assumendo di disporre di un campione di N rendimenti, i *lower partial moment* possono essere calcolati nel modo seguente:

¹¹ Cfr. Singleton e Wingender (1986), Peiro (1994, 1999).

¹² Per una analisi più approfondita sul tema dei *lower partial moment*, si rimanda al Capitolo 1.

$$(3.13) \quad lpm(h, k) = \sum_{i=1}^N \frac{(R_i - h)^k d_i}{N}$$

Con :

$$d_i = \begin{cases} 0 & \text{se } R_i > h \\ 1 & \text{se } R_i < h \end{cases}$$

Riprendendo alcune delle considerazioni già fatte nel corso del primo capitolo, e soffermandosi su momenti parziali di grado non superiore al secondo, possiamo analizzare il significato finanziario di questi indicatori:

- $lpm(h, 0)$ identifica la probabilità di *shortfall*, ovvero la probabilità che si manifestino rendimenti inferiori alla soglia h ;
- $lpm(h, 1)$ misura il valore medio di *shortfall*;
- $lpm(h, 2)$ misura la varianza dello *shortfall*¹³, ovvero la dispersione dei rendimenti inferiori alla soglia.

Assumendo quindi che gli investitori siano avversi alle manifestazioni che si collocano a sinistra di un rendimento soglia, ovvero ai rendimenti *downside*, il principio media-varianza viene sostituito, alternativamente, dai principi:

a. media – probabilità di *shortfall*:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} & \underset{w}{Min} \quad lpm(h, 0)_{Port} \\ & \text{Con vincoli :} \\ & \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = R^* \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

¹³ Nel caso in cui il rendimento soglia sia pari al rendimento medio (\bar{R}), tale misura coincide con la più nota *semivarianza*, che sotto radice diventa la *semi-standard deviation*:

$$\sqrt{lpm(\bar{R}, 2)} = Semi\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(R_i - \bar{R})^2 d_i}{N}}$$

Con :

$$d_i = \begin{cases} 0 & \text{se } R_i > h \\ 1 & \text{se } R_i < h \end{cases}$$

b. media – media degli *shortfall*¹⁴:

$$\begin{aligned}
 & \underset{W}{Min} \quad -lpm(h,1)_{Port} \\
 & \text{Con vincoli :} \\
 (3.15) \quad & \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = R^* \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

c. media – varianza dello *shortfall*:

$$\begin{aligned}
 & \underset{W}{Min} \quad lpm(h,2)_{Port} \\
 & \text{Con vincoli :} \\
 (3.16) \quad & \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = R^* \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

In tutti e tre i casi qui menzionati il cambiamento si concretizza nella sostituzione della misura di rischio che occorre minimizzare, mentre i vincoli restano immutati.

É interessante interrogarsi circa i differenti risultati ai quali si giunge minimizzando un momento parziale, piuttosto che la varianza dei rendimenti. Nel caso in cui i rendimenti si distribuiscano normalmente, l'utilizzo dell'uno o dell'altro indicatore di rischio conduce al medesimo risultato; ciò perché, sotto l'assunto di distribuzione gaussiana, i portafogli che minimizzano la varianza sono i medesimi che minimizzano un momento parziale. Ad esempio, se fissiamo la soglia h pari al rendimento atteso [$h = E(R)$] ed ipotizziamo la normalità della distribuzione, il *lower partial moment* di grado secondo (equivalente alla *semivarianza*) può essere stimato nel modo seguente:

¹⁴ Questa misura non va confusa con la *conditional average shortfall* che misura la media degli *shortfall* quando lo *shortfall* si è manifestato:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sum_{i=1}^N (R_i - h) d_i}{\sum_{i=1}^N d_i} \\
 & \text{Con :} \\
 & d_i = \begin{cases} 0 & \text{se } R_i > h \\ 1 & \text{se } R_i < h \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$(3.17) \quad lpm[E(R),2] = \frac{\sigma^2}{2}$$

Minimizzare la varianza del *downside* equivale quindi a minimizzare la generica varianza.

Qualora la distribuzione dei rendimenti non fosse normale e si manifestassero, quindi, fenomeni di asimmetria e curtosi, i portafogli efficienti secondo il principio media-varianza potrebbero essere sensibilmente differenti da quelli ottimali stimati sulla base del principio media-*lower partial moment*. Da ciò si desume che, nell'ipotesi in cui si utilizzi la massimizzazione alla Markowitz in presenza di investitori avversi alla misura $lpm(h,k)$, i portafogli così selezionati potrebbero essere sub-ottimali, poiché i portafogli capaci di minimizzare la varianza potrebbero non essere gli stessi che minimizzano il momento parziale di grado *k-esimo*.

Allo scopo di chiarire l'argomento appena discusso, si ricorre ad un approfondimento numerico. Utilizziamo nuovamente i rendimenti campionari presenti nella Tabella 3.1. Ipotizziamo che un investitore desideri un portafoglio con rendimento atteso pari al 10% in un contesto di avversione alla semivarianza, ovvero al parametro $lpm[(E(R),2]$. Tuttavia, ignorando il tipo di avversione che caratterizza l'investitore, si procede alla stima del portafoglio efficiente utilizzando il principio media-varianza:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} & \underset{w}{Min} \quad \sigma_{Port}^2 \\ & \text{Con vincoli:} \\ & \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = 10\% \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

La composizione del portafoglio A in grado di minimizzare la varianza è:

$$W_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 64,8\% \\ 0 \\ 12,0\% \\ 9,2\% \\ 0 \\ 0 \\ 14,0\% \end{bmatrix}$$

La deviazione standard e la semi-deviazione standard di questo portafoglio sono rispettivamente:

$$\sigma_A = 8,91\%$$

$$Semi\sigma_A = 6,53\%$$

Nell'ipotesi in cui i rendimenti di questo portafoglio non siano distribuiti normalmente, è altamente probabile che tale portafoglio non sia coerente con il principio media-semivarianza, ovvero che il vettore W_A identifichi una composizione degli indici di mercato sub-ottimale. Procedendo alla stima del portafoglio efficiente utilizzando il principio media-semivarianza:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} & \underset{W}{Min} \quad semi\sigma_{Port}^2 \\ & \text{Con vincoli:} \\ & \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = 10\% \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

la composizione del portafoglio B ottimale è:

$$W_B = \begin{bmatrix} 8,7\% \\ 62,3\% \\ 0 \\ 7,4\% \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 21,6\% \end{bmatrix}$$

La deviazione standard e la semi-deviazione standard di questo nuovo portafoglio

sono:

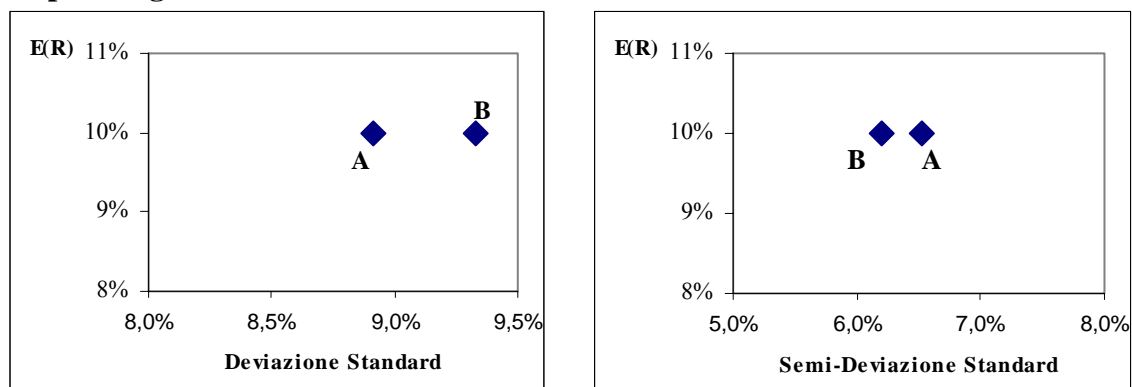
$$\sigma_B = 9,33\%$$

$$\text{Semi}\sigma_B = 6,21\%$$

La Figura 3.3 offre una rappresentazione delle combinazioni $[\sigma, E(R)]$ e $[\text{semi}\sigma, E(R)]$ dei portafogli A e B.

Si noti che la selezione del portafoglio A con il principio media-varianza avrebbe condotto, causa la non simmetria della distribuzione dei rendimenti, alla selezione di un portafoglio inefficiente per un investitore avverso alla semi-varianza. Il portafoglio A sarebbe stato ottimale nella sola ipotesi che l'investitore si dichiarasse avverso alla generica varianza.

Figura 3.3: Rappresentazioni grafiche delle combinazioni rischio-rendimento dei portafogli A e B



Oltre che con i *lower partial moments*, l'avversione per la manifestazione di rendimenti collocati nella porzione sinistra della distribuzione, è parimenti espressa dalle misure di VaR¹⁵. In tal caso, l'investitore, una volta definito il rendimento target, ha l'obiettivo di massimizzare il VaR corrispondente ad uno specifico livello di confidenza. L'avversione al rischio è in tal caso identificabile nel tentativo di selezionare il portafoglio che, dato il rendimento, presenta l'evento estremo probabilistico migliore possibile. In termini analitici, la stima del portafoglio efficiente (sempre in assenza di vendite allo scoperto) può essere espressa nel modo seguente:

¹⁵ Per una analisi più approfondita delle tecniche di Value at Risk, si rimanda al Capitolo 1.

$$\begin{aligned}
& \underset{w}{Max} \quad VaR_{Port} \\
& \text{Con vincoli :} \\
(3.20) \quad & \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = R^* \\
& \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
& w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

Si noti che in ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti, il VaR (in percentuale del capitale investito) può essere calcolato nel modo seguente¹⁶:

$$(3.21) \quad VaR_{Port} = E(R)_{Port} - \text{cost} \cdot \sigma_{Port}$$

Fissato il rendimento atteso target ed il multiplo della deviazione standard (che è funzione del livello di confidenza desiderato), al fine di massimizzare il Valore a Rischio è sufficiente minimizzare la deviazione standard (la varianza) del portafoglio; conseguentemente, in ipotesi di distribuzione normale, i principi media-varianza e media-VaR conducono esattamente ai medesimi portafoglio efficienti. Di contro la presenza di fenomeni di curtosi e asimmetria della distribuzione contribuisce a identificare portafogli ottimali eterogenei, a seconda che si ipotizzi l'avversione dell'investitore per la varianza o per il VaR del portafoglio.

In altri casi la misura VaR viene incorporata nell'ottimizzazione di portafoglio come vincolo aggiuntivo, finalizzato ad evitare che il Valore a Rischio del portafoglio scenda al di sotto di una soglia minima h tollerabile; la stima della composizione del portafoglio ottimale viene così espressa:

$$\begin{aligned}
& \underset{w}{Min} \quad \sigma_{Port}^2 \\
& \text{Con vincoli :} \\
(3.22) \quad & \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = R^* \\
& \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
& w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n \\
& VaR_{Port} \leq h
\end{aligned}$$

Sempre in tema di *Value at Risk* (in percentuale al capitale investito), si può utilizzare, quale misura di rischio, il *Conditional VaR*. Dato il livello di confidenza α , il corrispondente *Conditional VaR* [CVaR(α)] rappresenta il valore atteso dei VaR

¹⁶ Dato il livello di confidenza α , il VaR di un portafoglio in percentuale al capitale investito (VaR_α) corrisponde al quantile $(1-\alpha)$ -esimo dei rendimenti del portafoglio stesso.

calcolati per tutti i livelli di confidenza maggiori o uguali ad α .

Analiticamente, il *Conditional VaR* può essere espresso nel modo seguente:

$$(3.23) \quad CVaR(\alpha) = E\{VaR|VaR \leq VaR(\alpha)\}$$

o alternativamente:

$$(3.24) \quad CVaR_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR(x) dx$$

L'investitore, definito il rendimento target, può massimizzare il *Conditional VaR* corrispondente ad uno specifico livello di confidenza α . L'avversione al rischio è in tal caso identificabile nel tentativo di selezionare il portafoglio che, dato il rendimento, presenta il $CVaR(\alpha)$ migliore possibile. In termini analitici, la stima del portafoglio efficiente (sempre in assenza di vendite allo scoperto) può essere espressa nel modo seguente:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} & \underset{w}{Max} \quad CVaR(\alpha)_{port} \\ & \text{Con vincoli :} \\ & \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = R^* \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

È dunque legittimo utilizzare il modello di Markowitz per investitori che identificano il rischio nella manifestazione di eventi che si collocano nella sola porzione sinistra della distribuzione dei rendimenti? Scherer (2004) suggerisce: «*It is very difficult to contradict a client who claims to have non mean-variance preferences*».

Lo sviluppo di modelli di ottimizzazione che identificano il rischio nella probabilità di manifestazione di eventi estremi negativi è oggi significativo; tra gli altri:

- Telser (1956) e Kataoka (1963), Harlow (1991), Nawrocki (1991), Feiring, Wong et al. (1994) implementano un modello di ottimizzazione finalizzato alla minimizzazione di misure di *downside risk*;
- Basak e Shapiro (2001), Cuoco, He e Issaenko (2001) e Alexander e Baptista (2002) descrivono una logica di massimizzazione dell'utilità attesa soggetta al mantenimento di un livello critico di Value-at- Risk (VaR).

Questa produzione letteraria può essere letta anche come la risposta accademica ad

una richiesta esplicita degli *asset manager* e degli investitori, sempre più a loro agio con misure di *downside* ed *extreme measures*, quali il percentile, il *Valore a Rischio*, e la probabilità di *shortfall*.

Ciò nonostante, gli sforzi profusi in ambito accademico al fine di introdurre ipotesi di avversione al rischio innovative o di proporre ipotesi di distribuzioni dei rendimenti più realistiche¹⁷ non hanno scalfito l'egemonia del principio media-varianza. Sulle ragioni di ciò, Elton e Gruber (1999 a) si esprimono così: “*Mean-variance theory has remained the cornerstone of modern portfolio theory despite this alternative. [...] We believe there are two reasons for its persistence. First, mean variance theory itself places large data requirements on the investor, and there is no evidence that adding additional moments improves the desirability of the portfolio selected. Second, the implications of mean variance portfolio theory are well developed, widely known, and have great intuitive appeal. Professionals who have never run an optimizer have learned that correlations as well as means and variances are necessary to understand the impact of adding a security to a portfolio. [...] Risk measures such as beta, which have been developed based on mean variance analyses, add information and are recognized and used by investor who have no idea of the theory behind them. The precepts of mean variance theory WORK*”. Le parole di Elton e Gruber sono convincenti: Markowitz ha introdotto strumenti insostituibili. Egli ha contribuito alla nascita di un sistema operativo universalmente condiviso, il cui abbandono è improbabile: come reagireste se un amico vi suggerisse di cambiare il sistema operativo del vostro *personal computer*? La vostra ritrosia al mutamento è paragonabile a quella dell'*asset manager accustomed* al principio media-varianza.

3.3 Le critiche mosse all'applicazione pratica del modello

Le critiche sin qui analizzate, focalizzandosi sulle ipotesi di base del modello, puntano a minarne le fondamenta: l'approccio di Markowitz dovrebbe essere abbandonato in ragione dell'eccessiva semplificazione della struttura delle preferenze dell'investitore e della conseguente esigenza di rimuovere tanto il principio media-varianza, quanto la logica *myopic*.

¹⁷ Cfr. Fama (1965, 1976a), Elton e Gruber (1974).

È però possibile identificare una seconda fonte di perplessità. Al di là delle ipotesi di base, più o meno condivisibili, il percorso elaborato da Markowitz presenta delle debolezze operative identificabili nella costruzione di portafogli che, per ragioni di seguito enunciate, possono non incontrare il favore di chi implementa l'ottimizzazione. Le problematiche di seguito trattate non concernono quindi le fondamenta teoriche del modello, ma piuttosto l'incapacità dello stesso ad adeguarsi alla prassi operativa dei soggetti impegnati nel processo di asset allocation.

Qualsiasi *asset manager* predilige una logica di costruzione dei portafogli che:

1. conduca a soluzioni *ragionevoli*;
2. non si caratterizzi per una logica di tipo *black box*.

Entrambi i punti meritano un approfondimento.

In riferimento al tema della ragionevolezza dei portafogli, questi ultimi, al di là della necessità di massimizzare il rendimento atteso dato un livello di rischio, devono presentare dei requisiti di composizione che li facciano apparire ammissibili, concepibili e sensati. Ad esempio, un portafoglio rivolto ad un investitore italiano che fosse composto esclusivamente dei mercati:

- Azionario Paesi Emergenti;
- Azionario Pacifico ex Giappone;
- Obbligazionario Giappone;

sarebbe considerato *unreasonable* e quindi scartato a priori (a prescindere dalla sua collocazione ottimale sul piano rendimento-rischio), in virtù della presenza “ingombrante” di asset class che, per prassi, assumono pesi marginali. Al di là delle preferenze personali, gli *asset manager* sono inoltre soggetti a vincoli di tipo normativo e societario il cui mancato rispetto non è ammesso¹⁸.

Sul tema della ragionevolezza dei portafogli, Black e Litterman (1992) sottolineano: «*When investors have tried to use quantitative model to help optimize the critical allocation decisions, the unreasonable nature of the results has often thwarted their efforts*». Il modello di Markowitz condivide con molti altri modelli matematici la tendenza a restituire portafogli inammissibili. A titolo esemplificativo, considerando l'ottimizzazione svolta nel paragrafo 2.6 e sintetizzata nelle figure 2.8 e 2.9, il

¹⁸ Tra i lavori che hanno affrontato il problema dei vincoli alla composizione dei portafogli, citiamo: Sharpe (1974), Fisher (1975), Rosemberg e Rudd (1978, 1979), Dybvig (1984).

portafoglio con deviazione standard pari a 17,32% che massimizza il rendimento atteso presenta la seguente composizione:

$$W_{Opt} = \begin{bmatrix} w_{\text{Monetario area Euro}} \\ w_{\text{Obbligazionario Area Euro}} \\ w_{\text{Obbligazionario Internazionale}} \\ w_{\text{Azionario Europa}} \\ w_{\text{Azionario Nord America}} \\ w_{\text{Azionario Giappone}} \\ w_{\text{Azionario Pacifico con esclusione del Giappone}} \\ w_{\text{Azionario Paesi Emergenti}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 49,3\% \\ 0 \\ 0 \\ 50,7\% \end{bmatrix}$$

È probabile che un portafoglio così composto non verrebbe proposto ad alcun investitore, in ragione:

- della eccessiva concentrazione (due soli asset in portafoglio);
- dell'esposizione sproporzionata (pari al 100% dell'investimento) al rischio di cambio;
- del peso elevato di un mercato marginale quale l'azionario *Emerging Markets*;
- dell'assenza di una componente domestica nella porzione azionaria del portafoglio;
- dell'assenza delle componenti obbligazionaria e monetaria area euro.

Non è arduo identificare le cause della natura *unreasonable* dei portafogli efficienti: il modello di Markowitz punta ad identificare i portafogli coerenti con il principio media-varianza senza fare nessun tipo di assunzione circa la composizione dei portafogli efficienti. In questo modello le preferenze dell'investitore si focalizzano sulle sole combinazioni $[\sigma; E(R)]$, senza alcun riguardo per la composizione dei portafogli efficienti. In altri termini, gli investitori sono giudicati neutrali alla composizione dei portafogli e conseguentemente non è contemplata una distinzione tra portafogli ragionevoli ed irragionevoli, poiché l'unica distinzione rilevante è tra soluzioni efficienti ed inefficienti.

Nella prassi operativa gli *asset manager* non fanno un uso frequente di portafogli dalle composizioni estreme (definiti anche *corner portfolio*)¹⁹; anzi, dal loro comportamento si desume un significativo “rispetto” per le capitalizzazioni di borsa²⁰

¹⁹ A tal riguardo, Green e Hollified affermano: «*Practitioners are suspicious of portfolios that are not naively diversified*».

²⁰ Questo verrà approfondito nel capitolo 5.

ed una preferenza di massima per i mercati domestici. Tali evidenze non fanno che alimentare le resistenze alla diffusione di modelli quantitativi incapaci di comporre portafogli dalla natura coerente con le idee aprioristiche dei *portfolio manager*.

In riferimento alla natura *black-box* delle ottimizzazioni matematiche, Best e Grauer (1991 a) affermano: «*Portfolio Managers develop a sense of interactions between the inputs and the resulting optimal portfolio as well as a sense of what realistic portfolios should be. [...] Optimization algorithms tend to obscure the relationship between the inputs and the optimal portfolios, which in turn weakens the feedback to the judgemental process that formulated the inputs in the first place*». Il problema posto dagli autori è estremamente rilevante: nessun modello di ottimizzazione può essere apprezzato qualora esso restituisca risultati che l'*asset manager* giudica incoerenti con le proprie aspettative. Purtroppo, la metodologia classica implementata da Markowitz rende assai complesso, se non impossibile, trovare un nesso preciso tra i valori attribuiti ai parametri di input (le stime) ed il risultato finale (la composizione dei portafogli). Soprattutto in presenza di un numero elevato di asset class, il legame tra stime e composizione ottimale è talmente oscuro (da qui il termine *black box*) da impedire qualsiasi tentativo di anticipare l'esito della ottimizzazione matematica. In altre parole, la numerosità delle variabili che entrano in gioco nella programmazione quadratica è tale da rendere vano qualsiasi tentativo di cogliere la relazione causa-effetto che lega input e output. Un esempio numerico contribuirà a chiarire il problema.

Tabella 3.7: Mercati e Benchmark selezionati

 Mercati	Indici di Mercato
Monetario Area Euro	I. Mkt. 1 = JPMEuro Cash 3M - Tot Return Ind
Obbligazionario Area Euro	I. Mkt. 2 = CGBI WGBI EMU All Mats. - Tot Return Ind
Azionario Globale Energia	I. Mkt. 3 = MSCI World Energy - Price Index
Azionario Globale Materiali	I. Mkt. 4 = MSCI World Materials - Price Index
Azionario Globale Industriali	I. Mkt. 5 = MSCI World Industrials - Price Index
Azionario Globale Beni Voluttuari	I. Mkt. 6 = MSCI World Cconsumer Discretionary - Price Index
Azionario Globale Beni di Prima Necessità	I. Mkt. 7 = MSCI World Consumer Staples - Price Index
Azionario Globale Salute	I. Mkt. 8 = MSCI World Health Care - Price Index
Azionario Globale Finanza	I. Mkt. 9 = MSCI World Financials - Price Index
Azionario Globale Information Technology	I. Mkt. 10 = MSCI World IT - Price Index
Azionario Globale Telecomunicazioni	I. Mkt. 11 = MSCI World Telecommunications - Price Index
Azionario Globale Pubblica Utilità	I. Mkt. 12 = MSCI World Utilities - Price Index

Ipotizziamo che un *asset manager* italiano voglia costruire un portafoglio con deviazione standard pari al 15%, combinando mercati monetari, obbligazionari ed azionari. L'orizzonte temporale d'investimento è annuale. I mercati che egli considera potenzialmente interessanti sono dodici e a ciascuno di essi viene associato un indice di mercato (Tabella 3.7).

La Tabella 3.8 sintetizza l'insieme delle stime²¹ prodotte dall'*asset manager*.

Tabella 3.8: Le stime dei parametri

Indici di Mercato	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi
I. Mkt. 1	3,83%	1,30%
I. Mkt. 2	6,46%	4,94%
I. Mkt. 3	14,01%	20,90%
I. Mkt. 4	7,79%	19,22%
I. Mkt. 5	7,64%	20,20%
I. Mkt. 6	8,20%	22,32%
I. Mkt. 7	9,22%	17,08%
I. Mkt. 8	13,40%	24,87%
I. Mkt. 9	9,56%	17,97%
I. Mkt. 10	17,71%	48,60%
I. Mkt. 11	8,11%	31,84%
I. Mkt. 12	8,22%	18,77%

²¹ La logica utilizzata per giungere a queste stime è irrilevante e quindi omessa.

ρ	I. 1	I. 2	I. 3	I. 4	I. 5	I. 6	I. 7	I. 8	I. 9	I. 10	I. 11	I. 12
I. 1	1	0,64	-0,14	-0,48	-0,26	-0,14	0,33	0,44	-0,07	-0,02	0,00	-0,10
I. 2	0,64	1	-0,30	-0,69	-0,50	-0,49	0,22	0,31	-0,24	-0,38	-0,33	-0,02
I. 3	-0,14	-0,30	1	0,75	0,88	0,73	0,65	0,61	0,87	0,59	0,55	0,64
I. 4	-0,48	-0,69	0,75	1	0,89	0,80	0,09	0,06	0,61	0,69	0,56	0,29
I. 5	-0,26	-0,50	0,88	0,89	1	0,89	0,42	0,45	0,87	0,79	0,71	0,58
I. 6	-0,14	-0,49	0,73	0,80	0,89	1	0,36	0,38	0,72	0,94	0,92	0,37
I. 7	0,33	0,22	0,65	0,09	0,42	0,36	1	0,95	0,76	0,24	0,35	0,80
I. 8	0,44	0,31	0,61	0,06	0,45	0,38	0,95	1	0,78	0,32	0,39	0,78
I. 9	-0,07	-0,24	0,87	0,61	0,87	0,72	0,76	0,78	1	0,59	0,61	0,83
I. 10	-0,02	-0,38	0,59	0,69	0,79	0,94	0,24	0,32	0,59	1	0,93	0,21
I. 11	0,00	-0,33	0,55	0,56	0,71	0,92	0,35	0,39	0,61	0,93	1	0,33
I. 12	-0,10	-0,02	0,64	0,29	0,58	0,37	0,80	0,78	0,83	0,21	0,33	1

Dati i 12 rendimenti attesi, i 12 rischi attesi e i 66 coefficienti di correlazione lineare, è arduo identificare i mercati che saranno privilegiati dalla ottimizzazione, così come i valori che dovrebbero essere attribuiti alle stime, in modo da favorire specifiche asset class.

La composizione efficiente del portafoglio con $\sigma = 15\%$ è la seguente:

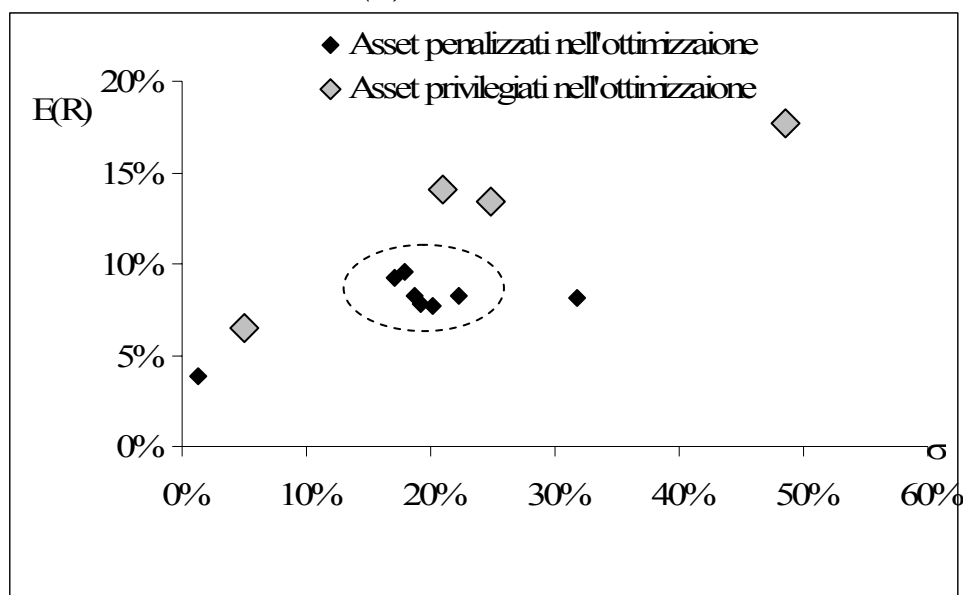
$$W_{Opt} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 23,17\% \\ 60,26\% \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12,77\% \\ 0 \\ 3,80\% \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La Figura 3.4 mostra le combinazioni rendimento atteso-rischio delle 12 *asset class*; i quattro indicatori di maggiore dimensione rappresentano le combinazioni $[\sigma, E(R)]$ delle asset class - Obbligazionario Area Euro, Azionario Globale Energia, Azionario Globale Salute e Azionario Globale Information Technology - privilegiate dalla ottimizzazione.

È probabile che questo portafoglio sia considerato inaccettabile. Ad esempio,

l'asset manager potrebbe ritenere intollerabile l'esclusione dei mercati azionari Materiali, Industriali, Beni di Prima Necessità, Beni Voluttuari, Finanza e Pubblica Utilità, i quali si caratterizzano per combinazioni rendimento-rischio non eccellenti, ma pur sempre discrete (sono le combinazioni interne all'area tratteggiata della Figura 3.4). La necessità di avvicinare il portafoglio alle proprie posizioni aprioristiche potrebbe indurre l'*asset manager* ad apportare dei correttivi agli input; egli potrebbe ad esempio migliorare la combinazione rendimento-rischio delle asset class, in modo che le stesse tornino ad essere competitive in un confronto con quelle selezionate dalla ottimizzazione.

Figura 3.4: Le combinazioni $E(R)$ – σ delle 12 asset class



Il lettore non avvezzo alla prassi quotidiana dell'*asset management* potrà trovare stravagante l'idea che un gestore, piuttosto che fidarsi ciecamente della ottimizzazione, si preoccupi che la stessa si avvicini ad una idea aprioristica di composizione di portafoglio. Tuttavia, nella prassi operativa gli *asset manager*, ancor prima di esprimere delle stime puntuali, maturano delle generiche aspettative (positive, negative o neutrali) sui singoli mercati, aspettative che sono poi *costretti* ad esprimere in termini di stime puntuali²². Questo *modus operandi* è tale da attribuire più significato alle *view* primarie

²² Nel capitolo 5 si tornerà sul problema della natura delle stime. In ogni caso, l'esperienza insegna che gli *asset manager* sarebbero ben contenti di rimanere su "views" generiche del tipo:

– il mercato A batterà il mercato B;

di partenza, piuttosto che alle stime puntuali necessarie al solo fine di uniformarsi alle esigenze dell'ottimizzazione matematica. Conseguentemente se il comportamento "oscuro" della ottimizzazione è tale da restituire portafogli non in linea con le preferenze, essi, piuttosto che affidarsi al modello matematico, preferirebbero apportare dei cambiamenti ai parametri di input, rivelatisi incapaci di tradurre numericamente le loro aspettative primarie. Ipotizzate che l'*asset manager* abbia maturato una *view* moderatamente positiva sulle sei asset class precedentemente menzionate e che abbia espresso delle stime di rendimento-rischio tali da attendersi una loro presenza in portafoglio; qualora l'ottimizzazione ignori queste asset class, il pensiero dell'*asset manager* sarebbe il seguente: *«Sono convinto che queste asset class siano interessanti, ma le stime prodotte non sono tali da far comparire tali mercati in portafoglio; evidentemente non ho saputo incorporare nelle stime la fiducia che ripongo in questi asset. Non rimane che riparare all'errore modificando le stime stesse»*. In conclusione, l'*asset manager*, chiamato a decidere tra due posizioni alternative:

- rimanere fedele alle sue idee generiche di partenza (le *view* positive, negative o neutrali sui mercati);
- fare un "atto di fede" nei confronti dell'ottimizzazione, anche nell'eventualità che questa conduca a risultati incoerenti con le sue *view* primarie;

convergerà saggiamente verso la prima soluzione.

Ad ogni modo, qualsiasi tentativo di modifica degli input finalizzata ad apportare le modifiche di peso desiderate, è destinato a fallire a causa dell'*instabilità* dei portafogli efficienti.

3.4 L'instabilità dei portafogli efficienti

Uno dei problemi più seri concernenti l'utilizzo pratico della teoria di Markowitz è identificabile nell'*instabilità* dei portafogli ottimali²³. Questo fenomeno ha una manifestazione nel fatto che, spesso, sono sufficienti piccole variazioni nel set di *input* per produrre ampie modifiche nella composizione della frontiera efficiente. A tale

– il mercato C avrà una performance positiva, ma peggiore del mercato D.
Il passaggio da aspettative generiche a precise stime parametriche è infatti imposto dall'impossibilità di processare una ottimizzazione matematica in assenza di stime puntuali.

²³ Sul tema della instabilità dei portafogli, cfr. Best e Grauer (1991 a, 1991 b), .

proposito Jorion (1985) scrive: «Another problem is the instability of the optimal portfolio: the proportions allocated to each asset are extremely sensitive to variations in expected returns, and adding a few observations may change the portfolio distribution completely».

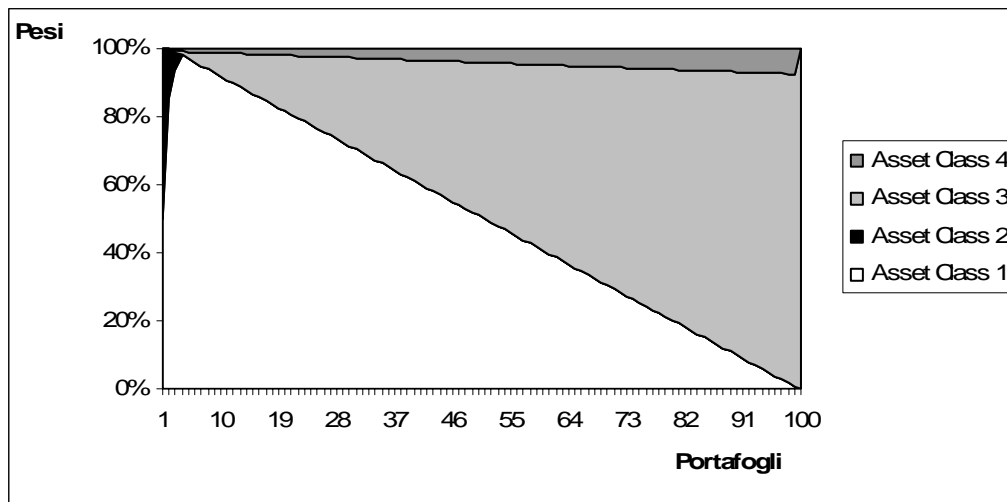
Allo scopo di dare evidenza di quanto testé affermato, si propone un esempio numerico. Nella Tabella 3.9 sono stati riportati i vettori dei rendimenti attesi e delle deviazioni standard (espressi su base annua), nonché la matrice dei coefficienti di correlazione relativi a quattro ipotetiche *asset class*; la composizione della frontiera efficiente ottenuta dalla loro combinazione è stata riportata nella Figura 3.5. Pur in presenza di quattro classi di attività, i portafogli efficienti sono quasi totalmente composti dalle *asset class* 1 e 3. La composizione (poco diversificata) dei portafogli ottimali è riconducibile ai seguenti fenomeni:

- a livelli di bassa deviazione standard, l’asset class 1 domina (di poco) l’asset class 2;
- a livelli di elevata deviazione standard, l’asset class 3 domina (di poco) l’asset class 4;
- la struttura della matrice delle correlazioni non è tale da attribuire ad una specifica classe di attività un potere in termini di capacità di diversificazione sensibilmente superiore a quello delle altre.

Tabella 3.9: Gli input del modello

Asset Class	E(R)	σ	ρ			
			AC.1	AC.2	AC.3	AC.4
Asset Class 1	3,00%	1,00%	1	0,90	0,40	0,38
Asset Class 2	2,80%	1,00%	0,90	1	0,40	0,38
Asset Class 3	12,00%	10,00%	0,40	0,40	1	0,95
Asset Class 4	11,60%	10,00%	0,38	0,38	0,95	1

Figura 3.5: La composizione dei portafogli ottimali



Se si procede a una modifica marginale del set di *input* - viene effettuato un piccolo incremento del rendimento atteso delle asset class 2 e 4 (Tabella 3.10) - e si “lancia” una nuova ottimizzazione, la frontiera efficiente così ottenuta si caratterizza per una composizione (Figura 3.6) sensibilmente differente da quella precedente; in particolare, sono le asset class 2 e 4 ad assumere un peso dominante. Un *portfolio manager* dovrebbe essere preoccupato di questa sensibilità della composizione: come ci si può fidare della combinazione iniziale di pesi, se insignificanti variazioni degli input provocano un effetto così macroscopico?

Tabella 3.10: Gli input alla base del modello di Markowitz dopo la modifica

Asset Class	E(R)	σ	ρ	AC.1	AC.2	AC.3	AC.4
Asset Class 1	3,00%	1,00%	AC.1	1	0,90	0,40	0,38
Asset Class 2	3,10%	1,00%	AC.2	0,90	1	0,40	0,38
Asset Class 3	12,00%	10,00%	AC.3	0,40	0,40	1	0,95
Asset Class 4	12,30%	10,00%	AC.4	0,38	0,38	0,95	1

Prescindendo dall'esempio che, costruito *ad hoc*, “disegna” una situazione limite, l'*instabilità*, se pur con effetti meno evidenti, è un fenomeno proprio di tutti i portafogli efficienti. L'esemplificazione numerica suggerisce tuttavia che l'effetto è più marcato, e tale da stravolgere totalmente la composizione della frontiera efficiente, quando si è in presenza di più *asset class* aventi simili combinazioni (σ ; μ); infatti, in situazioni di questo tipo, piccole modifiche degli *input* possono modificare la natura delle *asset class* “privilegiate” dal processo di programmazione quadratica. Viceversa, in presenza di

asset che dominano tutte le altre, le composizioni non si modificano sensibilmente (la frontiera è più stabile), perché moderate modifiche degli *input* non trasformano le *asset class* da *dominanti* a *dominate* (e viceversa).

Figura 3.6: La composizione dei portafogli ottimali dopo la modifica degli input



La ricerca dell'eccellenza nell'*asset management* impone al gestore di valutare anche il livello di instabilità che caratterizza il proprio modello di costruzione del portafoglio, in modo da stabilire in che misura variazioni dei parametri, giudicate dal decisore irrilevanti, incidano sui pesi degli *asset* in portafoglio. Se i portafogli si rivelassero eccessivamente instabili, l'*asset manager* dovrebbe mettere in dubbio la loro concreta applicazione. A tal fine, si propone un esempio di *sensitivity analysis* utile al fine di esaminare in che misura cambiamenti insignificanti nei rendimenti attesi e nelle deviazioni standard²⁴ producano effetti sulla composizione dei portafogli efficienti.

Un *asset manager* ha intenzione di costruire un portafoglio efficiente coerente con un parametro di avversione al rischio pari a:

$$(3.26) \quad \frac{E(R)_{Port}}{\sigma_{Port}} = 1$$

Si è optato per un indicatore di questo tipo, perché esso trova una interpretazione finanziaria immediata²⁵.

²⁴ Allo scopo di non appesantire l'analisi trascuriamo la variazione dei coefficienti di correlazione.

²⁵ Per quanto affermato nel paragrafo 2.7, sotto l'ipotesi di distribuzione gaussiana dei rendimenti, questo indicatore di avversione al rischio può essere interpretato in termini di probabilità di *shortfall* rispetto ad un parametro soglia. Infatti, riarrangiando l'equazione, è possibile giungere al seguente risultato:

Ipotizzando che il *portfolio manager* abbia selezionato le *asset class* della Tabella 3.7 e che le stime siano quelle della Tabella 3.8, il portafoglio efficiente viene stimato eseguendo questa ottimizzazione²⁶:

$$\begin{aligned}
 & \underset{W}{\text{Max}} \quad E(R)_{Port} \\
 & \text{Con vincoli:} \\
 & \frac{E(R)_{Port}}{\sigma_{Port}} = 1 \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

Il portafoglio efficiente così ottenuto è il seguente:

$$W_{Opt} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 44,90\% \\ 46,31\% \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5,59\% \\ 0 \\ 3,2\% \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Allo scopo di valutare in che misura questa composizione sia sensibile ad una variazione di $E(R)$ e σ , l'*asset manager* è chiamato ad identificare degli intervalli di variazione dei parametri che egli giudica insignificanti. In altri termini, egli deve stabilire entro quale *range* le stime possano muoversi, senza che la variazione rispetto alla stima di partenza venga giudicata significativa. L'identificazione degli *upper* e *lower bounds* è rimessa alla sensibilità del singolo decisore, chiamato a definire soggettivamente l'entità della variazione giudicata insignificante. La Tabella 3.11

$$E(R)_{Port} - 1 \cdot \sigma_{Port} = 0$$

Questa espressione si presta (grazie alle proprietà di una distribuzione normale) alla seguente interpretazione: l'investitore ha un grado di avversione al rischio tale da tollerare una probabilità del 15,87% di ottenere risultati peggiori di un rendimento nullo.

²⁶ Data la presenza di un vincolo non lineare, questa ottimizzazione è stata compiuta utilizzando la funzione “*fmincon*” disponibile nel *Financial Toolbox* di *Matlab*.

mostra i valori estremi, minimi e massimi, attribuiti rispettivamente ai rendimenti attesi ed alle deviazioni standard.

Giunti a questo punto, la generazione di numeri casuali ε distribuiti in maniera uniforme e compresi tra 0 e 1, permette di estrapolare *randomly* dei valori simulati dei parametri all'interno del *range* precedentemente definito. Denominati $U_{bound}(\alpha)$ e $L_{bound}(\alpha)$ rispettivamente la soglia massima e minima dell'intervallo di variazione di un generico parametro α , il valore simulato viene ottenuto mediante una interpolazione lineare:

$$(3.28) \quad \alpha_{Sim} = \varepsilon \cdot [U_{bound}(\alpha) - L_{bound}(\alpha)] + L_{bound}(\alpha)$$

Tabella 3.11: I valori minimi e massimi attribuiti alle variabili $E(R)$ e σ

Rendimenti Attesi			Rischi Attesi		
	Lower Bounds	Upper Bounds		Lower Bounds	Upper Bounds
I. Mkt. 1	3,20%	4,20%	I. Mkt. 1	0,80%	1,60%
I. Mkt. 2	5,90%	6,90%	I. Mkt. 2	3,70%	5,00%
I. Mkt. 3	13,00%	15,00%	I. Mkt. 3	18,00%	22,00%
I. Mkt. 4	6,00%	8,50%	I. Mkt. 4	17,00%	20,00%
I. Mkt. 5	6,00%	8,50%	I. Mkt. 5	18,30%	21,70%
I. Mkt. 6	7,00%	9,00%	I. Mkt. 6	19,00%	23,00%
I. Mkt. 7	8,20%	10,00%	I. Mkt. 7	15,00%	18,80%
I. Mkt. 8	12,00%	15,00%	I. Mkt. 8	21,00%	25,00%
I. Mkt. 9	8,40%	10,20%	I. Mkt. 9	16,00%	19,10%
I. Mkt. 10	15,00%	20,00%	I. Mkt. 10	38,00%	49,00%
I. Mkt. 11	7,50%	9,00%	I. Mkt. 11	27,00%	33,00%
I. Mkt. 12	7,50%	9,00%	I. Mkt. 12	17,00%	20,00%

Nel nostro caso, per ogni simulazione occorrerà estrapolare tante variabili casuali²⁷ quanti sono i parametri da stimare (12 rendimenti attesi + 12 deviazioni standard), ottenendo così i due nuovi vettori dei rendimenti e dei rischi che, insieme alla matrice delle correlazioni, verranno utilizzati come input per la stima del nuovo portafoglio efficiente (con parametro di avversione al rischio pari a 1). Ripetendo questa procedura 100 volte otterremo altrettanti portafogli simulati, la cui composizione andrà confrontata con la composizione del portafoglio iniziale: quanto più i portafogli simulati si

²⁷ Le variabili casuali sono state estrapolate in modo indipendente tra loro. In ogni caso, dato l'obiettivo che si vuole conseguire (misurare l'instabilità della frontiera al variare dei parametri), questa ipotesi non è tale da privare di significatività la nostra analisi.

discosteranno dal portafoglio di partenza, tanto più quest'ultimo andrà considerato instabile. Allo scopo di analizzare il grado di sensibilità agli input che caratterizza il portafoglio efficiente, si propongono più indicatori; in particolare, definita $(w_i - w_{Iniziale})$ la differenza tra il peso che l'asset class *i-esima* assume nel portafoglio iniziale ed in quello simulato, calcoliamo, per ciascuna asset class:

- $Max|w_i - w_{Iniziale}|$, la differenza massima di peso (in valore assoluto) riscontrata nelle 100 simulazioni;
- $75^{\circ}Percentile|w_i - w_{Iniziale}|$, differenza di peso (in valore assoluto) corrispondente ad un percentile pari al 75%;
- $Media|w_i - w_{Iniziale}|$, differenza media di peso (in valore assoluto);
- $\sigma(w_i - w_{Iniziale})$, deviazione standard delle differenze di peso.

Il compito di sintetizzare in un unico valore il livello di stabilità è deputato alla media delle distanze euclidee tra i pesi del portafoglio iniziale e quelli di ciascun portafoglio simulato²⁸. La Tabella 3.12 sintetizza i risultati numerici.

Tabella 3.12: L'output della *sensitivity analysis*

	Max $ w_i - w_{Iniziale} $	75° Percentile $ w_i - w_{Iniziale} $	Media $ w_i - w_{Iniziale} $	σ ($w_i - w_{Iniziale}$)
Monetario area Euro	23,9%	0,0%	0,2%	2,4%
Obbligazionario Area Euro	17,3%	7,2%	5,0%	6,1%
Azionario Mondo Energia	42,0%	16,9%	11,9%	13,4%
Azionario Mondo Materiali	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Azionario Mondo Industriali	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Azionario Beni Voluttuari	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Azionario Mondo Beni di Prima Necessità	7,0%	0,0%	0,1%	0,7%
Azionario Mondo Salute	22,2%	11,4%	7,6%	8,2%
Azionario Mondo Finanza	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Azionario Mondo Information Technology	14,5%	4,5%	3,7%	4,3%
Azionario Mondo Telecomunicazioni	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%
Azionario Mondo Pubblica Utilità	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Media delle Distanze Euclidee	0,1685			

²⁸ Definiti:

- W = il vettore colonna dei pesi del portafoglio iniziale;
- \hat{W} = il vettore colonna dei pesi di un portafoglio simulato;

la Distanza Euclidea tra questi due vettori viene calcolata nel modo seguente:

$$\sqrt{(W - \hat{W})^T \times (W - \hat{W})}$$

Grazie alle migliori combinazioni rischio-rendimento delle 4 asset class premiate dall'ottimizzazione (Figura 3.4), il portafoglio efficiente non presenta un livello elevato di instabilità. Infatti, i valori riportati nella Tabella 3.12 non evidenziano, in media, sensibili differenze di composizione. Tuttavia, qualora le combinazioni rischio-rendimento delle 12 attività fossero tra loro più vicine, il livello di instabilità sarebbe destinata ad aumentare, anche sensibilmente. Diamone una prova concreta.

Ipotizziamo che le stime di rendimento atteso e di rischio espresse dall'*asset manager* siano quelle della Tabella 3.13 (i coefficienti di correlazione sono gli stessi utilizzati precedentemente). I 10 mercati azionari presentano combinazioni $[\sigma, E(R)]$ molto più simili; in particolare, alle *asset class* azionarie ignorate dalla precedente ottimizzazione vengono attribuite le medesime stime dei mercati selezionati. Nello specifico:

- gli indici 4, 5 e 6 assumono le stesse stime dell'indice 3;
- gli indici 7 e 9 assumono le stesse stime dell'indice 8;
- gli indici 11 e 12 assumono le stesse stime dell'indice 10.

Tabella 3.13: Le nuove stime di $E(R)$ e σ delle 12 asset class

Indici di Mercato	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi
I. Mkt. 1	3,83%	1,30%
I. Mkt. 2	6,46%	4,94%
I. Mkt. 3	14,01%	20,90%
I. Mkt. 4	14,01%	20,90%
I. Mkt. 5	14,01%	20,90%
I. Mkt. 6	14,01%	20,90%
I. Mkt. 7	13,40%	24,87%
I. Mkt. 8	13,40%	24,87%
I. Mkt. 9	13,40%	24,87%
I. Mkt. 10	17,71%	48,60%
I. Mkt. 11	17,71%	48,60%
I. Mkt. 12	17,71%	48,60%

Il nuovo portafoglio efficiente è:

$$W_{Opt} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 26,37\% \\ 72,53\% \end{bmatrix}$$

Allo scopo di valutare in che misura questa composizione sia sensibile ad una variazione di $E(R)$ e σ , l'*asset manager* è chiamato ad identificare nuovamente gli intervalli di variazione dei parametri giudicati insignificanti. La Tabella 3.14 mostra i valori minimi e massimi; le sette asset class azionarie che hanno visto variare le stime, hanno ereditato dalle asset class 3, 8 e 10 anche i valori estremi dell'intervallo di variazione.

Tabella 3.14: I nuovi valori minimi e massimi attribuiti alle variabili $E(R)$ e σ

Rendimenti Attesi			Rischi Attesi		
	Lower Bounds	Upper Bounds		Lower Bounds	Upper Bounds
I. Mkt. 1	3,20%	4,20%	I. Mkt. 1	0,80%	1,60%
I. Mkt. 2	5,90%	6,90%	I. Mkt. 2	3,70%	5,00%
I. Mkt. 3	13,00%	15,00%	I. Mkt. 3	18,00%	22,00%
I. Mkt. 4	13,00%	15,00%	I. Mkt. 4	18,00%	22,00%
I. Mkt. 5	13,00%	15,00%	I. Mkt. 5	18,00%	22,00%
I. Mkt. 6	13,00%	15,00%	I. Mkt. 6	18,00%	22,00%
I. Mkt. 7	12,00%	15,00%	I. Mkt. 7	21,00%	25,00%
I. Mkt. 8	12,00%	15,00%	I. Mkt. 8	21,00%	25,00%
I. Mkt. 9	12,00%	15,00%	I. Mkt. 9	21,00%	25,00%
I. Mkt. 10	15,00%	20,00%	I. Mkt. 10	38,00%	49,00%
I. Mkt. 11	15,00%	20,00%	I. Mkt. 11	38,00%	49,00%
I. Mkt. 12	15,00%	20,00%	I. Mkt. 12	38,00%	49,00%

La tabella 3.12 sintetizza i risultati di questa nuova *sensitivity analysis*. Si noti come i valori medi e quelli estremi delle differenze assolute di peso siano sensibilmente

maggiori rispetto a quelli dell'esempio precedente. Le misure di volatilità e la media delle distanze euclidee sono una conferma ulteriore dell'enorme instabilità che caratterizza il portafoglio efficiente in esame.

Tabella 3.15: L'output della seconda analisi di *sensitivity*

	Max w _i -w _{iniziale}	75° Percentile w _i -w _{iniziale}	Media w _i -w _{iniziale}	σ (w _i -w _{iniziale})
Monetario area Euro	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Obbligazionario Area Euro	37,0%	23,0%	17,2%	8,2%
Azionario Mondo Energia	53,9%	0,0%	2,8%	10,1%
Azionario Mondo Materiali	63,9%	52,9%	40,1%	17,6%
Azionario Mondo Industriali	61,5%	0,0%	2,7%	11,9%
Azionario Beni Voluttuari	46,2%	9,7%	6,6%	11,3%
Azionario Mondo Beni di Prima Necessità	44,4%	29,7%	14,2%	15,1%
Azionario Mondo Salute	44,8%	31,9%	15,7%	16,4%
Azionario Mondo Finanza	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Azionario Mondo Information Technology	7,1%	1,1%	1,2%	1,3%
Azionario Mondo Telecomunicazioni	26,4%	26,4%	26,2%	0,6%
Azionario Mondo Pubblica Utilità	72,5%	72,5%	72,2%	1,2%
Media delle Distanze Euclidee	0,9761			

Il confronto tra la composizione dei 100 portafogli simulati ottenuti rispettivamente nel primo (Figura 3.7) e nel secondo (Figura 3.8) esempio numerico, fuga qualsiasi dubbio concernente la diversa sensibilità dei pesi, riconducibile, come detto, alla disforme distribuzione delle stime nello spazio $[\sigma, E(R)]$.

Figura 3.7: La composizione dei 100 portafogli simulati nel caso di bassa instabilità

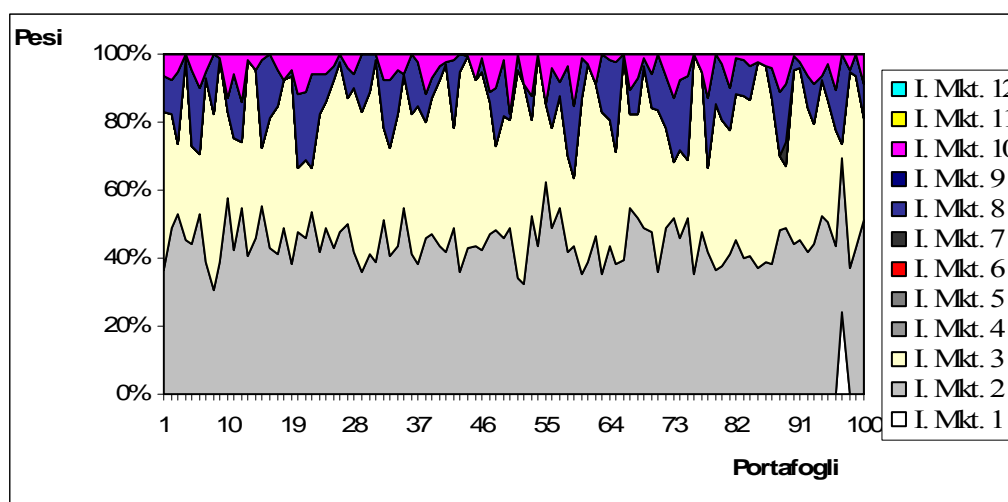
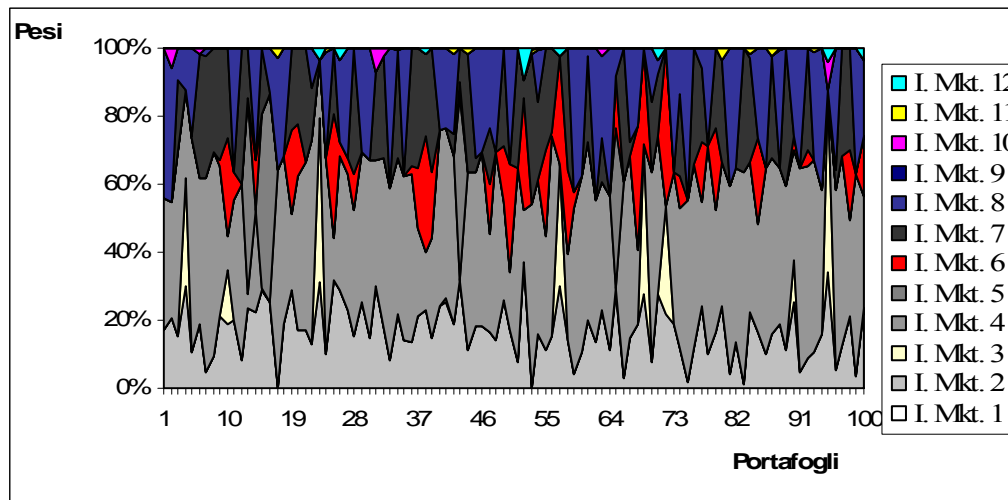


Figura 3.8: La composizione dei 100 portafogli simulati, nel caso di elevata instabilità



Questa analisi può essere estesa anche alle misure di correlazione; inoltre è possibile testare la *sensitivity* riconducibile a movimenti parziali dei parametri, modificando ad esempio i soli rendimenti attesi, i soli rischi e/o correlazioni o anche mutando gli input relativi ad un'unica asset class.

In conclusione, i test di *sensitivity* assumono una rilevanza significativa «*to help in understanding the relationship between the inputs and the resulting optimal portfolio*» (Best e Grauer, 1991 a). Essi vanno interpretati alla stregua di strumenti utili al fine di selezionare tecniche di *asset allocation* non soggette a pronunciati fenomeni di instabilità. Nei successivi capitoli la presenza di composizioni sensibili a variazioni marginali degli input sarà sempre interpretata come un segnale negativo.

3.5 Le conseguenze degli errori di stima

L'ottimizzazione alla Markowitz rappresenta una potente procedura che permette di giungere velocemente all'identificazione delle strategie di investimento ottimali. Tuttavia, troppo spesso l'analisi di questo modello viene colpevolmente sviluppata ignorando il fatto che i parametri di *input* siano stimatori di parametri ignoti. Infatti, le *true distribution* dei rendimenti futuri degli *asset* sono *unknown* (a meno che non si disponga di doti di chiaroveggenza, ma, mutuando le parole di Markowitz: «*Clairvoyant analyst have no need for the techniques of this monograph*»), ed occorre quindi optare

per stime che potrebbero rivelarsi errate. La stessa letteratura finanziaria ha per lungo tempo ignorato il problema delle conseguenze riconducibili all'utilizzo di stimatori: i lavori pionieristici su questo tema si collocano nella seconda metà degli anni '60 - primi anni '70²⁹.

La conseguenza di utilizzare stimatori di parametri ignoti è evidente: a causa di errori commessi nella stima di $E(R)$, σ e ρ , i portafogli considerati efficienti *ex-ante* potrebbero essere in realtà sub-ottimali. Poiché l'investitore, più che al risultato promesso, è interessato a quello effettivamente conseguito, diventa fondamentale analizzare i pericoli che si celano dietro la manifestazione dell'*estimation error*³⁰.

Al fine di analizzare numericamente le possibili conseguenze prodotte dagli errori di stima, si fa ricorso ad un esempio. Ipotizziamo che un *asset manager* abbia maturato, in riferimento a quattro distinti mercati, le aspettative riportate nella Tabella 3.16 (l'orizzonte temporale è annuale). Assumiamo inoltre che i rendimenti degli asset si distribuiscano normalmente; l'incertezza è quindi riconducibile al valore assunto dai momenti statistici, non alla forma della distribuzione. Coerentemente con il principio media-varianza, viene effettuata una ottimizzazione volta ad identificare il portafoglio efficiente che con rendimento atteso pari all'11% minimizza il parametro σ . Questo portafoglio presenta una deviazione standard del 13,75% ed ha la seguente composizione:

$$W_{Opt} = \begin{bmatrix} w_{Mercato 1} \\ w_{Mercato 2} \\ w_{Mercato 3} \\ w_{Mercato 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 33,44\% \\ 66,56\% \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tabella 3.16: Le stime elaborate dall'*asset manager*

Mercati	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi						
Mkt. 1	3,83%	1,25%	ρ	Mkt. 1	Mkt. 2	Mkt. 3	Mkt. 4	
Mkt. 2	5,00%	3,00%		Mkt. 1	1	0,90	0,20	0,10
Mkt. 3	14,01%	20,01%		Mkt. 2	0,90	1	0,40	0,30
Mkt. 4	7,50%	18,40%		Mkt. 3	0,20	0,40	1	0,75
				Mkt. 4	0,10	0,30	0,75	1

²⁹ Cfr. Mao e Särnal (1966), Fried (1970), Kalyon (1971), Frankfurter, Phillips e Siegle (1971).

³⁰ Nel paragrafo 5.3 si propongono delle misure numeriche in grado di quantificare la dimensione dell'*estimation error*.

Tale portafoglio, efficiente *ex-ante*, lo è concretamente solo nell'ipotesi in cui i parametri di input siano perfetti stimatori delle variabili *unknown*. Ipotizziamo tuttavia che vi sia un *estimation error* e che i valori *true* siano quelli riportati nella Tabella 3.17.

Tabella 3.17: Le misure corrette

Mercati	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi
Mkt. 1	4,50%	1,00%
Mkt. 2	2,00%	4,00%
Mkt. 3	5,00%	22,00%
Mkt. 4	12,50%	18,00%

ρ	Mkt. 1	Mkt. 2	Mkt. 3	Mkt. 4
Mkt. 1	1	0,80	0,30	0,20
Mkt. 2	0,80	1	0,30	0,40
Mkt. 3	0,30	0,30	1	0,80
Mkt. 4	0,20	0,40	0,80	1

In un contesto di questo tipo i valori di rischio (13,75%) e rendimento (11,00%) attesi del portafoglio efficiente sono errati, in quanto le misure corrette sono rispettivamente:

$$E(R)_{True} = [4,50\% \quad 2,00\% \quad 5,00\% \quad 11,00\%] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 33,44\% \\ 66,56\% \\ 0 \end{bmatrix} = 4,00\%$$

$$\sigma_{True} = \sqrt{[0 \quad 33,44\% \quad 66,56\% \quad 0] \times \begin{bmatrix} 0,0001 & 0,0003 & 0,0007 & 0,0004 \\ 0,0003 & 0,0016 & 0,0026 & 0,0029 \\ 0,0007 & 0,0026 & 0,0484 & 0,0317 \\ 0,0004 & 0,0029 & 0,0317 & 0,0324 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 33,44\% \\ 66,56\% \\ 0 \end{bmatrix}} = 15,10\%$$

La Figura 3.9 mostra un confronto tra la distribuzione gaussiana attesa dei rendimenti del portafoglio e la distribuzione effettiva. La distribuzione *expected*, decisamente migliore di quella *true*, associa ai rendimenti positivi delle probabilità di manifestazione largamente superiori a quelle reali. Ad esempio, in ipotesi di distribuzione gaussiana con funzione di densità $n(x; \mu_x; \sigma_x)$, la probabilità di conseguire un risultato pari o superiore al rendimento target dell'11%, non è del 50% (valore suggerito dalle stime erratiche), bensì minore³¹:

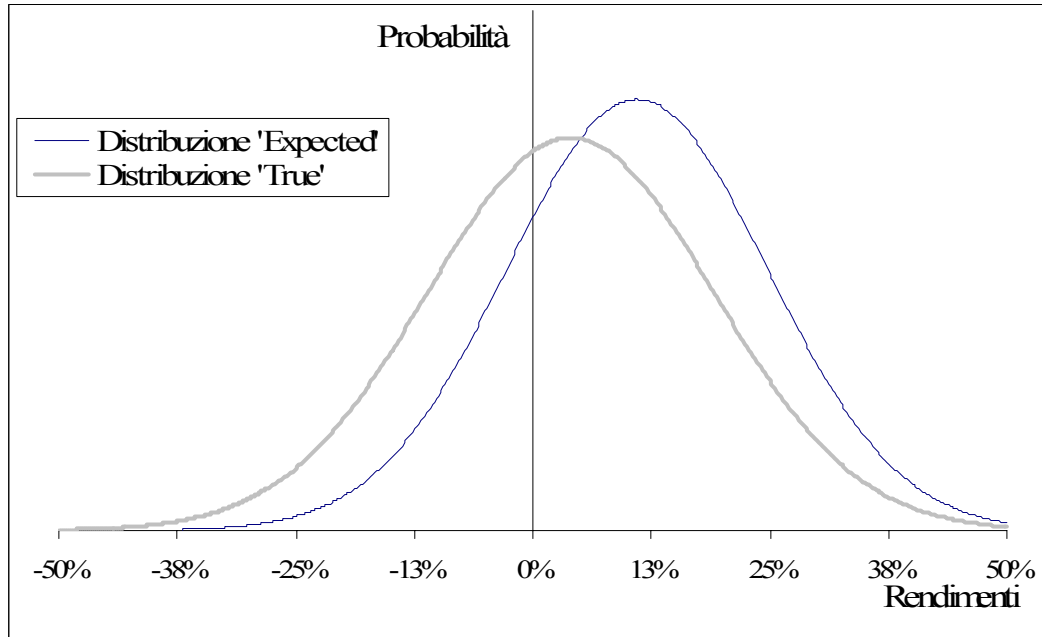
³¹ Alternativamente, possiamo scrivere che:

$$\Pr(x \geq 11\%) = 32,14\%.$$

con $x \sim N(4\%; 15,1\%)$.

$$(3.29) \quad \int_{11\%}^{+\infty} n(x; 4\%; 15,1\%) dx = \int_{11\%}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 15,1\%} e^{-\frac{(x-4\%)^2}{2 \cdot 15,1\%^2}} dx = 32,14\%$$

Figura 3.9: Confronto tra la distribuzione *expected* e quella *true* dei rendimenti annuali del portafoglio



Inoltre, l'*estimation error* conduce ad una composizione di portafoglio sub-ottimale, poiché, utilizzando le stime corrette, il portafoglio con rendimento atteso annuo pari all'11% e rischio minimo ha una composizione pari a:

$$W_{Opt}^{True} = \begin{bmatrix} w_{Mercato 1} \\ w_{Mercato 2} \\ w_{Mercato 3} \\ w_{Mercato 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18,75\% \\ 0 \\ 0 \\ 81,25\% \end{bmatrix}$$

La distanza euclidea tra il portafoglio efficiente *true* e quello stimato è 1,12. Al tal proposito, Brandt (1995) scrive: «*Estimated portfolio weights inherit the estimation error of the parameter estimates and therefore are almost certainly different from the true optimal weights*».

In sintesi, gli errori commessi nella stima degli *input* possono produrre due effetti preoccupanti:

- a. da un lato, associano ai portafogli selezionati delle distribuzioni di rendimento attese

- che possono discostarsi sensibilmente dalla distribuzione corretta (in tal modo l'investitore fa delle assunzioni errate circa la performance futura del portafoglio);
- b. dall'altro, conducono alla identificazione di portafogli che, valutati sulla base dei *true parameter*, appaiono inefficienti.

Queste conseguenze negative sono trascurabili solo nell'ipotesi in cui i parametri siano perfetti stimatori. Tuttavia, l'ipotesi di assenza di errori di stima non è plausibile e, conseguentemente, non è saggio implementare un modello di *asset allocation* che ignori il fenomeno dell'*estimation error*.

Esiste ormai una corposa letteratura economica³² che nell'arco di mezzo secolo ha affrontato il tema dell'*estimation error*, sottolineando spesso come l'ottimizzazione di Markowitz rappresenti una procedura di ottimizzazione particolarmente esposta agli errori nella stima dei parametri. Tuttavia, questo problema non rappresenta una peculiarità del modello di Markowitz, poiché qualsiasi portafoglio (a prescindere dalla metodologia utilizzata per la sua costruzione) composto da investimenti aleatori è esposto agli errori di stima. Il modello di Markowitz presenta tuttavia delle caratteristiche che lo rendono particolarmente esposto a tale problema. Lo scopo delle pagine successive è quello di riproporre alcuni esperimenti utili al fine di indagare il problema in esame nell'ambito del *mean-variance framework*.

3.5.1 L'esperimento di Jobson e Korkie (1980)

Gli Autori, nell'articolo pubblicato sul *Journal of the American Statistical Association*, pongono la propria attenzione sulla produzione di stime adeguate ai fini dell'implementazione di una ottimizzazione media varianza: «*A major problem, which belies the implementation of this normative theory of portfolio analysis, is the formation of rational expectation regarding the mean-return premium vector and the covariance matrix that is appropriate for the investor's holding period*». Ipotizzando che i rendimenti degli asset siano variabili casuali con distribuzioni normali e stazionarie, essi identificano nella *classical rule* il modello di stima dei parametri di input; in pratica si assume che gli *asset manager* producano degli stimatori campionari sulla base di un campione storico di osservazioni di dimensione N. Dati questi presupposti teorici,

³² Oltre ai lavori già menzionati, cfr: Barry (1974, 1975, 1978), Dickenson J.P. (1974a, 1974b), Klein e Bawa (1975,1977), Bawa, Brown e Klein (1979), Jobson e Korkie (1980, 1981a), Michaud (1989,1998), Jorion (1985, 1992), Britten-Jones (1999).

replichiamo con qualche grado di libertà l'esperimento condotto da Jobson e Korkie.

Prendiamo in considerazione le 8 asset class (nonché gli 8 benchmark associati ad esse) riportate nella Tabella 3.18.

Tabella 3.18: Mercati e Benchmark selezionati

Mercati	Indici di Mercato
Monetario area Euro	I. Mkt. 1 = JPM Euro Cash 3M - Tot Return Ind
Obbligazionario Area Euro	I. Mkt. 2 = CGBI WGBI EMU All Mats. - Tot Return Ind
Obbligazionario Internazionale	I. Mkt. 3 = CGBI WGBI BD All Mats - Tot Return Ind
Azionario Europa	I. Mkt. 4 = MSCI Europe - Gross Index
Azionario Nord America	I. Mkt. 5 = MSCI North America - Gross Index
Azionario Giappone	I. Mkt. 6 = MSCI Japan - Gross Index
Azionario Pacifico con esclusione del Giappone	I. Mkt. 7 = MSCI Pacific free ex Japan - Gross Index
Azionario Paesi Emergenti	I. Mkt. 8 = MSCI EM (Emerging Markets) - Gross Index

Sulla base di un orizzonte temporale di 19 anni (Gennaio 1988 - Dicembre 2006), si estrapolano le stime campionarie (per un orizzonte temporale annuale) riportate nella Tabella 3.19. Ipotizziamo che questi parametri siano corretti, ovvero che essi permettano di identificare, senza errori, la distribuzione dei rendimenti annuali dei portafogli.

Tabella 3.19: Le stime *true*

Indici di Mercato	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi
I. Mkt. 1	5,83%	3,09%
I. Mkt. 2	6,48%	5,31%
I. Mkt. 3	6,86%	8,56%
I. Mkt. 4	13,64%	20,41%
I. Mkt. 5	13,97%	22,05%
I. Mkt. 6	4,85%	31,57%
I. Mkt. 7	15,15%	31,59%
I. Mkt. 8	20,58%	38,72%

Correlazioni	I. Mkt. 1	I. Mkt. 2	I. Mkt. 3	I. Mkt. 4	I. Mkt. 5	I. Mkt. 6	I. Mkt. 7	I. Mkt. 8
I. Mkt. 1	1	0,28	0,28	-0,11	0,03	-0,24	0,08	0,11
I. Mkt. 2	0,28	1	0,56	-0,01	0,06	-0,28	0,12	-0,15
I. Mkt. 3	0,28	0,56	1	0,54	0,64	0,33	0,54	0,44
I. Mkt. 4	-0,11	-0,01	0,54	1	0,90	0,62	0,62	0,63
I. Mkt. 5	0,03	0,06	0,64	0,90	1	0,53	0,46	0,54
I. Mkt. 6	-0,24	-0,28	0,33	0,62	0,53	1	0,74	0,79
I. Mkt. 7	0,08	0,12	0,54	0,62	0,46	0,74	1	0,89
I. Mkt. 8	0,11	-0,15	0,44	0,63	0,54	0,79	0,89	1

Sulla base di questi parametri si provvede a “lanciare” una ottimizzazione che,

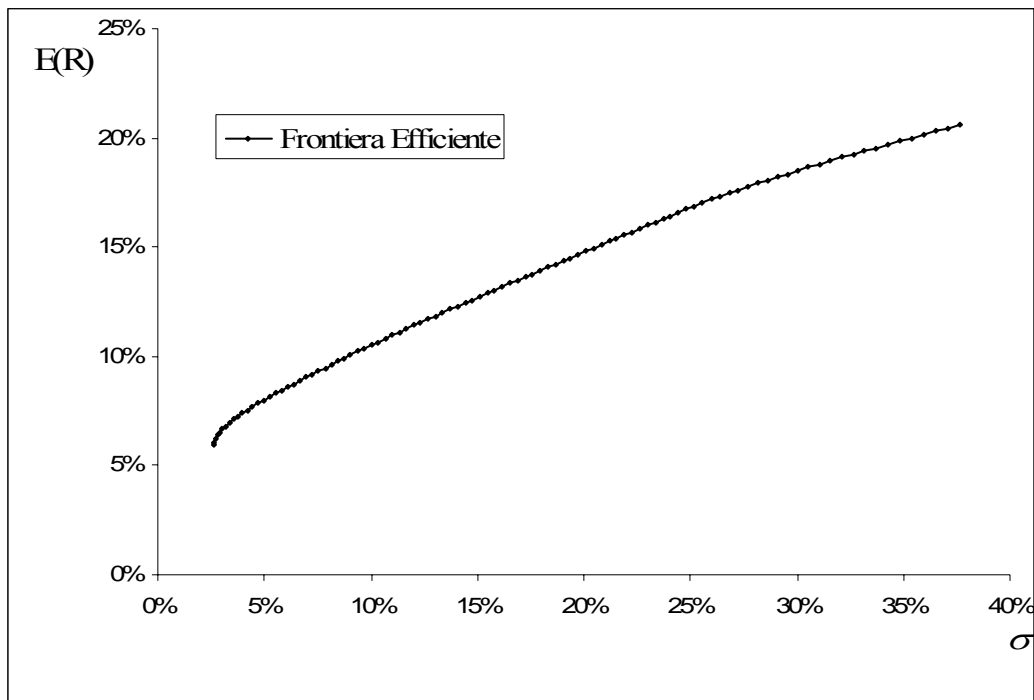
coerentemente con le ipotesi di assenza di *short selling*, restituisce una frontiera efficiente costituita da 100 portafogli, la cui composizione è riportata graficamente nella Figura 3.10. Questa frontiera viene denominata *true*, poiché le sue combinazioni $[\sigma_{\text{opt}}; E(R)_{\text{opt}}]$ sono realmente ottimali.

L'obiettivo che si intende perseguire consiste nel valutare quanto siano veritieri le combinazioni $[\sigma; E(R)]$ "promesse" *ex-ante* dai portafogli efficienti ottenuti attraverso stimatori campionari; infatti, qualora con la *classical rule* si commettano errori nella stima dei parametri, ossia gli stimatori si allontanino dai parametri *true* della tabella 3.18, l'ottimizzazione ci indurrebbe a selezionare dei portafogli che, difforni da quelli realmente efficienti, si caratterizzerebbero per combinazioni rendimento-rischio inefficienti se misurate sulla base dei veri parametri. Allo scopo di valutare il grado di affidabilità delle stime campionarie, si ricorre ad un approccio simulativo. Più nello specifico, si sviluppa il seguente esperimento:

1. in base alle variabili di input *true*, si simula mediante la tecnica Monte Carlo una serie di N rendimenti annuali per ciascuna delle 8 asset class³³; in tal modo si ipotizza che le stime siano estrapolate da un campione di N rendimenti annuali;
2. utilizzando questo campione simulato, si calcola un set di input campionari $[E(R)_{\text{sim}}, \sigma_{\text{sim}} \text{ e } \rho_{\text{sim}}]$; questi parametri sono soggetti all'*estimation error*, ovvero al rischio di non replicare i veri input;
3. dati i parametri $[E(R)_{\text{sim}}, \sigma_{\text{sim}} \text{ e } \rho_{\text{sim}}]$, si provvede ad effettuare una ottimizzazione media-varianza, la quale identifica altri 100 portafogli; in presenza di errori nelle stime campionarie, l'ottimizzazione restituirà portafogli la cui composizione si discosta dalla composizione dei portafogli realmente efficienti;
4. nota la composizione dei portafogli giudicati ottimali sulla base delle misure campionarie, si determinano le combinazioni $[\sigma_{\text{true}}; E(R)_{\text{true}}]$ che ciascun portafoglio avrebbe conseguito sulla base dei veri input;
5. l'intero processo viene ripetuto 1.000 volte.

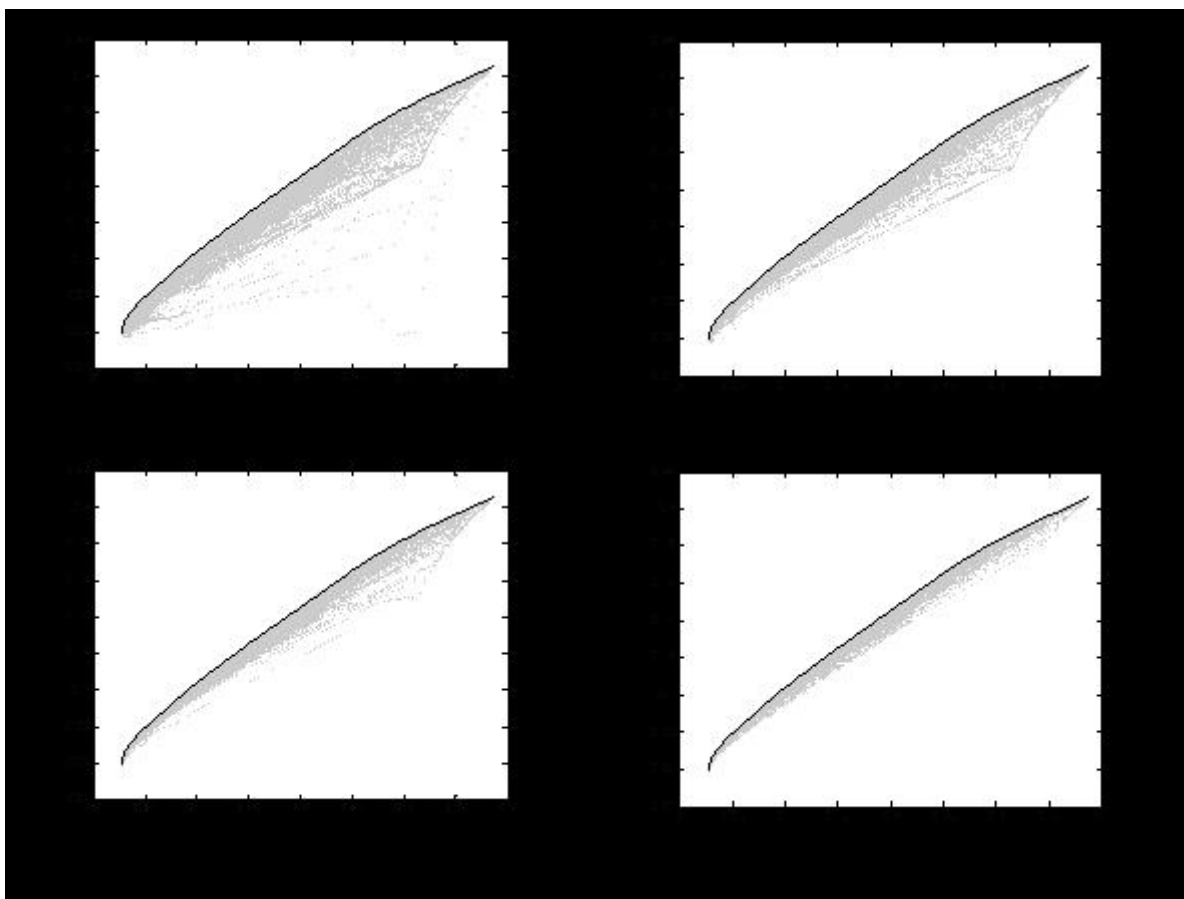
Figura 3.10: La frontiera efficiente *true*

³³ Le simulazioni Monte Carlo hanno la qualità di simulare delle serie di rendimenti che incorporano i parametri utilizzati come *input*. Coerentemente con le ipotesi di partenza, la simulazione qui effettuata assume che i rendimenti annuali delle singole *asset class* si distribuiscano normalmente..



A conclusione dell'esperimento si dispone delle combinazioni $[\sigma_{\text{true}}; E(R)_{\text{true}}]$ dei 100.000 portafogli stimati sulla base delle stime campionarie ottenute attraverso le 1.000 simulazioni Monte Carlo. La Figura 3.11 offre una rappresentazione grafica di quanto queste combinazioni si discostino dalla frontiera *true* (la linea continua più in alto), nel caso in cui le stime campionarie siano estrapolate da campioni di ampiezza N pari a 19, 50, 100 e 150. Quanto più l'area grigia si allontana dalla linea nera (in alto), tanto più i portafogli "figli" delle stime campionarie ottengono combinazioni rischio-rendimento peggiori dei portafogli conseguiti ottimizzando le stime esatte. Un'area grigia più ampia è quindi sintomo di impoverimento della qualità dei portafogli campionari.

Figura 3.11: Confronto tra le combinazioni $[\sigma_{\text{opt}}; E(R)_{\text{opt}}]$ dei portafogli realmente efficienti e quelle $[\sigma_{\text{true}}; E(R)_{\text{true}}]$ dei portafogli estrapolati dalle stime campionarie.



Si noti come lo scostamento dalla frontiera efficiente *true* delle combinazioni rendimento-rischio ottenute con le stime campionarie differisca a seconda della ampiezza del campione utilizzato : la dimensione dell'*estimation error* ha quindi influenzato la qualità dei portafogli. Come è lecito attendersi, l'incremento dell'ampiezza campionaria contribuisce a ridurre la distanza tra le combinazioni $[\sigma_{\text{opt}}; E(R)_{\text{opt}}]$ e $[\sigma_{\text{true}}; E(R)_{\text{true}}]$. Infatti, all'aumentare di N , gli stimatori dei parametri $E(R)$, σ e ρ tendono asintoticamente ai valori *true*, minimizzando così l'*estimation error*.

Allo scopo di esprimere in termini più evidenti gli effetti riconducibili agli errori impliciti nelle stime, si ricorre ad un approfondimento basato sulla definizione di un criterio di selezione del portafoglio ottimale. Ipotizziamo che un investitore sia interessato alla selezione del portafoglio che minimizza la probabilità di conseguire un rendimento inferiore a zero:

$$(3.30) \quad \text{Min} \quad \Pr(R < 0)$$

Coerentemente con l'ipotesi di distribuzione normale, il portafoglio efficiente che

minimizza questa probabilità è quello che massimizza il rapporto $[E(R)/\sigma]$ ³⁴. Considerata la frontiera efficiente *true*, il portafoglio che massimizza le preferenze dell'investitore è il seguente:

$$W_{Opt} = \begin{bmatrix} w_{\text{Monetario area Euro}} \\ w_{\text{Obbligazionario Area Euro}} \\ w_{\text{Obbligazionario Internazionale}} \\ w_{\text{Azionario Europa}} \\ w_{\text{Azionario Nord America}} \\ w_{\text{Azionario Giappone}} \\ w_{\text{Azionario Pacifico con esclusione del Giappone}} \\ w_{\text{Azionario Paesi Emergenti}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74,7\% \\ 19,8\% \\ 0 \\ 3,6\% \\ 0 \\ 1,9\% \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il rendimento e il rischio attesi del portafoglio sono rispettivamente pari a al 6,22% e al 2,80%. Il rapporto $[E(R)/\sigma]$ massimo è quindi pari a:

$$\frac{E(R)}{\sigma} = \frac{6,22\%}{2,80\%} = 2,223$$

Questo valore corrisponde ad una probabilità di conseguire un rendimento inferiore a zero pari a³⁵:

$$(3.31) \quad \int_{-\infty}^0 n(x; 6,22\%; 2,80\%) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2,80\%} e^{-\left[\frac{(x-6,22\%)^2}{2 \cdot 2,80\%^2}\right]} = 1,316\%$$

Allo scopo di mostrare gli effetti che l'errore di stima può produrre sui risultati conseguiti da un investitore interessato a minimizzare la *shortfall probability* rispetto ad una soglia pari a zero, si propone un esperimento simile a quello svolto precedentemente:

1. in base alle variabili di input *true*, si simula mediante la tecnica Monte Carlo una serie di N rendimenti annuali per ciascuna delle 8 asset class; in tal modo si ipotizza che le stime siano estrapolate da un campione di N rendimenti annuali;
2. utilizzando questo campione simulato, si calcola un set di input campionari $[E(R)_{sim}, \sigma_{sim} \text{ e } \rho_{sim}]$; questi parametri sono soggetti all'*estimation error*, ovvero al rischio di non replicare i veri input;

³⁴ A tal proposito, si veda il paragrafo 2.7.

³⁵ Alternativamente, possiamo scrivere che:

$$\Pr(x < 0) = 1,316\%$$

con $x \sim N(6,22\%; 2,80\%)$.

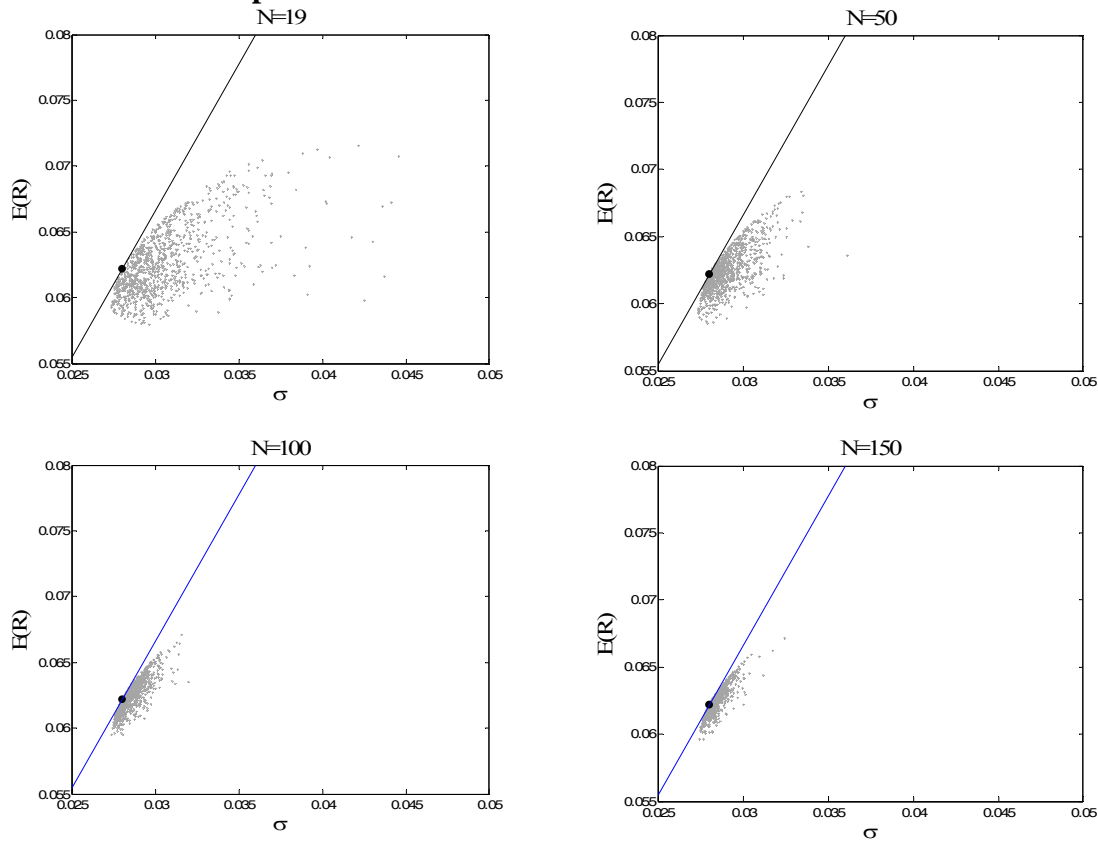
3. dati i parametri $[E(R)_{sim}, \sigma_{sim} \text{ e } \rho_{sim}]$, si provvede ad effettuare una ottimizzazione media-varianza, la quale identifica altri 100 portafogli; in presenza di errori nelle stime campionarie, l'ottimizzazione restituirà portafogli la cui composizione si discosta dalla composizione dei portafogli realmente efficienti;
4. si identifica il portafoglio che massimizza il rapporto $[E(R)/\sigma]$;
5. data la composizione del portafoglio preferibile per l'investitore, si determina la combinazione $[\sigma_{true}; E(R)_{true}]$ che questo portafoglio avrebbe conseguito sulla base dei veri input;
6. l'intero processo viene ripetuto 1.000 volte.

A conclusione di questo iter si dispone delle 1.000 combinazioni $[\sigma_{true}; E(R)_{true}]$ che l'investitore avrebbe conseguito sulla base delle stime campionarie ottenute attraverso le simulazioni. La Figura 3.12 offre una rappresentazione grafica di quanto queste combinazioni si discostino dalla combinazione rendimento rischio *true*, nel caso in cui le stime campionarie siano estrapolate da campioni sempre di ampiezza 19, 50, 100 e 150. La retta raffigurata identifica le combinazioni rendimento-rischio in grado di conseguire il rapporto $[E(R)/\sigma]$ massimo, pari a 2,223³⁶. Quanto più i singoli punti si discostano da questa retta, tanto più le combinazioni rendimento-rischio dei 1.000 portafogli riconducibili alle stime campionarie vedono ridursi la loro qualità, aumentando la probabilità di conseguire rendimenti inferiori a zero. Un'area grigia più ampia, identificando la presenza di un numero maggiore di portafogli campionari caratterizzati da un rapporto rendimento/rischio più basso, è quinti sintomo di una riduzione della qualità media dei portafogli, la quale aumenta all'aumentare dell'ampiezza campionaria. Come è lecito attendersi, al crescere di N le combinazioni $[\sigma_{true}; E(R)_{true}]$ vedono ridursi la distanza dalla retta (l'area grigia si restringe).

Infine, nella Figura 3.13 si rappresentano degli istogrammi che mostrano la distribuzione discreta delle probabilità di *shortfall* (data la soglia zero) dei portafogli corrispondenti ai 4 diversi valori di N. Si noti come al crescere della dimensione del campione si riduca la possibilità che la *shortfall probability* assuma valori significativamente inferiori al valore massimo pari all'1,31%.

³⁶ Questa retta passa chiaramente per il punto con coordinate (2,80%;6,22%), ovvero per la combinazione rendimento-rischio ottimale che sarebbe stata identificata ricorrendo ai parametri corretti.

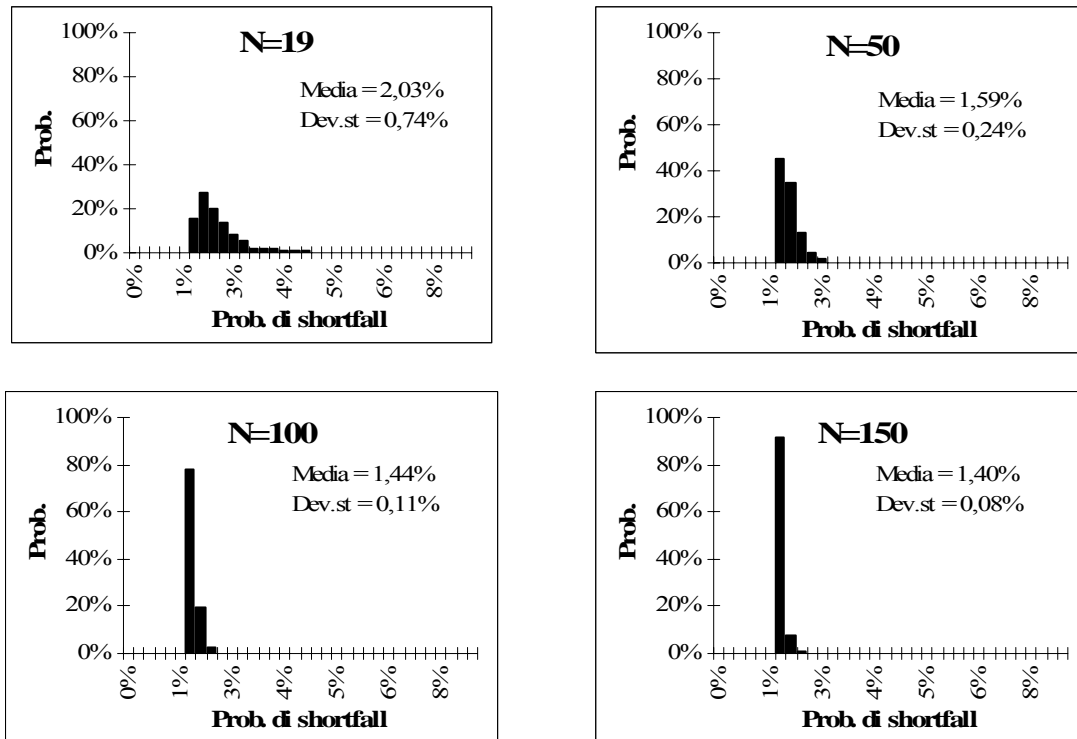
Figura 3.12: Le combinazioni $[\sigma_{\text{true}}; E(R)_{\text{true}}]$ dei portafogli estrapolati dalle stime campionarie.



Passando ai risvolti operativi suggeriti da questa analisi, occorre rilevare che quando l'orizzonte temporale di investimento è elevato, le dimensioni campionarie pari a 100 e 150 - per le quali gli effetti negativi degli errori di stima sono decisamente minori - non appaiono significative su un piano pratico, poiché non esistono serie storiche di indici di mercato che permettano di estrapolare campioni di rendimenti di tale dimensione. Conseguentemente, la qualità dei portafogli originati da campioni simulati di ampiezza 19 e 50 è senza dubbio una proxy più attendibile dei pericoli concreti che si celano dietro l'utilizzo della *classical rule* nelle scelte di asset allocation per orizzonti temporali di ampiezza pari o superiore ad 1 anno. E purtroppo per queste dimensioni campionarie l'*estimation error* è foriero di una significativa perdita di efficienza: le combinazioni $[\sigma_{\text{true}}; E(R)_{\text{true}}]$ dei portafogli sono estremamente volatili e,

in media, di qualità inferiore a quelle *true*.

Figura 3.13: Distribuzione delle misure di *shortfall probability* (soglia pari a zero)



3.5.2 L'esperimento di Frankfurter, Phillips e Seagle (1971)

Questo lavoro, pubblicato sul *Journal of Financial and Quantitative Analysis* e cronologicamente precedente rispetto a quello di Jobson e Korkie, offre degli spunti che completano l'analisi già svolta. Infatti, se gli esperimenti visti sin qui muovono dei seri dubbi circa i pericoli che si celano dietro un modello che ignora il problema dell'errore di stima, il lavoro di Frankfurter et al., proponendo un confronto tra portafogli efficienti e portafogli *random*, amplifica le perplessità che accompagnano il principio media-varianza.

Prendiamo in considerazione 3 asset class i cui input *true* relativi ad un orizzonte temporale annuale sono riportati nella Tabella 3.20. L'assunto che questi parametri siano corretti ci permette di identificare, senza errori, la distribuzione dei rendimenti annuali dei portafogli.

Tabella 3.20: Le stime *true*

Asset	$E(R)$	σ	ρ			
Asset 1	3,83%	1,25%	Asset 1	Asset 2	Asset 3	
Asset 2	5,00%	3,00%	Asset 1	1	-0,06	0,30
Asset 3	14,01%	20,01%	Asset 2	-0,06	1	0,00
			Asset 3	0,30	0,00	1

Limitando l'analisi ad un sottoinsieme (significativo) dei portafogli fattibili, si procede alla costruzione dei portafogli attribuendo i pesi agli asset secondo questo criterio³⁷:

$$(3.32) \quad \sum_{i=1}^3 w_i = 1$$

$$w_i = 0,1 \cdot Num_{Intero} \quad \text{con } Num_{Intero} \in [0;10]$$

Identifichiamo così un sottoinsieme di 66 portafogli che si distribuiscono in modo uniforme nello spazio delle possibili soluzioni. Noti i parametri *true* e le composizioni dei portafogli, è possibile stimare le 66 combinazioni $[\sigma_{true}; E(R)_{true}]$ non soggette ad errore di stima. Queste misure sono state riportate nella Figura 3.14, avendo cura di distinguere tra combinazioni efficienti e non³⁸. Se in assenza di errori di stima è possibile discriminare perfettamente tra gli investimenti efficienti e quelli dominati, in presenza di stime campionarie subentra il rischio che un portafoglio definito efficiente sulla base delle stime non lo sia concretamente. Analogamente è possibile che un portafoglio giudicato dominato sulla base delle stime campionarie, sia in realtà efficiente. Replicando l'esperimento di Frankfurter et al., il nostro scopo è indagare in che misura sia possibile fidarsi di un portafoglio definito efficiente sulla base di stime campionarie, preferendolo ad un portafoglio *random*. A tale scopo, sotto l'ipotesi che i rendimenti degli asset siano variabili casuali con distribuzioni normali e stazionarie, si propone il seguente test:

1. in base alle variabili di input *true*, si simula mediante la tecnica Monte Carlo una serie di N rendimenti annuali per ciascuna delle 3 asset class;
2. utilizzando questo campione simulato, si calcola un set di input campionari $[E(R)_{sim}, \sigma_{sim} \text{ e } \rho_{sim}]$; questi parametri sono soggetti all'*estimation error*, ovvero al rischio di non replicare i veri input;

³⁷ Il peso dell'attività *i.esima* è:

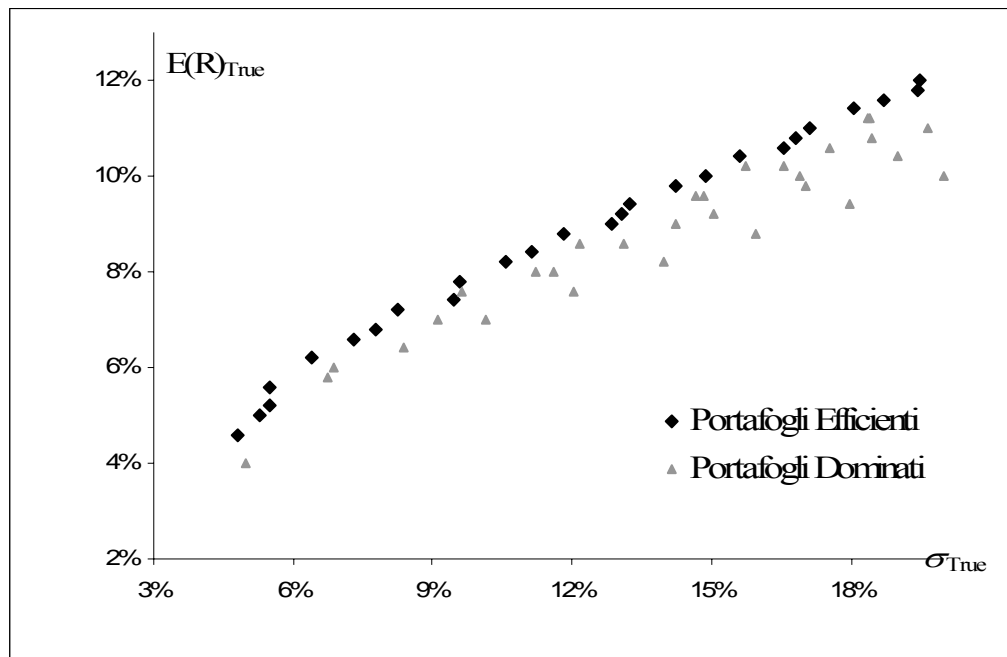
- compreso tra 0 ed 1;
- un multiplo di 0,1.

In tal modo i pesi possono assumere solo 11 valori: 0; 0,1; 0,2; 0,3; ... ; 0,9 ; 1,0.

³⁸ I portafogli efficienti sono 31; quelli dominati 35.

3. dati i parametri $[E(R)_{sim}, \sigma_{sim} \text{ e } \rho_{sim}]$, si provvede a calcolare il rendimento atteso ed il rischio dei 66 portafogli; in presenza di errori nelle stime campionarie, le combinazioni rischio rendimento stimate divergeranno da quelle corrette;
4. sulla base del principio media-varianza si identificano i portafogli efficienti e quelli dominati;
5. l'intero processo viene ripetuto 1.000 volte.

Figura 3.14: Le combinazioni rendimento rischio *true*



A conclusione dell'esperimento è possibile stabilire in che misura le stime campionarie producano errori di classificazione dei portafogli. In particolare, l'*estimation error* può produrre due conseguenze negative:

- giudicare efficienti portafogli che sono in realtà dominati;
- giudicare dominati portafogli che, sulla base dei parametri *true*, sono efficienti.

Nelle Tabelle 3.21, 3.22 e 3.23 si mostra, per valori di N pari a 10, 20 e 50, in che percentuale delle simulazioni ogni portafoglio viene considerato efficiente. I primi 31 portafogli - accompagnati dall'asterisco – sono quelli realmente efficienti. Si noti che molti dei portafogli inefficienti, se valutati sulla base dei dati campionari, vengono erroneamente classificati come inefficienti. Ad esempio il portafoglio 34, nel caso di stime campionarie estrapolate da serie di ampiezza $N=10$, viene considerato efficiente

nel 42,8% delle simulazioni; questa percentuale è più alta di quella mostrata da molti portafogli realmente efficienti.

Tabella 3.21: Percentuale delle simulazioni in cui ogni portafoglio viene considerato efficiente (N=10)

Portafogli	Composizione			% Efficienza	Portafogli	Composizione			% Efficienza
1*	0%	0%	100%	64,8%	34	0%	80%	20%	42,8%
2*	0%	90%	10%	48,2%	35	0%	100%	0%	36,3%
3*	10%	0%	90%	50,6%	36	10%	10%	80%	27,9%
4*	10%	70%	20%	43,8%	37	10%	40%	50%	28,4%
5*	10%	80%	10%	56,3%	38	10%	50%	40%	31,0%
6*	10%	90%	0%	54,4%	39	10%	60%	30%	35,6%
7*	20%	0%	80%	45,3%	40	20%	10%	70%	26,7%
8*	20%	40%	40%	29,4%	41	20%	20%	60%	25,4%
9*	20%	50%	30%	35,1%	42	20%	30%	50%	27,0%
10*	20%	60%	20%	43,1%	43	30%	70%	0%	36,0%
11*	20%	70%	10%	50,4%	44	60%	20%	20%	23,7%
12*	20%	80%	0%	46,7%	45	70%	0%	30%	24,3%
13*	30%	0%	70%	38,6%	46	70%	10%	20%	21,2%
14*	30%	10%	60%	23,8%	47	0%	50%	50%	37,1%
15*	30%	20%	50%	23,4%	48	0%	60%	40%	38,2%
16*	30%	30%	40%	27,0%	49	10%	20%	70%	25,9%
17*	30%	40%	30%	30,7%	50	10%	30%	60%	26,1%
18*	30%	50%	20%	34,9%	51	50%	40%	10%	27,5%
19*	30%	60%	10%	39,2%	52	0%	20%	80%	36,7%
20*	40%	0%	60%	33,4%	53	40%	60%	0%	32,3%
21*	40%	10%	50%	22,7%	54	60%	30%	10%	23,7%
22*	40%	20%	40%	24,2%	55	50%	50%	0%	29,8%
23*	40%	30%	30%	27,7%	56	80%	0%	20%	22,1%
24*	40%	40%	20%	30,1%	57	0%	40%	60%	36,5%
25*	40%	50%	10%	32,2%	58	70%	20%	10%	22,7%
26*	50%	0%	50%	29,7%	59	0%	30%	70%	36,1%
27*	50%	10%	40%	23,4%	60	60%	40%	0%	27,8%
28*	50%	20%	30%	25,5%	61	80%	10%	10%	20,9%
29*	50%	30%	20%	27,3%	62	70%	30%	0%	27,0%
30*	60%	0%	40%	26,1%	63	90%	0%	10%	24,7%
31*	60%	10%	30%	23,2%	64	80%	20%	0%	26,1%
32	0%	10%	90%	39,6%	65	90%	10%	0%	25,8%
33	0%	70%	30%	39,8%	66	100%	0%	0%	32,8%

Per quanto l'errore tenda a ridursi al crescere dell'ampiezza del campione dal quale estrapoliamo le stime, gli errori di valutazione rimangono elevati anche in presenza di ampiezze significative. Ad esempio, nel caso di $N=50$ ³⁹ ben 5 portafogli dominati continuano ad essere classificati come efficienti in più del 36% delle simulazioni.

Dati i risultati, tutt'altro che confortanti, non stupisce la natura delle conclusioni tratte dagli Autori: *«The experimental results reported in this paper demonstrate that*

³⁹ Questa dimensione va giudicata elevata, in quanto equivarrebbe ad una serie storica di lunghezza pari a 50 anni.

this error is, potentially, of sufficient importance to bring into question the usefulness of models that ignore it. [...] Even in the grossly oversimplified world of this experiment, however, a mean-variance approach performed poorly».

Tabella 3.22: Percentuale delle simulazioni in cui ogni portafoglio viene considerato efficiente (N=20)

Portafogli	Composizione			% Efficienza	Portafogli	Composizione			% Efficienza
1*	0%	0%	100%	74,4%	34	0%	80%	20%	41,4%
2*	0%	90%	10%	49,2%	35	0%	100%	0%	32,3%
3*	10%	0%	90%	69,6%	36	10%	10%	80%	35,6%
4*	10%	70%	20%	58,4%	37	10%	40%	50%	34,4%
5*	10%	80%	10%	78,7%	38	10%	50%	40%	40,3%
6*	10%	90%	0%	74,9%	39	10%	60%	30%	47,4%
7*	20%	0%	80%	67,9%	40	20%	10%	70%	37,4%
8*	20%	40%	40%	45,9%	41	20%	20%	60%	36,9%
9*	20%	50%	30%	54,1%	42	20%	30%	50%	40,9%
10*	20%	60%	20%	64,0%	43	30%	70%	0%	35,3%
11*	20%	70%	10%	73,2%	44	60%	20%	20%	32,6%
12*	20%	80%	0%	55,2%	45	70%	0%	30%	32,6%
13*	30%	0%	70%	59,4%	46	70%	10%	20%	26,7%
14*	30%	10%	60%	36,1%	47	0%	50%	50%	30,3%
15*	30%	20%	50%	38,1%	48	0%	60%	40%	31,6%
16*	30%	30%	40%	44,0%	49	10%	20%	70%	29,2%
17*	30%	40%	30%	51,4%	50	10%	30%	60%	31,2%
18*	30%	50%	20%	54,1%	51	50%	40%	10%	32,9%
19*	30%	60%	10%	54,3%	52	0%	20%	80%	28,0%
20*	40%	0%	60%	52,7%	53	40%	60%	0%	28,9%
21*	40%	10%	50%	38,6%	54	60%	30%	10%	28,9%
22*	40%	20%	40%	43,8%	55	50%	50%	0%	25,3%
23*	40%	30%	30%	43,8%	56	80%	0%	20%	24,9%
24*	40%	40%	20%	43,5%	57	0%	40%	60%	27,8%
25*	40%	50%	10%	41,1%	58	70%	20%	10%	26,0%
26*	50%	0%	50%	44,9%	59	0%	30%	70%	27,4%
27*	50%	10%	40%	38,7%	60	60%	40%	0%	23,7%
28*	50%	20%	30%	37,5%	61	80%	10%	10%	24,0%
29*	50%	30%	20%	37,3%	62	70%	30%	0%	22,7%
30*	60%	0%	40%	37,6%	63	90%	0%	10%	24,5%
31*	60%	10%	30%	33,7%	64	80%	20%	0%	21,7%
32	0%	10%	90%	37,4%	65	90%	10%	0%	20,5%
33	0%	70%	30%	35,6%	66	100%	0%	0%	26,2%

Tabella 3.23: Percentuale delle simulazioni in cui ogni portafoglio viene considerato efficiente (N=50)

Portafogli	Composizione			% Efficienza	Portafogli	Composizione			% Efficienza
1*	0%	0%	100%	84,7%	34	0%	80%	20%	43,1%
2*	0%	90%	10%	58,4%	35	0%	100%	0%	24,0%
3*	10%	0%	90%	82,5%	36	10%	10%	80%	37,9%
4*	10%	70%	20%	74,6%	37	10%	40%	50%	37,8%
5*	10%	80%	10%	89,3%	38	10%	50%	40%	42,4%
6*	10%	90%	0%	88,5%	39	10%	60%	30%	55,5%
7*	20%	0%	80%	81,9%	40	20%	10%	70%	41,1%
8*	20%	40%	40%	58,3%	41	20%	20%	60%	42,1%
9*	20%	50%	30%	72,9%	42	20%	30%	50%	47,1%
10*	20%	60%	20%	79,4%	43	30%	70%	0%	22,8%
11*	20%	70%	10%	85,3%	44	60%	20%	20%	34,4%
12*	20%	80%	0%	50,3%	45	70%	0%	30%	34,7%
13*	30%	0%	70%	73,0%	46	70%	10%	20%	26,7%
14*	30%	10%	60%	41,8%	47	0%	50%	50%	28,9%
15*	30%	20%	50%	50,1%	48	0%	60%	40%	31,4%
16*	30%	30%	40%	58,3%	49	10%	20%	70%	31,7%
17*	30%	40%	30%	62,9%	50	10%	30%	60%	34,4%
18*	30%	50%	20%	64,6%	51	50%	40%	10%	28,0%
19*	30%	60%	10%	60,1%	52	0%	20%	80%	27,2%
20*	40%	0%	60%	63,9%	53	40%	60%	0%	17,7%
21*	40%	10%	50%	50,1%	54	60%	30%	10%	22,3%
22*	40%	20%	40%	54,6%	55	50%	50%	0%	15,0%
23*	40%	30%	30%	55,5%	56	80%	0%	20%	21,4%
24*	40%	40%	20%	52,1%	57	0%	40%	60%	26,8%
25*	40%	50%	10%	41,7%	58	70%	20%	10%	18,8%
26*	50%	0%	50%	55,3%	59	0%	30%	70%	25,7%
27*	50%	10%	40%	49,5%	60	60%	40%	0%	13,7%
28*	50%	20%	30%	48,2%	61	80%	10%	10%	16,5%
29*	50%	30%	20%	43,5%	62	70%	30%	0%	12,6%
30*	60%	0%	40%	45,5%	63	90%	0%	10%	16,2%
31*	60%	10%	30%	40,5%	64	80%	20%	0%	11,6%
32	0%	10%	90%	38,5%	65	90%	10%	0%	10,5%
33	0%	70%	30%	36,2%	66	100%	0%	0%	15,0%

Ciò che manca nel lavoro di Frankfurter et al. è un indicatore in grado di quantificare sinteticamente l'errore complessivo di classificazione. Il ricorso alle *contingency table* e ad alcuni indici sintetici, quali ad esempio la *Q di Yule*⁴⁰, permette di colmare questo vuoto.

Lo strumento più semplice e intuitivo utilizzabile allo scopo di valutare la capacità di discriminare tra portafogli efficienti e non efficienti è rappresentato dalla *contingency table* (un esempio numerico è riportato nella Tabella 3.24). Nel caso qui in esame, questo strumento permette di identificare il potere discriminante delle stime campionarie collocando, per ciascuna simulazione, i 66 portafogli all'interno di quattro quadranti:

⁴⁰ Cfr. Swets (1996).

- il 1° quadrante accoglie i portafogli *EE* che, valutati efficienti sulla base dei dati campionari, sono realmente tali;
- il 2° quadrante accoglie i portafogli *EI* che, valutati efficienti sulla base dei dati campionari, sono in realtà inefficienti (errore del I tipo);
- il 3° quadrante accoglie i portafogli *IE* che, valutati inefficienti sulla base dei dati campionari, sono in realtà efficienti (errore del II tipo);
- il 4° quadrante accoglie le osservazioni *II*, ovvero i portafogli valutati inefficienti che sono effettivamente tali.

Tabella 3.24: Esempio di *contingency table* per la classificazione dei 66 portafogli sulla base dei dati campionari

		VALUTAZIONE EFFETTIVA	
		Efficiente	Inefficiente
VALUTAZIONE IN BASE AI DATI CAMPIONARI	Efficiente	1° EE (=20) Valutazione corretta	2° EI (=15) Errore del 1° tipo
	Inefficiente	3° IE (=11) Errore di 2° tipo	4° II (=20) Valutazione corretta

I dati numerici riportati nella tabella 3.24 possono essere usati per estrapolare delle misure sintetiche⁴¹:

1. $EI + IE = 26$, numero complessivo di errori di classificazione;
2. $EI = 15$, numero complessivo di errori del 1° tipo;
3. $IE = 11$, numero complessivo di errori del 2° tipo;
4. $PC = \frac{(II + EE)}{(EI + EE + IE + II)} = \frac{(II + EE)}{(N)} = \frac{40}{66} = 60,6\%$, percentuale complessiva di portafogli correttamente classificati;
5. $PI = \frac{(EI + IE)}{(EI + EE + IE + II)} = \frac{(EI + IE)}{(N)} = \frac{26}{66} = 39,4\%$, percentuale complessiva di portafogli erroneamente classificati⁴²;

⁴¹ Cfr. Swets (1996).

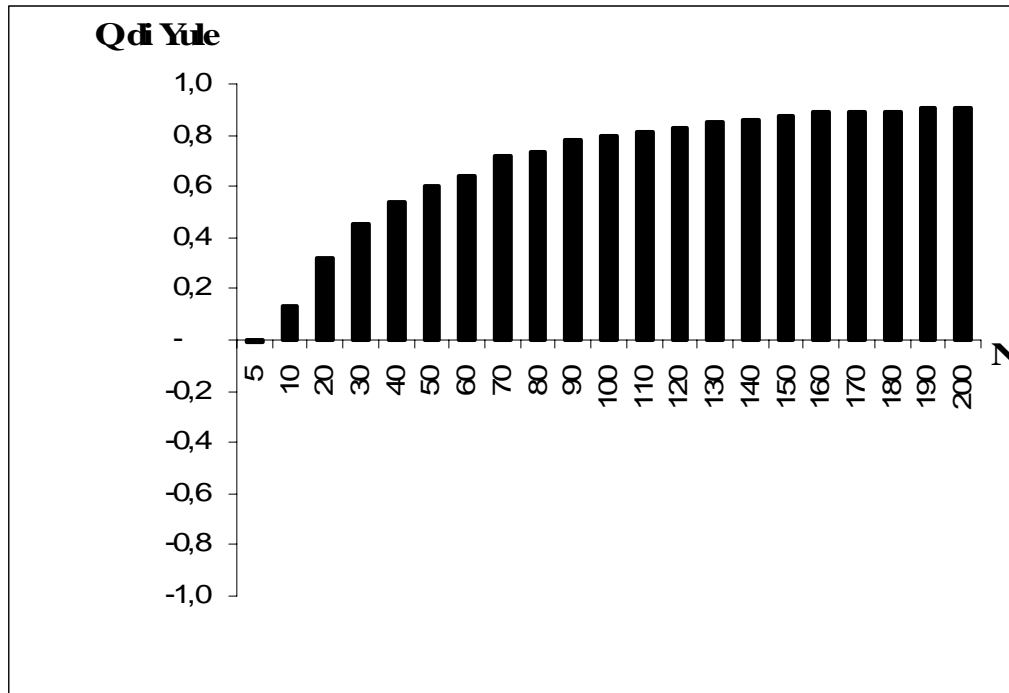
6. $SENS = \frac{(II)}{(II + EI)} = \frac{20}{35} = 57,1\%$, percentuale di portafogli inefficienti correttamente classificati (tale misura è nota con il termine di *sensitivity*);
7. $SPEC = \frac{(EE)}{(EE + IE)} = \frac{20}{31} = 64,5\%$, percentuale di portafogli efficienti correttamente classificati (tale misura è nota con il termine di *specificity*);
8. $E_\alpha = \frac{(EI)}{(EI + II)} = 1 - SENS = \frac{15}{35} = 42,9\%$, la percentuale con cui un portafoglio inefficiente è erroneamente stimato efficiente (tale misura rappresenta una espressione percentuale dell'errore di 1° tipo ed è anche nota con il termine di “errore α ”);
9. $E_\beta = \frac{(IE)}{(IE + EE)} = 1 - SPEC = \frac{11}{31} = 35,5\%$, la percentuale con cui un portafoglio efficiente è erroneamente stimato inefficiente (tale misura rappresenta una espressione percentuale dell'errore di 2° tipo ed è anche nota con il termine di “errore β ”).
10. $Q = \frac{(SENS - E_\beta)}{(SENS - 2 \cdot E_\beta \cdot SENS + E_\beta)} = \frac{91,15\%}{91,53\%} = 0,416$, la Q di Yule, pur non distinguendo tra errori di 1° e 2° tipo, rappresenta un buon indicatore della capacità di effettuare classificazioni corrette. L'indicatore è compreso tra i valori di +1 e -1; valori numerici decrescenti indicano una riduzione del potere discriminante del modello.

Identificando nella Q di Yule uno strumento efficace al fine di misurare la capacità discriminante delle stime campionarie, nella Figura 3.15 vengono riportati, per valori crescenti di N , i livelli medi assunti da questo indicatore nelle 1.000 simulazioni Monte Carlo. Si noti come al crescere della dimensione campionaria il valore medio della Q di Yule si avvicini al valore unitario. In ogni caso, per valori bassi di N (ovvero per stime campionarie estratte da un campione di ridotte dimensioni) il valore assunto dal parametro in esame riflette un basso potere di classificazione tra portafogli efficienti e non. I riflessi operativi di questa evidenza sono preoccupanti: in presenza di ampi

⁴² Le misure riportate nei punti 4 e 5 (PC e PI), pur se ampiamente usate per tale scopo, non possono essere adoperate per confrontare modelli testati su diversi campioni. L'incomparabilità dipende dal fatto che i valori assunti da questi indicatori sono condizionati dalla struttura del campione e, in modo particolare, dal peso assunto dai casi di *default*. Sull'argomento si veda Lehmann (2003).

orizzonti temporali il campione di rendimenti ha dimensioni ridotte ed è quindi forte la probabilità che si manifestino degli errori di classificazione.

Figura 3.15: I valori medi assunti dalla Q di Yule per diversi valori di N.



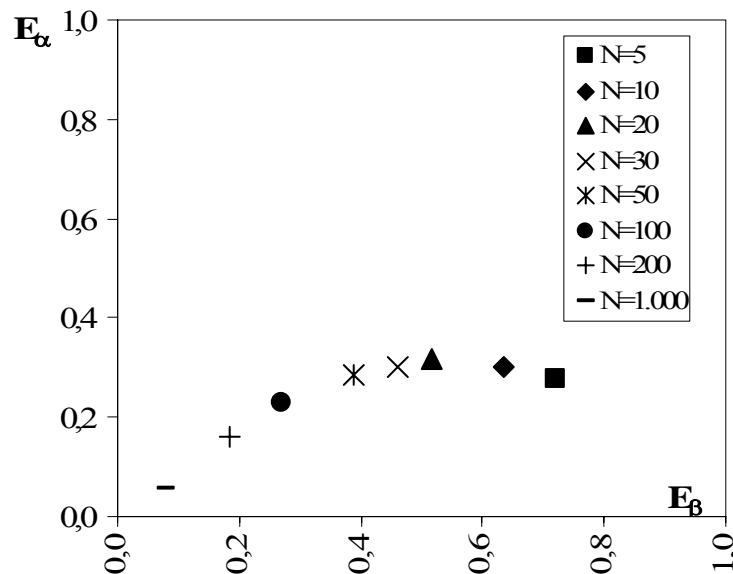
Al fine di approfondire l'analisi degli errori, distinguendo tra errori del primo e del secondo tipo, è possibile ricorrere ad una ulteriore rappresentazione grafica (Figura 3.16) ottenuta mediante il seguente procedimento:

1. identificati i 66 portafogli fattibili, attraverso i *true parameter* (Tabella 3.20) vengono identificati i 31 portafogli efficienti e i 35 dominati;
2. fissata la dimensione N delle serie campionarie, si effettuano 1.000 simulazioni Monte Carlo, che restituiscono altrettanti set di input simulati;
3. sulla base di questi parametri, si stimano i valori medi dell'errore α (\bar{E}_α) e dell'errore β (\bar{E}_β) commessi utilizzando le stime campionarie;
4. la combinazione ($\bar{E}_\beta; \bar{E}_\alpha$) viene riportata su un sistema di assi cartesiani;
5. il procedimento di cui ai punti 1-4 viene ripetuto per diversi valori del parametro N.

L'incremento della dimensione del campione contribuisce a ridurre la percentuale con cui un portafoglio efficiente (dominato) è erroneamente classificato

come dominato (efficiente), avvicinando così la combinazione $(\bar{E}_\beta; \bar{E}_\alpha)$ al punto di origine degli assi cartesiani. Tuttavia, per dimensioni campionarie coerenti con l'ampiezza delle serie storiche degli indici di mercato, la probabilità di errori di classificazione resta elevata. Se poi si rimuovono le ipotesi statistiche semplicistiche (assenza di autocorrelazione seriale e distribuzione dei rendimenti normale e stazionaria) che accompagnano l'esperimento di Frankfurter et al., l'errore di classificazione è destinato ad aumentare.

Figura 3.16: Combinazioni $(E_\beta; E_\alpha)$ corrispondenti a valori crescenti di N



3.5.3 Efficient versus Naive portfolio

Questo esperimento propone un confronto diretto tra portafogli coerenti con il principio media-varianza ed un portafoglio *naive*, costruito senza l'ausilio di un criterio razionale. Lo scopo è quello di dimostrare che in presenza di stime erratiche un portafoglio *naive* ha elevate probabilità di dominare un portafoglio giudicato efficiente sulla base di stime campionarie incerte.

Ipotizziamo che un *asset manager* italiano voglia costruire un portafoglio combinando 12 mercati. L'orizzonte temporale d'investimento è annuale e la Tabella 3.25 sintetizza l'insieme dei parametri *true* corrispondenti alle 12 asset class selezionate. L'*asset manager*, tuttavia, non conosce questi parametri e ricorre quindi

alla *classical rule*, ovvero estrapola le stime da serie storiche campionarie.

Tabella 3.25: I parametri *true* delle 12 asset class selezionate

Indici di Mercato	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi
I. Mkt. 1	4,60%	1,25%
I. Mkt. 2	6,36%	4,73%
I. Mkt. 3	10,90%	20,01%
I. Mkt. 4	7,69%	18,40%
I. Mkt. 5	7,54%	19,34%
I. Mkt. 6	8,10%	21,37%
I. Mkt. 7	9,12%	16,35%
I. Mkt. 8	11,40%	23,82%
I. Mkt. 9	9,46%	17,21%
I. Mkt. 10	15,90%	46,53%
I. Mkt. 11	8,01%	30,49%
I. Mkt. 12	8,12%	17,97%

ρ	I. 1	I. 2	I. 3	I. 4	I. 5	I. 6	I. 7	I. 8	I. 9	I. 10	I. 11	I. 12
I. 1	1	0,64	-0,14	-0,48	-0,26	-0,14	0,33	0,44	-0,07	-0,02	0,00	-0,10
I. 2	0,64	1	-0,30	-0,69	-0,50	-0,49	0,22	0,31	-0,24	-0,38	-0,33	-0,02
I. 3	-0,14	-0,30	1	0,75	0,88	0,73	0,65	0,61	0,87	0,59	0,55	0,64
I. 4	-0,48	-0,69	0,75	1	0,89	0,80	0,09	0,06	0,61	0,69	0,56	0,29
I. 5	-0,26	-0,50	0,88	0,89	1	0,89	0,42	0,45	0,87	0,79	0,71	0,58
I. 6	-0,14	-0,49	0,73	0,80	0,89	1	0,36	0,38	0,72	0,94	0,92	0,37
I. 7	0,33	0,22	0,65	0,09	0,42	0,36	1	0,95	0,76	0,24	0,35	0,80
I. 8	0,44	0,31	0,61	0,06	0,45	0,38	0,95	1	0,78	0,32	0,39	0,78
I. 9	-0,07	-0,24	0,87	0,61	0,87	0,72	0,76	0,78	1	0,59	0,61	0,83
I. 10	-0,02	-0,38	0,59	0,69	0,79	0,94	0,24	0,32	0,59	1	0,93	0,21
I. 11	0,00	-0,33	0,55	0,56	0,71	0,92	0,35	0,39	0,61	0,93	1	0,33
I. 12	-0,10	-0,02	0,64	0,29	0,58	0,37	0,80	0,78	0,83	0,21	0,33	1

Assumendo che i rendimenti degli asset siano variabili *random* stazionarie e distribuite normalmente, il ricorso alla tecnica Monte Carlo permette di simulare dei campioni di dati assimilabili alle serie storiche utilizzate applicando la *classical rule*. Immaginando che l'asset manager disponga di un campione storico di 10 anni, la tecnica Monte Carlo dovrà simulare delle serie di rendimenti annuali di ampiezza $N=10$.

Una prima soluzione di investimento consiste nell'ignorare le stime e nel limitarsi a costruire un portafoglio *naive* nel quale le asset class assumono tutte il medesimo peso:

$$w_i = \frac{1}{12} = 8,3\%$$

$$W = \begin{bmatrix} 8,3\% \\ 8,3\% \\ 8,3\% \\ 8,3\% \\ 8,3\% \\ 8,3\% \\ 8,3\% \\ 8,3\% \\ 8,3\% \\ 8,3\% \\ 8,3\% \end{bmatrix}$$

Una soluzione alternativa consiste nel costruire il portafoglio effettuando una ottimizzazione alla Markowitz. Il nostro obiettivo è quello di valutare in che misura un portafoglio creato in coerenza con il principio media-varianza possa essere preferito ad un *equally weighted portfolio*. A tale scopo viene implementato questo procedimento:

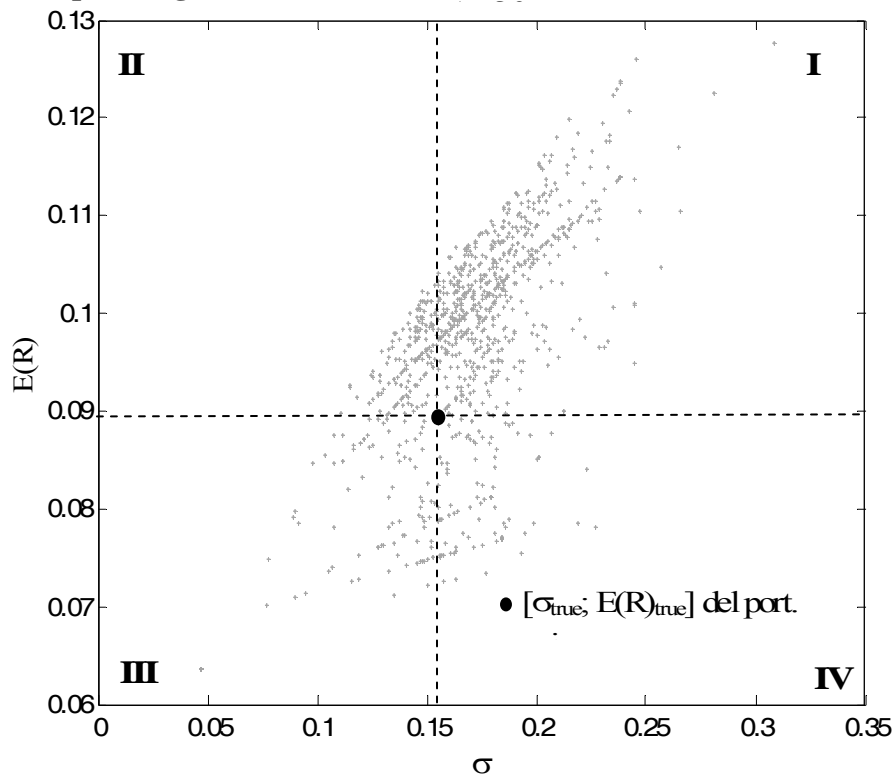
1. in base alle variabili di input *true*, si simula, per ciascuna asset class e mediante la tecnica Monte Carlo, una serie di 10 rendimenti annuali;
2. utilizzando questo campione simulato, si calcola il set di input campionari $[E(R)_{sim}, \sigma_{sim} \text{ e } \rho_{sim}]$;
3. nota la composizione della strategia *equally weighted* possiamo calcolare, sulla base dei parametri campionari, il rischio $[\sigma_{sim}^*]$ di questo portafoglio;
4. dati i parametri $[E(R)_{sim}, \sigma_{sim} \text{ e } \rho_{sim}]$, si provvede ad effettuare una ottimizzazione media-varianza, che identifichi il portafoglio efficiente caratterizzato da rischio atteso pari a σ_{sim}^* . Fatta eccezione per l'eventualità, estremamente remota, che il portafoglio *naive* sia efficiente, il portafoglio ottenuto mediante l'ottimizzazione di Markowitz domina (sulla base delle stime campionarie) quello *equally weighted*;
5. note le composizioni del portafoglio alla Markowitz e di quello *naive*, è possibile determinare quali sono le combinazioni $[\sigma_{true}, E(R)_{true}]$ che i due portafogli avrebbero conseguito sulla base dei veri input;
6. l'intero processo viene ripetuto 1.000 volte.

La Figura 3.17 offre una rappresentazione grafica delle combinazioni $[\sigma_{true}, E(R)_{true}]$ del portafoglio *naive* e dei 1.000 portafogli giudicati efficienti sulla base delle

simulazioni. Diviso lo spazio $[\sigma; E(R)]$ in 4 quadranti:

- il IV quadrante accoglie le combinazioni rendimento-rischio dei portafogli efficienti che sono dominati dal portafoglio naïve;
- il II quadrante accoglie le combinazioni rendimento-rischio dei portafogli efficienti che dominano il portafoglio naïve.

Figura 3.17: Le Combinazioni $[\sigma_{true}; E(R)_{true}]$ dei 1.000 portafogli efficienti e del portafoglio naïve



Ipotizzando che l'asset manager giudichi la qualità dei portafogli sulla base dell'indicatore $E(R)/\sigma$, e che egli punti a massimizzare questo rapporto in modo da minimizzare la probabilità di *shortfall* rispetto ad una soglia pari a zero⁴³, la Tabella 3.26 sintetizza i risultati conseguiti dai portafogli efficienti e dall'*equally weighted portfolio*.

Tabella 3.26: Confronto tra portafogli efficienti e portafoglio naïve

⁴³ A proposito della relazione esistente tra *shortfall probability* e rapporto $E(R)/\sigma$, si veda il paragrafo 2.7.

	Portafoglio Naive	Portafogli Efficienti
- Max $[E(R)/\sigma]$	0,577	1,345
- Min $[E(R)/\sigma]$	0,577	0,344
- $[E(R)/\sigma]$ medio	0,577	0,621
- % di scenari con $E(R)/\sigma$ maggiore	50,1%	49,9%
% di volte in cui un portafoglio domina l'altro	40,1%	59,9%

È significativo rilevare che nel 50,1% dei casi il portafoglio *naive* presenta un rapporto $E(R)_{true}/\sigma_{true}$ che è maggiore di quello del portafoglio efficiente identificato mediante le stime campionarie. Ancora, considerando le sole simulazioni nelle quali uno dei due portafogli domina l'altro (quadranti II e IV), la percentuale di casi in cui i portafogli efficienti sono dominati dal portafoglio *equally weighted* è pari al 40,1%. Queste conclusioni consolidano l'idea di inaffidabilità del modello di Markowitz, quando esso è alimentato da stime estrapolate da campioni storici di ridotte dimensioni.

Mettendosi nei panni di un *asset manager*, non è certo consolante scoprire che i portafogli *naive*, se pur privi di qualsiasi fondamento teorico, abbiano una così elevata probabilità di sovraperformare portafogli coerenti con il principio media-varianza. Ed ancora, coloro che implementano modelli di *portfolio construction*, ignorando la scarsa performance *out-of-sample* dei portafogli alla Markowitz, si macchiano di un peccato finanziario tra i più gravi: operano da “chiaroveggenti”, ovvero ignorano l'*estimation error* in virtù di una presunta infallibilità nella stima dei parametri di *input*.

3.6 Conclusioni

Pur rimanendo fedeli al principio media-varianza, la composizione *unreasonable* e l'instabilità dei portafogli, così come le conseguenze degli errori di stima, sono fenomeni in grado di ridimensionare significativamente l'utilizzo di modelli matematici nella *portfolio construction*. La rimozione dello scetticismo che sovente accompagna la *quantitative finance* passa, quindi, attraverso l'implementazione di tecniche di *asset allocation* in grado di ridurre la portata di questi fenomeni negativi, favorendo così la costruzione di portafogli stabili, ragionevoli e non sensibilmente esposti all'*estimation error*.

In tal senso, l'ottimizzazione classica alla Markowitz non deve essere vista come il punto di arrivo, bensì come uno stadio intermedio nell'*iter* che conduce allo sviluppo di un modello realmente in grado di conciliare il rigore della matematica con le esigenze pragmatiche degli *asset manager*. Lo scopo dei due restanti capitoli è appunto quello di proporre delle soluzioni utili allo scopo di *putting Markowitz at work*, ovvero di rimuovere quei difetti che ne minacciano il concreto utilizzo. Nel capitolo 4 verranno passate in rassegna le soluzioni euristiche; nel capitolo 5 si analizzeranno le tecniche bayesiane.

È bene anticipare che le metodologie qui di seguito analizzate non rappresentano soluzioni antagoniste a quella di Markowitz; esse vanno piuttosto identificate come tecniche in grado di riproporre il modello originario in una veste più coerente con il contesto reale nel quale operano gli *asset manager*.

INDICE CAPITOLO 4

CAPITOLO 4:	LE TECNICHE EURISTICHE.....	146
4.1	Introduzione	146
4.2	La soluzione dei vincoli di peso	152
4.2.1	Vincoli infra-gruppo e scostamento dai portafogli neutrali	157
4.2.2	<i>Efficient</i> versus <i>Constrained portfolio</i>	167
4.3	La tecnica del <i>Resampling</i>TM	171
4.3.1	La scelta dell'ampiezza N dei rendimenti simulati	183
4.3.2	<i>Resampling</i> TM versus <i>Efficient portfolio</i>	190

CAPITOLO 4: LE TECNICHE EURISTICHE

«Mean-Variance optimizers are, in a fundamental sense, “estimation-error maximizers” [...] Mean-Variance optimization significantly overweights (underweights) those securities that have large (small) estimated returns, negative (positive) correlation and small (large) variances. These securities are, of course, the ones most likely to have large estimation errors».

(Richard O. Michaud)

4.1 Introduzione

In un mondo ipotetico nel quale è possibile disporre di stime certe, un *asset manager* potrebbe implementare una ottimizzazione classica alla Markowitz, senza il timore di esporsi alle conseguenze negative degli errori:

$$\begin{aligned}
 & \underset{W(True)}{Min} \quad \sigma_{True}^2 \\
 & \text{Con vincoli :} \\
 & \sum_{i=1}^n w_i E(R_i)_{True} = R^* \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Purtroppo, nella realtà, non si dispone di stime *true* e si è quindi soggetti al rischio di implementare una strategia di investimento caratterizzata da una scarsa qualità *ex-post*. Ragionando in termini dicotomici, l'*asset manager* può implementare due soluzioni alternative che incorporano un atteggiamento opposto circa la capacità di esprimere stime affidabili.

La prima e più semplice strategia di *asset allocation* consiste nell'investire in

portafogli che, lungi dall'avere origine da un processo di generazione delle stime e di successiva ottimizzazione, si ottengono dalla implementazione di strategie (definite *naive portfolio formation rule*) prive di una giustificazione teorica. I portafogli così costruiti tendono a caratterizzarsi per un'elevata diversificazione; un esempio classico è rappresentato dalla già menzionata strategia *equally weighted*.

È utile ragionare sulle motivazioni che possono spingere ad implementare una logica di questo tipo. La decisione di rinunciare aprioristicamente all'utilizzo di stimatori trova una giustificazione teorica nell'assenza di fiducia nei confronti delle proprie capacità previsionali: l'investitore pessimista circa la bontà delle proprie stime dovrebbe evitare di produrle, optando per un portafoglio molto diversificato. È altamente probabile che il portafoglio *naive* così ottenuto sia sub-ottimale rispetto al *true efficient portfolio* stimato sulla base dei parametri corretti. Le ragioni della dominanza del secondo sul primo sono piuttosto ovvie: «*Just like the hands of a broken watch, which happen to correctly indicate the time only twice a day, the prior allocation is only good in those markets, if any, where the optimal allocation happens to be close to the prior allocation*» (Meucci, 2005). Indovinare la composizione del portafoglio è dunque un evento assimilabile alla vincita in un "gioco di fortuna".

Tuttavia, la strategia *naive* non è priva di elementi di interesse: privilegiando un portafoglio diversificato, ci si assicura che la sua composizione non si discosterà in modo sensibile dalla composizione del vero portafoglio ottimale. Infatti, inserendo in portafoglio tutte le *asset class* potenzialmente selezionabili, si è sicuri di avere selezionato anche quelle che verrebbero scelte se si disponesse dei parametri di input corretti. Un esempio numerico contribuirà a chiarire quanto sin qui espresso.

Ipotizziamo di disporre di 10 *asset class*. L'applicazione della strategia *equally weighted* condurrebbe alla seguente composizione di portafoglio:

$$W_{EquallyWeighted.} = \begin{bmatrix} 10\% \\ 10\% \\ 10\% \\ 10\% \\ 10\% \\ 10\% \\ 10\% \\ 10\% \\ 10\% \\ 10\% \end{bmatrix}$$

Supponiamo invece che, adottando l'ottimizzazione di Markowitz alimentata dai parametri di input corretti, si giunga (dato un livello di rendimento atteso) al seguente portafoglio:

$$W_{True} = \begin{bmatrix} 80\% \\ 20\% \\ 0\% \\ 0\% \\ 0\% \\ 0\% \\ 0\% \\ 0\% \\ 0\% \\ 0\% \end{bmatrix}$$

Per quanto affermato nel paragrafo 2.8 del secondo capitolo, la presenza di una composizione sbilanciata a favore di poche *asset class* non deve apparire sorprendente. La differenza di composizione tra il portafoglio *naive* e quello realmente efficiente viene misurata ricorrendo alla distanza euclidea:

$$(4.2) \quad \sqrt{(W_{EquallyWeighted} - W_{True})^T \times (W_{EquallyWeighted} - W_{True})} = 0,761$$

Ipotizziamo che, sviluppando l'*asset allocation* sulla base di stime errate, l'ottimizzazione conduca ad un portafoglio ugualmente concentrato, ma composto da *asset class* diverse da quelle selezionate utilizzando i *true parameter*:

$$W_{Error} = \begin{bmatrix} 0\% \\ 0\% \\ 0\% \\ 10\% \\ 40\% \\ 50\% \\ 0\% \\ 0\% \\ 0\% \\ 0\% \end{bmatrix}$$

La distanza euclidea tra la composizione dei portafogli ottenuti applicando le stime corrette e quelle errate è pari a:

$$(4.3) \quad \sqrt{(W_{Error} - W_{True})^T \times (W_{Error} - W_{True})} = 1,049$$

Una ottimizzazione matematica veicolata da stime marcatamente errate può quindi condurre ad un portafoglio la cui composizione è destinata ad allontanarsi da quella ottimale più di quanto faccia una strategia che persegue un obiettivo di pura diversificazione. In conclusione, la *naive portfolio formation rule* va interpretata alla stregua di una soluzione difensiva che, in assenza di capacità previsionali, contribuisce quanto meno ad evitare che il portafoglio si discosti in maniera macroscopica dalla composizione del *true efficient portfolio*.

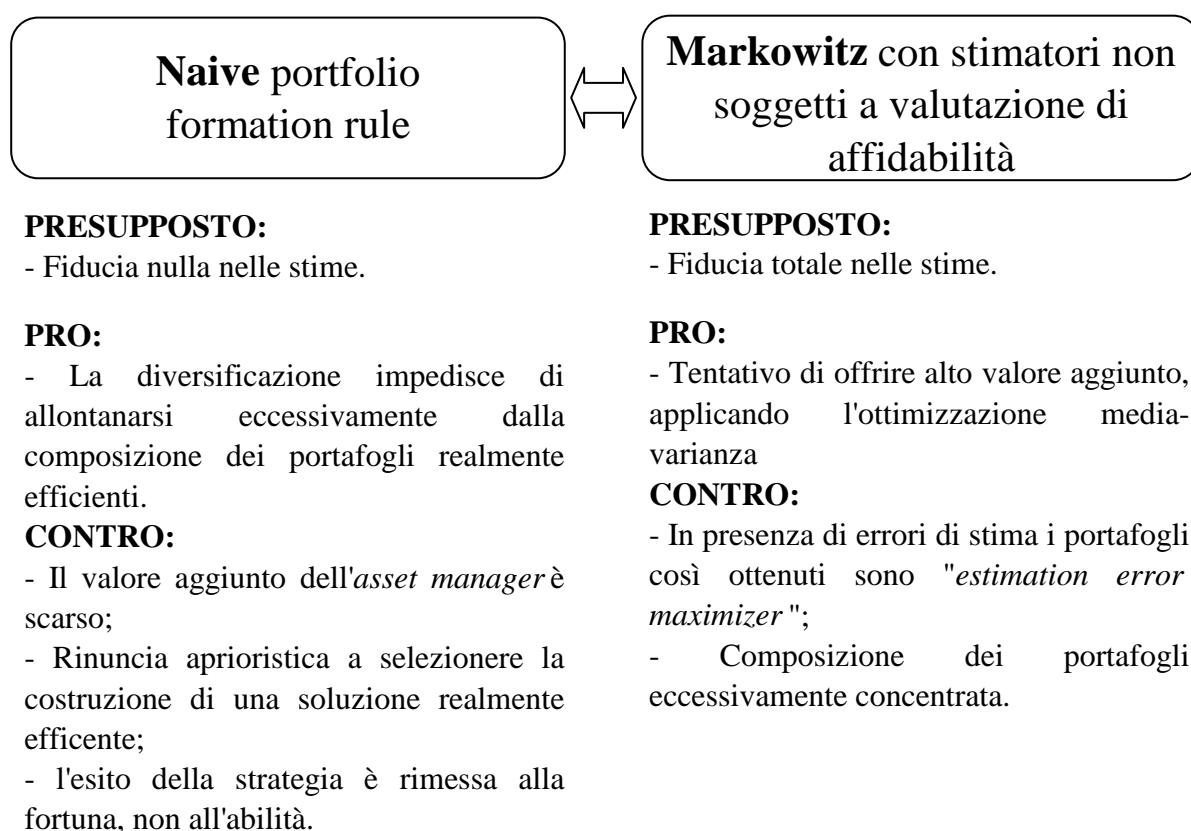
Una seconda strategia, antitetica rispetto a quella appena menzionata, consiste nell'effettuare una ottimizzazione alla Markowitz utilizzando le stime a disposizione, senza preoccuparsi della loro affidabilità. È opportuno riflettere circa le motivazioni che spingono ad implementare questa logica. Essa trova una giustificazione teorica nella totale fiducia nei confronti dei parametri di input: solo l'*asset manager* infallibile, in grado di stimare perfettamente la distribuzione futura dei rendimenti dei portafogli, può agire trascurando le conseguenze dell'*estimation error*. Infatti, se i parametri utilizzati nella ottimizzazione fossero perfetti stimatori di quelli veri *unknown*, allora la distanza che separa la *true efficient frontier* rispetto alla *expected efficient frontier* tenderebbe ad annullarsi.

Il pericolo che si cela dietro questa scelta è evidente: qualora le stime si rivelassero errate, ci si esporrebbe alla tendenza della ottimizzazione media-varianza ad agire come

*estimation error maximizer*¹. Maggiore sarà l'errore, più forte sarà la tendenza a costruire portafogli concentrati in *asset class* diverse da quelle selezionate in presenza dei parametri corretti; ciò produce un incremento della distanza che separa le combinazioni rischio-rendimento dei veri portafogli efficienti $[\sigma_{Port}^{True}; E(R)_{Port}^{True}]$ rispetto alle combinazioni dei portafogli ritenuti erroneamente ottimali $[\sigma_{Port}^{Expected}; E(R)_{Port}^{Expected}]$.

Con l'ausilio della Figura 4.1 si propone una riflessione finale relativamente alla bipartizione *naive* versus *Markowitz*.

Figura 4.1: Confronto tra portafoglio *naive* e portafoglio alla Markowitz



Entrambe le soluzioni presentano contemporaneamente punti di forza e di debolezza. Dei portafogli *naive* è apprezzabile il tentativo di “rincorrere” una buona soluzione, evitando di esporsi eccessivamente al problema dell'errore; ma di essi va criticata la rinuncia aprioristica ad esprimere previsioni puntuali. Di contro, l'ottimizzazione alla Markowitz, nel tentativo di dare all'investitore il massimo valore

¹ Cfr. Michaud (1989) e Nawrocki (1996).

aggiunto, rischia di esporlo ai pericoli che si celano dietro gli errori di stima.

Questa visione bipolare della costruzione di portafoglio mal si presta a descrivere il comportamento che un *asset manager* virtuoso dovrebbe assumere. Non è infatti plausibile né la posizione di chi ha fiducia nulla nelle stime, né quella di chi pensa di disporre di doti di chiarezza. Piuttosto è lecito immaginare che la fiducia sia più o meno ampia e che, conseguentemente, sia corretto sviluppare delle logiche di costruzione del portafoglio che, rifiutando una visione dicotomica, permettano di far coesistere in un'unica soluzione tanto l'esigenza di creare valore aggiunto per l'investitore, quanto la necessità di non esporlo sensibilmente al problema dell'*estimation error*.

Le tecniche euristiche, analizzate in questo capitolo, e quelle bayesiane (Capitolo 5) vanno collocate all'interno di questo filone, e possono quindi essere interpretate come soluzioni intermedie rispetto a quelle estreme sopra analizzate. Pur lasciando alla trattazione successiva il compito di descrivere le differenze esistenti tra queste due metodologie, può essere utile anticipare il diverso punto di vista con il quale esse affrontano la *portfolio construction*. Partendo da una ottimizzazione classica alla Markowitz, esistono due strade - non necessariamente alternative - percorribili al fine di minimizzare la distanza che separa le combinazioni rischio-rendimento dei veri portafogli efficienti $[\sigma_{Port}^{True}; E(R)_{Port}^{True}]$ rispetto alle combinazioni dei portafogli ritenuti erroneamente ottimali $[\sigma_{Port}^{Expected}; E(R)_{Port}^{Expected}]$:

- operare sulle stime, riducendone l'errore;
- agire sull'ottimizzazione, cercando di avvicinarsi alla composizione dei portafogli realmente efficienti.

Le tecniche bayesiane prediligono la prima soluzione; quelle euristiche, la seconda. Pur seguendo strade diverse, queste tecniche sono accomunate dal medesimo obiettivo:

- spingere verso soluzioni più concentrate, in presenza di elevati livelli di fiducia nelle stime;
- propendere per soluzioni che, come quelle *naïve*, privilegiano la diversificazione, in caso di scarsa fiducia nei parametri di *input*.

4.2 La soluzione dei vincoli di peso

La soluzione più diffusa nella pratica al fine di combattere il problema degli errori nella stima dei parametri, è senza dubbio l'imposizione di vincoli di peso all'interno della programmazione quadratica². Questa tecnica, se ben implementata, rappresenta una soluzione efficace anche ai problemi della natura *unreasonable* dei portafogli e dell'estrema sensibilità degli stessi alla variazione dei parametri di *input*. A tal proposito, Green e Hollifield (1992) scrivono: «*Practitioners are suspicious of portfolios that are not naively diversified, so mean-variance methods are generally implemented with extensive sets of constraints that enforce such diversification*».

In termini analitici l'ottimizzazione con vincoli di peso può essere espressa nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 & \underset{w}{\text{Min}} \quad \sigma_{Port}^2 \\
 & \text{Con vincoli:} \\
 & E(R)_{Port} = R^* \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & w_i \geq h_i \quad \text{con } i = 1, \dots, n \\
 & w_i \leq k_i \quad \text{con } i = 1, \dots, n \quad \text{e } h_i \leq k_i
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

L'obiettivo è sempre quello di identificare il vettore dei pesi che minimizza una funzione di grado secondo (la varianza del portafoglio); cresce però il numero di vincoli lineari da rispettare. In particolare, fermo restando l'obbligo di creare portafogli con somma dei pesi pari a 1, il peso w_i attribuito all'*i-esima asset class* può assumere valori nell'intervallo $[h_i; k_i]$:

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_i \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_i \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}
 \tag{4.5}$$

Qualora h_i (il *lower bound*) e k_i (l'*upper bound*) assumano valori rispettivamente pari a zero e a uno, si ritorna alla ottimizzazione tradizionale alla Markowitz con ipotesi di assenza di vendite allo scoperto.

² Sul tema della ottimizzazione vincolata, si vedano: Frost e Savarino (1988) e Jagannathan e Ma (2003).

L'effetto che l'imposizione di vincoli produce sulla composizione dei portafogli efficienti è intuibile: restringendo l'intervallo numerico all'interno del quale i pesi delle *asset class* possono variare, i portafogli ottenuti sono più diversificati di quelli che si otterrebbero con la *unconstrained optimization*³. Grazie a questa maggiore diversificazione, tali soluzioni possono alleviare le conseguenze negative riconducibili agli errori di stima. La maggiore diversificazione dei portafogli vincolati viene tuttavia conseguita ai danni della efficienza *ex-ante*: la *constrained efficient frontier* si collocherà - sul piano $[\sigma_{Expected}; E(R)_{Expected}]$ - più in basso rispetto alla *unconstrained efficient frontier*. Ciò implica che, nell'ipotesi in cui le stime fossero corrette, i portafogli vincolati avrebbero combinazioni rendimento-rischio peggiori di quelle dei portafogli non vincolati.

Servendosi dei dati numerici già utilizzati nel paragrafo 2.6, si propone un esempio numerico di applicazione dei vincoli di peso. Un *asset manager* italiano vuole costruire portafogli combinando più mercati; l'orizzonte temporale d'investimento è annuale. I mercati che egli considera potenzialmente interessanti sono otto ed a ciascuno di essi viene associato un indice di mercato (Tabella 4.1).

Tabella 4.1: Mercati e Benchmark selezionati

Mercati	Indici di Mercato
Monetario area Euro	I. Mkt. 1 = JPM Euro Cash 3M - Tot Return Ind
Obbligazionario Area Euro	I. Mkt. 2 = CGBI WGBI EMU All Mats. - Tot Return Ind
Obbligazionario Internazionale	I. Mkt. 3 = CGBI WGBI BD All Mats - Tot Return Ind
Azionario Europa	I. Mkt. 4 = MSCI Europe - Gross Index
Azionario Nord America	I. Mkt. 5 = MSCI North America - Gross Index
Azionario Giappone	I. Mkt. 6 = MSCI Japan - Gross Index
Azionario Pacifico con esclusione del Giappone	I. Mkt. 7 = MSCI Pacific free ex Japan - Gross Index
Azionario Paesi Emergenti	I. Mkt. 8 = MSCI EM (Emerging Markets) - Gross Index

Ipotizzando che i rendimenti degli indici siano serialmente indipendenti ed identicamente distribuiti (*i.i.d.*), gli input vengono stimati utilizzando il criterio della *classical rule*, ovvero estrapolando i parametri sulla base di un campione storico di rendimenti (espressi in euro) di 19 anni (Gennaio 1988 - Dicembre 2006); la Tabella 4.2 sintetizza l'insieme delle stime campionarie.

L'*asset manager*, non fidandosi totalmente della qualità delle stime, introduce dei

³ Con l'espressione *unconstrained* identifichiamo le ottimizzazioni che presentano il solo vincolo di non negatività dei pesi.

limiti di peso massimo e minimo delle *asset class*, in modo da favorire un incremento della diversificazione dei portafogli. I valori attribuiti agli *upper* e *lower bound* vengono riportati nella Tabella 4.3.

Tabella 4.2: Le stime campionarie

Indici di Mercato	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi
I. Mkt. 1	5,83%	3,09%
I. Mkt. 2	6,48%	5,31%
I. Mkt. 3	6,86%	8,56%
I. Mkt. 4	13,64%	20,41%
I. Mkt. 5	13,97%	22,05%
I. Mkt. 6	4,85%	31,57%
I. Mkt. 7	15,15%	31,59%
I. Mkt. 8	20,58%	38,72%

Correlazioni	I. Mkt. 1	I. Mkt. 2	I. Mkt. 3	I. Mkt. 4	I. Mkt. 5	I. Mkt. 6	I. Mkt. 7	I. Mkt. 8
I. Mkt. 1	1	0,28	0,28	-0,11	0,03	-0,24	0,08	0,11
I. Mkt. 2	0,28	1	0,56	-0,01	0,06	-0,28	0,12	-0,15
I. Mkt. 3	0,28	0,56	1	0,54	0,64	0,33	0,54	0,44
I. Mkt. 4	-0,11	-0,01	0,54	1	0,90	0,62	0,62	0,63
I. Mkt. 5	0,03	0,06	0,64	0,90	1	0,53	0,46	0,54
I. Mkt. 6	-0,24	-0,28	0,33	0,62	0,53	1	0,74	0,79
I. Mkt. 7	0,08	0,12	0,54	0,62	0,46	0,74	1	0,89
I. Mkt. 8	0,11	-0,15	0,44	0,63	0,54	0,79	0,89	1

Tabella 4.3: I vincoli di peso

Indici di Mercato	Lower bound	Upper bound
I. Mkt. 1	0,00	0,50
I. Mkt. 2	0,00	0,40
I. Mkt. 3	0,10	0,10
I. Mkt. 4	0,10	0,20
I. Mkt. 5	0,05	0,30
I. Mkt. 6	0,04	0,14
I. Mkt. 7	0,03	0,06
I. Mkt. 8	0,05	0,40

L'applicazione della programmazione quadratica⁴ permette di identificare le combinazioni rendimento-rischio che sul piano $[\sigma, E(R)]$ disegnano le frontiere vincolata e *unconstrained* (Figura 4.2); il compito di esibire la composizione dei (100)

⁴ Si è utilizzata la funzione “*frontcon*” disponibile nel *Financial Toolbox* di Matlab.

portafogli ottimali è affidato ai grafici ad area (Figura 4.3).

Figura 4.2: Le frontiere efficienti *constrained* e *unconstrained*

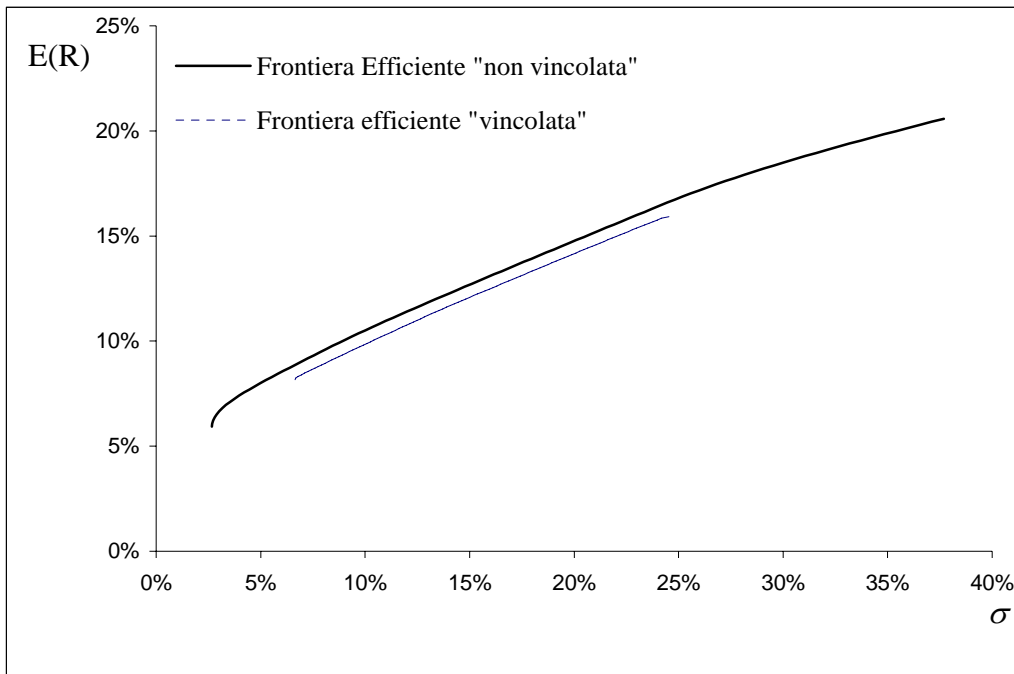
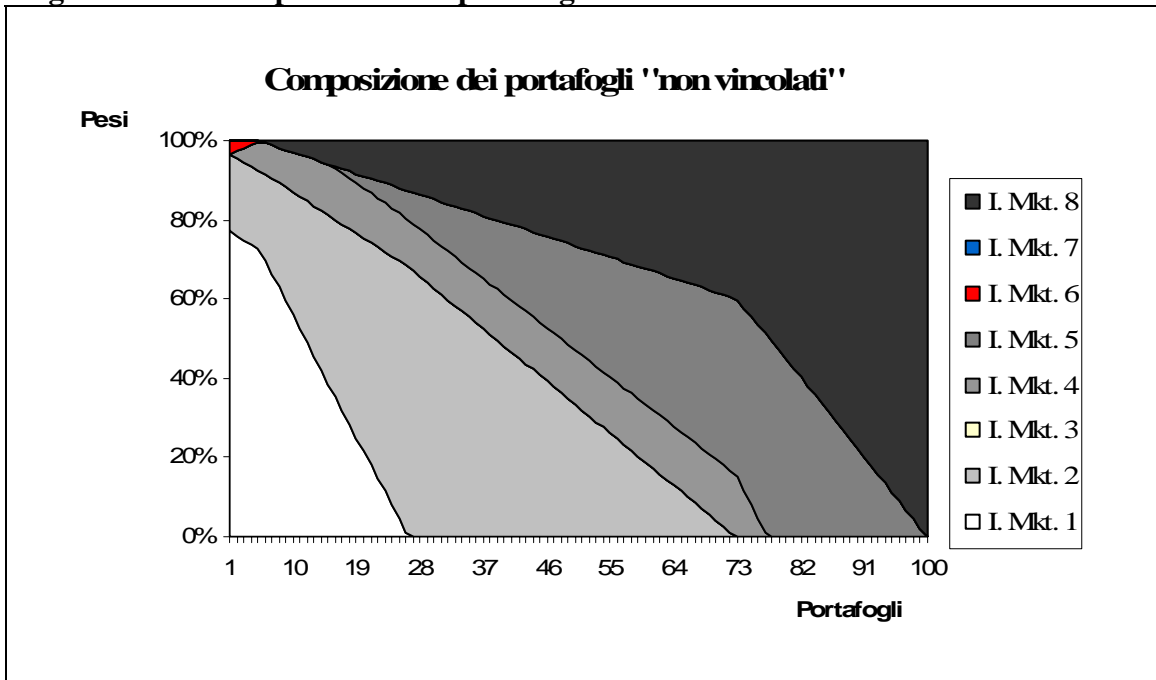
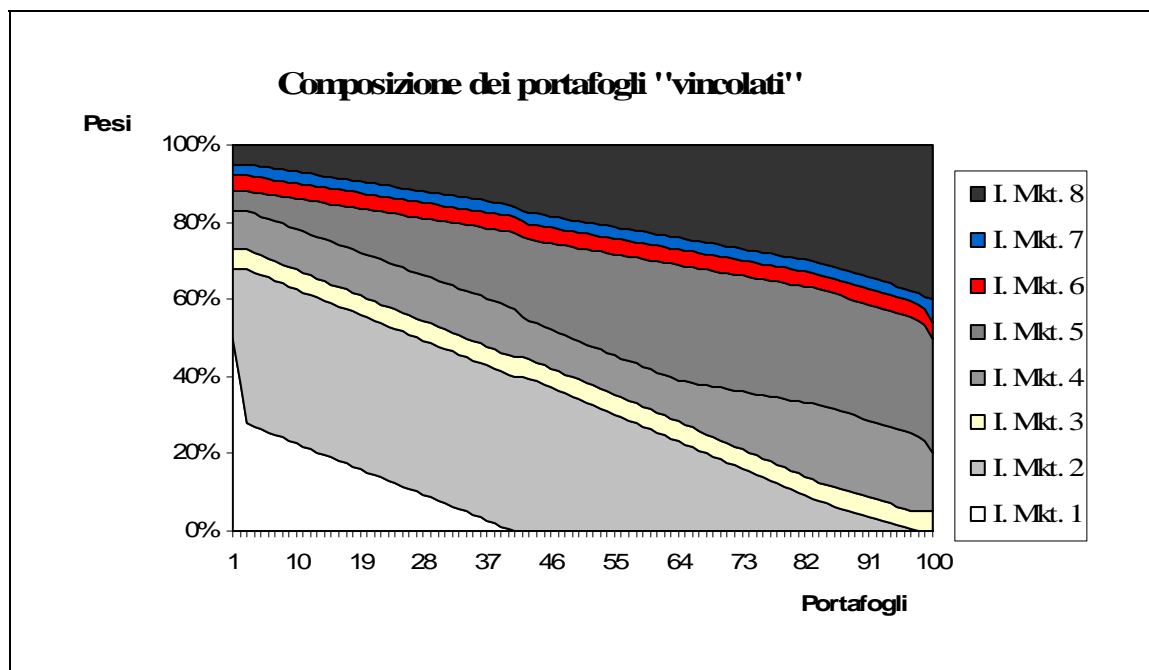


Figura 4.3: Composizione dei portafogli





Si noti che, coerentemente con quanto affermato in precedenza:

- la frontiera vincolata si colloca più in basso rispetto a quella non vincolata⁵;
- i portafogli *constrained* sono più diversificati rispetto ai portafogli *unconstrained*.

Un limite significativo della metodologia è identificabile nella assenza di una giustificazione teorica alla sua applicazione. Tuttavia, pur non potendo motivare scientificamente il ricorso ai vincoli, non è arduo analizzare la ratio euristica sottostante l'utilizzo di questa tecnica. A fronte di due posizioni estreme:

- A. effettuare una ottimizzazione non vincolata ($h_i=0$ e $k_i=1$);
- B. lanciare una ottimizzazione vincolata (con $h_i = k_i = c_i$) che “degenera” verso una soluzione *naive*;

l'*asset manager*, al ridursi della fiducia nelle stime, dovrebbe migrare dalla soluzione A alla soluzione B, privilegiando così la diversificazione ai danni della efficienza *ex-ante*. In termini analitici ciò si esplica attribuendo a h_i valori sempre più elevati e a k_i valori sempre più bassi (con $h_i \leq k_i$).

Anche in ragione della impossibilità di seguire una logica rigorosa, l'imputazione

⁵ Si noti come la frontiera *unconstrained* sia decisamente più lunga rispetto alla frontiera vincolata. In riferimento al fenomeno di *truncation* della frontiera in corrispondenza di valori inferiori di rischio, si veda il paragrafo 4.3.

dei vincoli di peso presenta elevati margini di soggettività che contribuiscono ad ampliarne la natura euristica. In un tale contesto, l'*asset manager* è chiamato ad utilizzare i *constraint* in modo tale da riflettere il proprio *modus operandi*. Ciò implica che la costruzione della *constrained efficient frontier* debba essere preceduta da una attenta definizione delle logiche di attribuzione dei pesi. Il successivo paragrafo è dedicato alla descrizione di un criterio di imputazione dei vincoli giudicato da chi scrive particolarmente efficace. Tuttavia, collocandosi all'interno delle tecniche euristiche, il criterio qui di seguito analizzato è anch'esso non motivabile teoricamente.

4.2.1 Vincoli infra-gruppo e scostamento dai portafogli neutrali

Il presupposto della logica di seguito descritta è il seguente: un *asset manager* che non si fida delle proprie stime dovrebbe proporre portafogli la cui composizione sia coerente con il peso che le *asset class* assumono sul mercato. Tali portafogli vengono comunemente definiti *market neutral*. Questa affermazione dovrebbe incontrare il favore di chi legge; se infatti un analista lavorasse con stimatori totalmente inattendibili, egli dovrebbe proporre dei portafogli che non incorporano scommesse; a tal fine, il peso attribuito alle singole *asset class* dovrebbe semplicemente riflettere la loro dimensione. A titolo di esempio, ipotizziamo che un *asset manager* voglia costruire un portafoglio azionario, “pescando” dalle seguenti asset class:

- Azionario Europa;
- Azionario Nord America;
- Azionario Giappone;
- Azionario Pacifico ad esclusione del Giappone;
- Azionario Mercati Emergenti.

Qualora non disponga di stime affidabili, egli dovrebbe optare per un portafoglio neutrale che rifletta le capitalizzazioni di borsa dei mercati:

$$W_{Port} = \begin{bmatrix} w_{Europa} \\ w_{Azionario Nord America} \\ w_{Giappone} \\ w_{Pac. ex Giappone} \\ w_{Emerg. Market} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31,2\% \\ 47,9\% \\ 9\% \\ 3,8\% \\ 8,1\% \end{bmatrix}$$

Queste percentuali, fedeli ai *market value*, dovrebbero mutare solo qualora l'*asset*

manager ritenga le proprie stime attendibili. In altre parole, maggiore è la fiducia che egli ripone nei confronti dei propri *input*, maggiore dovrebbe essere lo scostamento dal portafoglio neutrale, in modo da concentrarsi sui mercati ipotizzati migliori.

La strategia descritta suggerisce, quindi, di impostare un meccanismo di imputazione dei vincoli capace di alimentare degli scostamenti dal portafoglio neutrale proporzionali al grado di fiducia nelle proprie stime. L'idea è la seguente: partendo dalle proprie previsioni e dalla frontiera non vincolata, l'analista dovrà applicare dei vincoli che, al ridursi della fiducia nei confronti degli input, facciano convergere i portafogli verso una frontiera *market neutral*, composta da portafogli neutrali adatti a soddisfare le esigenze di investitori con diversi gradi di tolleranza al rischio. Si è così legittimati a discostarsi da una strategia passiva solo se la qualità delle previsioni lo giustifica. Questo approccio appare senza dubbio coerente con l'operatività quotidiana delle società di gestione, le quali identificano nella strategia *market neutral* un punto di partenza (il baricentro della propria strategia) dal quale discostarsi sulla base delle *view* prodotte.

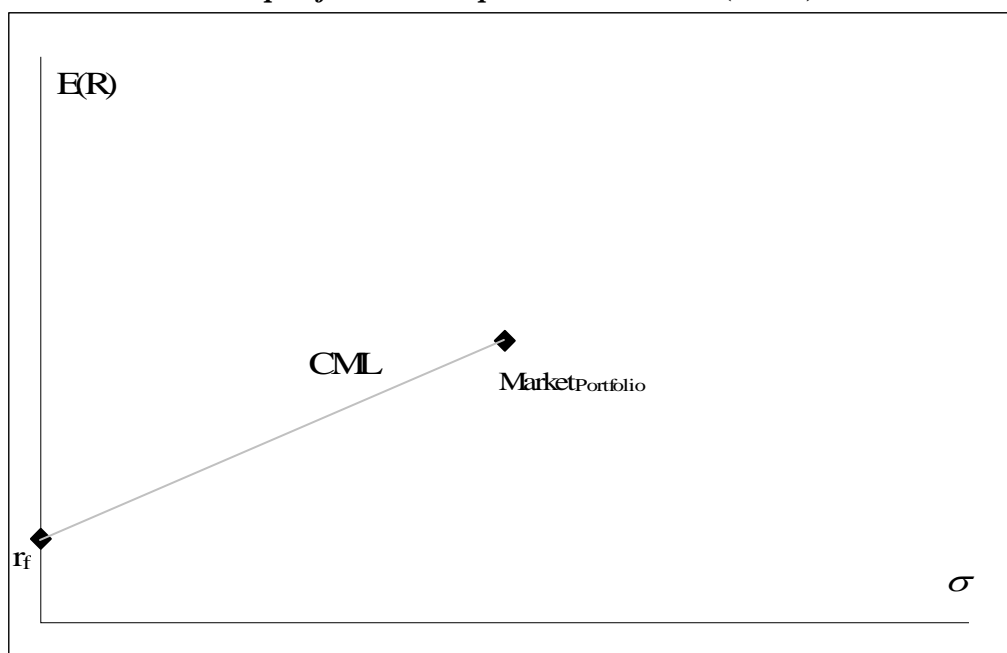
Allo scopo di dare concretezza a questo approccio, occorre determinare i portafogli neutrali corrispondenti a diversi livelli di avversione al rischio. Seguendo il *Capital Asset Pricing Model (CAPM)* di Sharpe, Lintner e Mossin⁶, dato il *market portfolio* (assimilabile ad un portafoglio la cui composizione replica fedelmente la dimensione di tutti i mercati mondiali), l'investitore, combinando questo investimento con quello *risk-free*, riuscirebbe ad ottenere portafogli (la cui combinazione attesa rischio-rendimento si colloca su una retta denominata *capital market line*⁷) in grado di soddisfare diversi livelli di tolleranza al rischio (Figura 4.4). Ciò implica che l'investitore fedele alla perfetta efficienza informativa dei mercati e quindi consapevole della impossibilità di utilizzare le proprie stime al fine di sovraperformare il mercato, dovrebbe limitarsi a costruire i portafogli combinando il portafoglio di mercato e l'attività *risk-free*:

$$(4.6) \quad W = \begin{bmatrix} w_{Risk-free} \\ w_{MarketPortfolio} \end{bmatrix}$$

⁶ Cfr. Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966).

⁷ Allo scopo di ignorare la possibilità di finanziamento al tasso *risk-free*, la *capital market line* viene rappresentata come un segmento che ha per estremi le combinazioni rischio-rendimento dell'attività *risk-free* e del portafoglio di mercato.

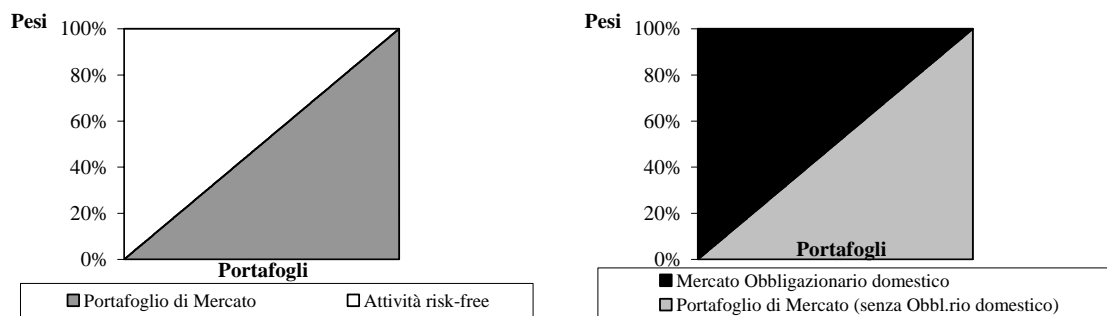
Figura 4.4: Il *market portfolio* e la *Capital Market Line* (CML)



Tuttavia, per rendere operativa questa logica, occorre effettuare alcuni cambiamenti. Il lettore avvezzo all'operatività sui mercati sa che non è frequente un uso dell'attività *risk-free* nella modalità descritta nel CAPM. In altri termini, gli *asset manager*, al fine di costruire un portafoglio coerente con il livello di tolleranza al rischio degli investitori, non operano combinando il portafoglio di mercato e l'attività *risk-free*. Ad esempio, in presenza di un orizzonte temporale annuale, non è prassi costruire portafogli mixando il portafoglio di mercato e un BOT con scadenza annuale.

La prassi comune è piuttosto quella di utilizzare il mercato obbligazionario domestico in combinazione con i restanti mercati, attribuendo al primo un peso crescente all'aumentare dell'avversione al rischio dell'investitore. Nella Figura 4.5 si propone una comparazione tra la logica di composizione dei portafogli neutrali proposta dal CAPM e quella qui suggerita.

Figura 4.5: Confronto tra le due logiche di composizione dei portafogli neutrali



La volontà di proporre una logica più attinente all'operatività dei mercati ci spinge dunque ad identificare i portafogli neutrali nelle combinazioni tra il mercato obbligazionario domestico - che funge da attività a basso rischio - ed il portafoglio di mercato che residua dall'esclusione dell'obbligazionario domestico:

$$(4.7) \quad W = \begin{bmatrix} w_{\text{Obbligazionario Domestico}} \\ w_{\text{Market Portfolio residuale}} \end{bmatrix}$$

Applichiamo questa metodologia, utilizzando i dati numerici proposti nel paragrafo 4.2. Si ipotizzi che un *asset manager* italiano voglia costruire portafogli combinando più mercati; l'orizzonte temporale d'investimento è annuale. I mercati che egli considera potenzialmente interessanti sono otto ed a ciascuno di essi viene associato un indice di mercato (Tabella 4.1). Per quanto testé affermato, possiamo immaginare che le asset class siano riconducibili a due distinti gruppi:

- *obbligazionario domestico*, composto da Monetario area Euro e Obbligazionario area Euro;
- *risky group*, composto da Obbligazionario Internazionale, Azionario Europa, Azionario Nord america, Azionario Giappone, Azionario Pacifico con esclusione del Giappone e Azionario Paesi Emergenti.

L'*asset manager* è chiamato a combinare queste due componenti, tenendo opportunamente conto del grado di fiducia che ripone nelle proprie aspettative. Nell'ipotesi in cui egli non si fidi delle previsioni, tanto l'*obbligazionario domestico*, quanto il *risky group* dovrebbero essere neutrali, cioè composti in modo da riflettere la dimensione dei mercati. Ipotizziamo che le composizioni neutrali dei due gruppi siano quelle riportate nella Tabella 4.4.

L'*asset manager* privo di aspettative affidabili, mantenendo costanti i pesi infra-

gruppo, otterrà una frontiera neutrale composta da portafogli caratterizzati da livelli di rischio crescenti. Solo in presenza di stime affidabili, egli dovrà mutare i pesi infra-gruppo, privilegiando le *asset class* con migliori aspettative.

Tabella 4.4: Le composizioni neutrali dei gruppi *obbligazionario domestico* e *high risk markets*

	Obbligazionario domestico
Monetario area Euro	12%
Obbligazionario area Euro	88%

	Risky group
Obbligazionario Internazionale	15,0%
Azionario Europa	26,5%
Azionario Nord america	40,7%
Azionario Giappone	7,7%
Azionario Pacifico ex. Giappone	3,2%
Azionario Paesi emergenti	6,9%

Un modello di questo tipo può essere implementato attraverso il ricorso ad una ottimizzazione vincolata. A tale scopo occorre però utilizzare una differente logica di imputazione dei limiti di peso: anziché imporre dei vincoli assoluti che definiscono una soglia massima o minima che il peso di una *asset class* può assumere nel portafoglio (è la logica descritta nel paragrafo 4.2), occorre applicare vincoli di peso infra-gruppo che definiscono una soglia massima o minima che il peso di una *asset class* può assumere all'interno del gruppo di appartenenza. Ad esempio, il peso dell'Azionario Europa andrà vincolato all'interno del *risky group*. In termini analitici, la programmazione quadratica con vincoli infra-gruppo può essere espressa nel modo seguente:

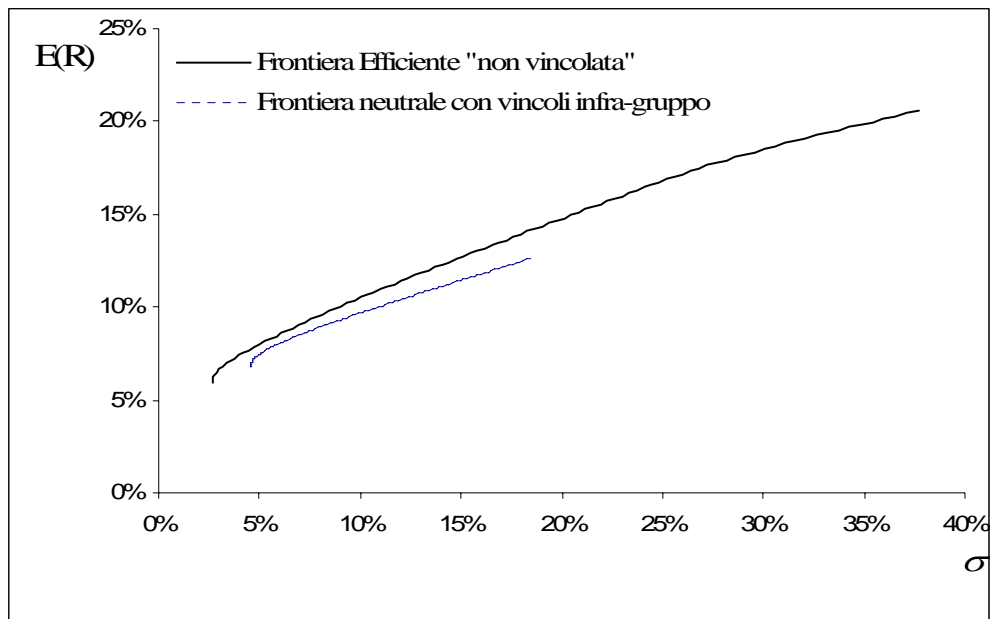
$$\begin{aligned}
 & \underset{w}{Min} \quad \sigma_{Port}^2 \\
 & \text{Con vincoli:} \\
 & E(R)_{Port} = R^* \\
 & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & \frac{w_i}{W_{Gruppo Appartenenza}} \geq h_i \quad \text{con } i = 1, \dots, n \\
 & \frac{w_i}{W_{Gruppo Appartenenza}} \leq k_i \quad \text{con } i = 1, \dots, n \quad \text{e } h_i \leq k_i
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

dove $W_{\text{Gruppo Appartenenza}}$ identifica la somma dei pesi delle *asse class* appartenenti al medesimo gruppo.

Date le stime riportate nella tabella 4.2, l'*asset manager* può costruire la frontiera *neutrale*, applicando dei vincoli infra-gruppo nei quali i coefficienti h_i e k_i coincidono perfettamente con i pesi neutrali che i mercati assumono nei gruppi *obbligazionario domestico* e *risky group* (Tabella 4.4):

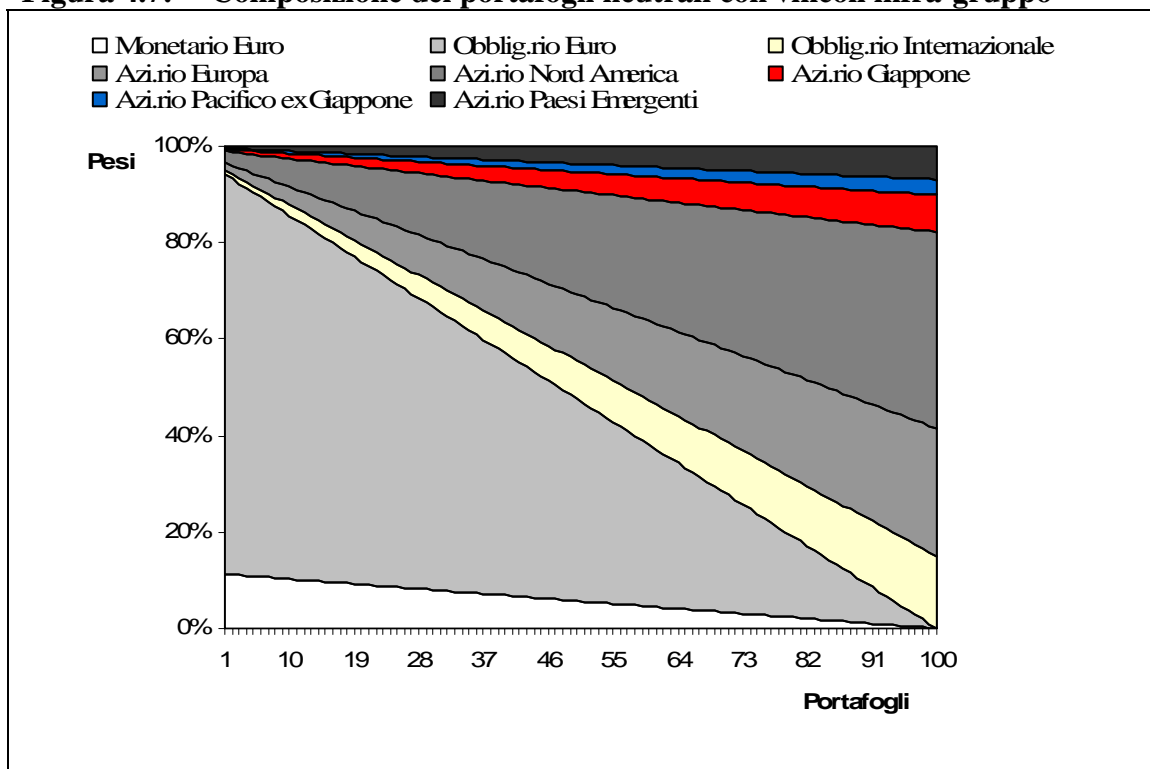
$$\begin{aligned}
 12\% &\leq \frac{w_{\text{Monetario Euro}}}{W_{\text{Obbligazionario domestico}}} \leq 12\% \\
 88\% &\leq \frac{w_{\text{Obbligazionario Euro}}}{W_{\text{Obbligazionario domestico}}} \leq 88\% \\
 15\% &\leq \frac{w_{\text{Obbligazionario Intenazionale}}}{W_{\text{Risky group}}} \leq 15\% \\
 26,5\% &\leq \frac{w_{\text{Azionario Europa}}}{W_{\text{Risky group}}} \leq 26,5\% \\
 40,7\% &\leq \frac{w_{\text{Azionario Nord America}}}{W_{\text{Risky group}}} \leq 40,7\% \\
 7,7\% &\leq \frac{w_{\text{Azionario Giappone}}}{W_{\text{Risky group}}} \leq 7,7\% \\
 3,2\% &\leq \frac{w_{\text{Azionario Pacifico ex Giappone}}}{W_{\text{Risky group}}} \leq 3,2\% \\
 6,9\% &\leq \frac{w_{\text{Azionario Emerging Market}}}{W_{\text{Risky group}}} \leq 6,9\%
 \end{aligned}$$

Figura 4.6: La frontiera *neutrale* e quella *unconstrained*



La Figura 4.6 rappresenta le combinazioni rischio-rendimento che disegnano la frontiera neutrale (comparata con quella *unconstrained*); nella Figura 4.3 vengono esibite le composizioni dei (100) portafogli neutrali.

Figura 4.7: Composizione dei portafogli neutrali con vincoli infra-gruppo



Al crescere della deviazione standard dei portafogli:

- il peso del *risky group* aumenta progressivamente ai danni dell'*obbligazionario domestico*;
- il peso che i singoli mercati assumono nel gruppo di appartenenza è coerente con la composizione *market neutral*.

Questo comportamento è confermato dalla Tabella 4.5 nella quale si propone una comparazione tra le composizioni di due portafogli – con deviazione standard pari al 5,79% e al 14,10% - calcolati applicando questa metodologia.

Coerentemente con quanto affermato sopra, l'*asset manager* dovrebbe discostarsi da queste combinazioni neutrali in proporzione al grado di fiducia che ripone nelle stime; nello specifico, al crescere della affidabilità egli dovrebbe:

- ridurre progressivamente il valore di h_i ;
- aumentare progressivamente il valore di k_i .

Amplificando l'intervallo $[h_i; k_i]$, l'ottimizzazione produrrà un aumento del peso dei mercati che presentano stime migliori. Questo processo, portato al suo estremo ($h_i = 0$ e $k_i = 1$), converge verso la *unconstrained frontier*.

Ipotizziamo che un *asset manager* applichi i vincoli infra-gruppo riportati nella Tabella 4.6.

Tabella 4.5: Confronto tra due portafogli neutrali ottenuti con il metodo dei vincoli infra-gruppo

Composizione del Portafoglio con $\sigma=5,79\%$		Composizione del Portafoglio con $\sigma=14,10\%$	
Asse Class	Peso	Asse Class	Peso
Monetario Euro	9,0%	Monetario Euro	2,9%
Obblig.rio Euro	66,2%	Obblig.rio Euro	20,9%
Obblig.rio Internazionale	3,7%	Obblig.rio Internazionale	11,4%
Azi.rio Europa	6,6%	Azi.rio Europa	20,2%
Azi.rio Nord America	10,1%	Azi.rio Nord America	31,0%
Azi.rio Giappone	1,9%	Azi.rio Giappone	5,8%
Azi.rio Pacifico ex Giappone	0,8%	Azi.rio Pacifico ex Giappone	2,5%
Azi.rio Paesi Emergenti	1,7%	Azi.rio Paesi Emergenti	5,2%

Gruppi		Gruppi	
Obbligazionario domestico	Peso	Obbligazionario domestico	Peso
Obbligazionario domestico	75,2%	Obbligazionario domestico	23,8%
Risky group	24,8%	Risky group	76,2%

Obbligazionario domestico		Obbligazionario domestico	
	Peso infra-gr.		Peso infra-gr.
Monetario Euro	12,0%	Monetario Euro	12,0%
Obblig.rio Euro	88,0%	Obblig.rio Euro	88,0%

Risky group		Risky group	
	Peso infra-gr.		Peso infra-gr.
Obblig.rio Internazionale	15,0%	Obblig.rio Internazionale	15,0%
Azi.rio Europa	26,5%	Azi.rio Europa	26,5%
Azi.rio Nord America	40,7%	Azi.rio Nord America	40,7%
Azi.rio Giappone	7,7%	Azi.rio Giappone	7,7%
Azi.rio Pacifico ex Giappone	3,2%	Azi.rio Pacifico ex Giappone	3,2%
Azi.rio Paesi Emergenti	6,9%	Azi.rio Paesi Emergenti	6,9%

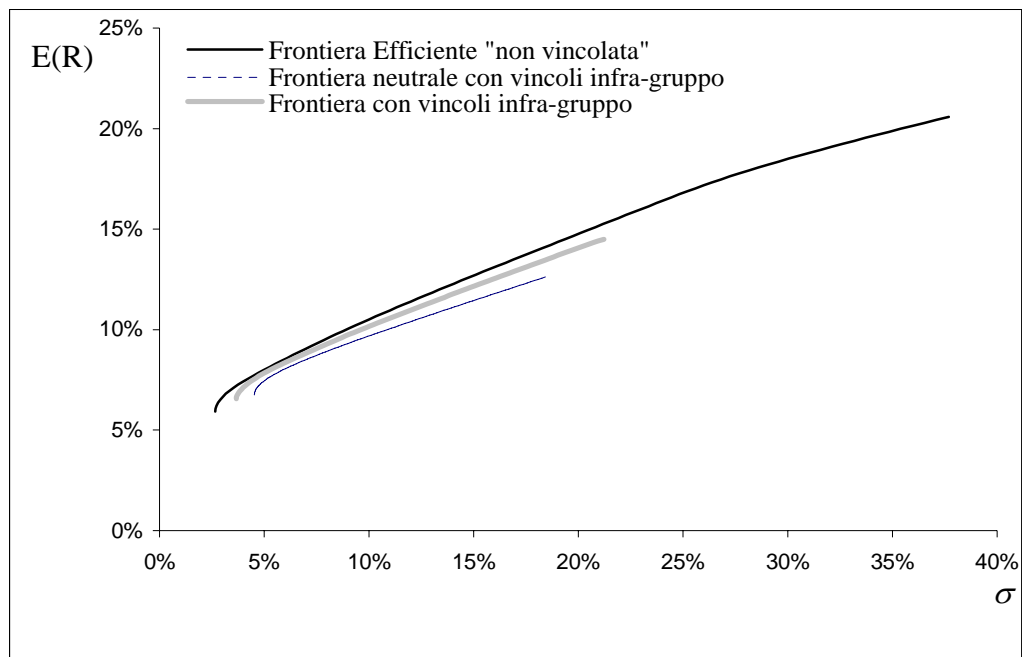
Tabella 4.6: I vincoli di peso infra-gruppo

Obbligazionario domestico	Lower bound	Peso infra-gr. <i>neutrale</i>	Upper bound
Monetario Euro	5,0%	12,0%	35,0%
Obblig.rio Euro	40,0%	88,0%	100,0%

Risky group	Lower bound	Peso infra-gr. <i>neutrale</i>	Upper bound
Obblig.rio Internazionale	5,0%	15,0%	25,0%
Azi.rio Europa	8,0%	26,5%	38,0%
Azi.rio Nord America	15,0%	40,7%	52,0%
Azi.rio Giappone	4,0%	7,7%	15,0%
Azi.rio Pacifico ex Giappone	1,5%	3,2%	8,0%
Azi.rio Paesi Emergenti	2,8%	6,9%	18,0%

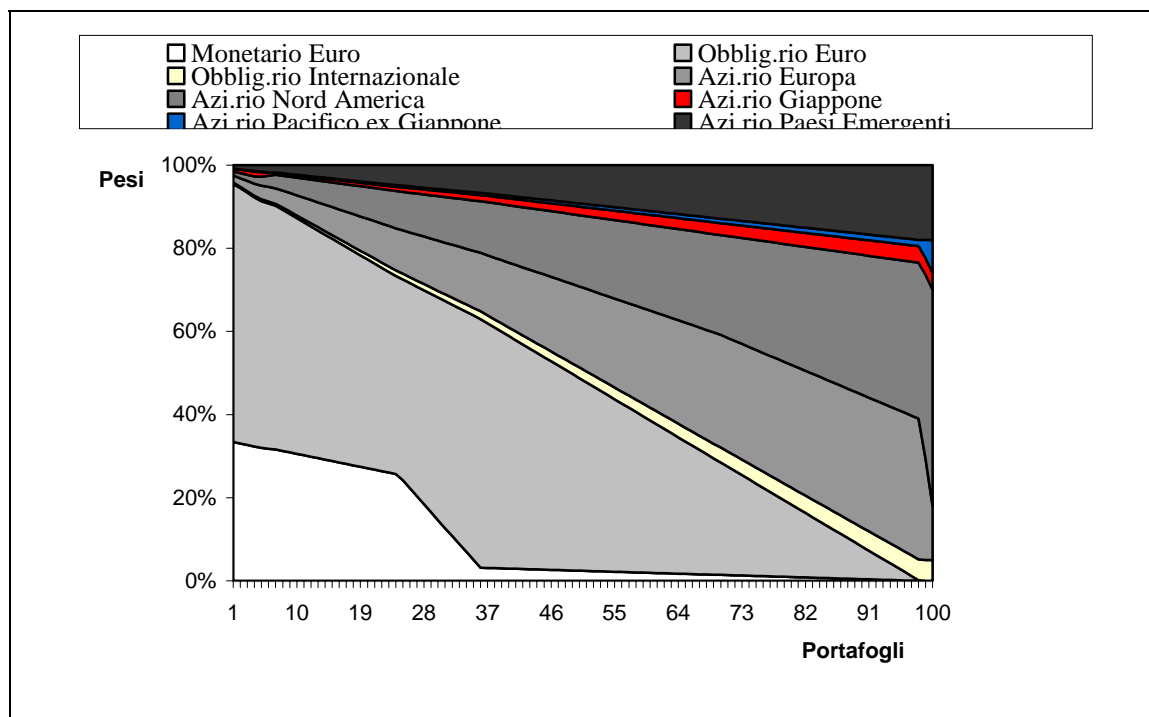
Le Figure 4.8 e 4.9 permettono di apprezzare come tali soluzioni si collochino, tanto per combinazione rischio-rendimento quanto per composizione, in una posizione intermedia tra le soluzioni neutrale e quelle tradizionali *unconstrained* di Markowitz.

Figura 4.8: Le frontiere efficienti *constrained*, neutrale e *unconstrained*



Pur non mancando le perplessità che accompagnano l'applicazione di questo modello, prima fra tutte l'impossibilità di motivare scientificamente il valore attribuito ai vincoli h_i e k_i , esso è chiaro ed efficace. Ad esempio, grazie alla possibilità di inserire soggettivamente i limiti massimo e minimo dei pesi infra-gruppo, esso risolve il problema della natura *unreasonable* delle soluzioni. Coerentemente con la sua natura euristica, tale modello non ha una natura univoca e può quindi essere modificato (ad esempio, utilizzando logiche diverse di definizione dei gruppi), in modo da aderire perfettamente alle modalità operative dei singoli *asset manager*.

Figura 4.9: Composizione dei portafogli ottenuti con vincoli infra-gruppo



4.2.2 Efficient versus Constrained portfolio

Questo esperimento propone un confronto tra portafogli perfettamente coerenti con il principio media-varianza e portafogli costruiti con la logica dei vincoli infragruppo. Lo scopo è quello di dimostrare che:

- il ruolo della ottimizzazione vincolata è quello di restringere la variabilità delle combinazioni rischio-rendimento conseguite *ex-post*;
- in presenza di stime erratiche, un portafoglio *constrained* ha buone probabilità di dominare un portafoglio giudicato efficiente sulla base di stime campionarie incerte.

Ipotizziamo che un *asset manager* italiano voglia costruire un portafoglio combinando 12 mercati, di cui 10 azionari:

- Monetario area Euro (M1);
- Obbligazionario Area Euro (M2);
- Azionario Mondo Energia (M3);
- Azionario Mondo Materiali (M4);
- Azionario Mondo Industriali (M5);
- Azionario Mondo Beni Voluttuari (M6);
- Azionario Mondo Beni di Prima Necessità (M7);

- Azionario Mondo Salute (M8);
- Azionario Mondo Finanza (M9);
- Azionario Mondo Information Technology (M10);
- Azionario Mondo Telecomunicazioni (M11);
- Azionario Mondo Pubblica Utilità (M12).

Tabella 4.7: I parametri true delle 12 asset class selezionate

Mercati	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi
Monetario area Euro	3,83%	1,30%
Obbligazionario Area Euro	6,46%	4,94%
Azionario Mondo Energia	14,01%	20,90%
Azionario Mondo Materiali	7,79%	19,22%
Azionario Mondo Industriali	7,64%	20,20%
Azionario Beni Voluttuari	8,20%	22,32%
Azionario Mondo Beni di Prima Necessità	9,22%	17,08%
Azionario Mondo Salute	13,40%	24,87%
Azionario Mondo Finanza	9,56%	17,97%
Azionario Mondo Information Technology	17,71%	48,60%
Azionario Mondo Telecomunicazioni	8,11%	31,84%
Azionario Mondo Pubblica Utilità	8,22%	18,77%

ρ	M. 1	M. 2	M. 3	M. 4	M. 5	M. 6	M. 7	M. 8	M. 9	M. 10	M. 11	M. 12
M. 1	1	0,64	-0,14	-0,48	-0,26	-0,14	0,33	0,44	-0,07	-0,02	0,00	-0,10
M. 2	0,64	1	-0,30	-0,69	-0,50	-0,49	0,22	0,31	-0,24	-0,38	-0,33	-0,02
M. 3	-0,14	-0,30	1	0,75	0,88	0,73	0,65	0,61	0,87	0,59	0,55	0,64
M. 4	-0,48	-0,69	0,75	1	0,89	0,80	0,09	0,06	0,61	0,69	0,56	0,29
M. 5	-0,26	-0,50	0,88	0,89	1	0,89	0,42	0,45	0,87	0,79	0,71	0,58
M. 6	-0,14	-0,49	0,73	0,80	0,89	1	0,36	0,38	0,72	0,94	0,92	0,37
M. 7	0,33	0,22	0,65	0,09	0,42	0,36	1	0,95	0,76	0,24	0,35	0,80
M. 8	0,44	0,31	0,61	0,06	0,45	0,38	0,95	1	0,78	0,32	0,39	0,78
M. 9	-0,07	-0,24	0,87	0,61	0,87	0,72	0,76	0,78	1	0,59	0,61	0,83
M. 10	-0,02	-0,38	0,59	0,69	0,79	0,94	0,24	0,32	0,59	1	0,93	0,21
M. 11	0,00	-0,33	0,55	0,56	0,71	0,92	0,35	0,39	0,61	0,93	1	0,33
M. 12	-0,10	-0,02	0,64	0,29	0,58	0,37	0,80	0,78	0,83	0,21	0,33	1

L'orizzonte temporale d'investimento è annuale e l'insieme dei parametri *true* corrispondenti alle 12 asset class selezionate è quello riportato nella Tabella 4.7. L'*asset manager*, tuttavia, non conosce questi parametri, e ricorre quindi alla *classical rule*, estrapolando le stime da serie storiche campionarie.

Assumendo che i rendimenti degli asset siano variabili *random* stazionarie e distribuite normalmente, il ricorso alla tecnica Monte Carlo permette di simulare dei campioni di dati assimilabili alle serie storiche utilizzate applicando la *classical rule*.

Immaginando che l'asset manager disponga di un campione storico di 10 anni, la tecnica Monte Carlo dovrà simulare delle serie di rendimenti annuali di ampiezza $N=10$.

Data la tolleranza al rischio dell'investitore, una prima soluzione consiste nel costruire un portafoglio effettuando una ottimizzazione alla Markowitz. Una seconda alternativa consta nell'identificazione di un portafoglio applicando una ottimizzazione vincolata. L'obiettivo è quello di valutare in che misura un portafoglio creato in coerenza con il principio media-varianza possa essere preferito ad un *constrained portfolio*. A tale scopo viene implementato questo procedimento:

1. in base alle variabili di input *true*, si simula, per ciascuna asset class e mediante la tecnica Monte Carlo, una serie di 10 rendimenti annuali;
2. utilizzando questo campione simulato, si calcola il set di input campionari $[E(R)_{sim}, \sigma_{sim} \text{ e } \rho_{sim}]$;
3. applicando i vincoli infragruppo riportati nella Tabella 4.8, si effettua una ottimizzazione media-varianza e si seleziona il portafoglio a massimo rischio (σ_{sim}^*) ;
4. dati i parametri $[E(R)_{sim}, \sigma_{sim} \text{ e } \rho_{sim}]$, si provvede ad effettuare una ottimizzazione *unconstrained*, che identifica il portafoglio efficiente caratterizzato da rischio atteso pari a σ_{sim}^* ;
5. note le composizioni dei due portafogli così identificati, è possibile determinare quali sono le combinazioni $[\sigma_{true}, E(R)_{true}]$ che i due portafogli avrebbero conseguito sulla base dei veri input;
6. l'intero processo viene ripetuto 1.000 volte.

Tabella 4.8: I vincoli di peso infra-gruppo

Obbligazionario domestico	Lower bound	Peso infra-gr. <i>neutrale</i>	Upper bound
Monetario Euro	5,0%	12,0%	35,0%
Obblig.rio Euro	40,0%	88,0%	100,0%

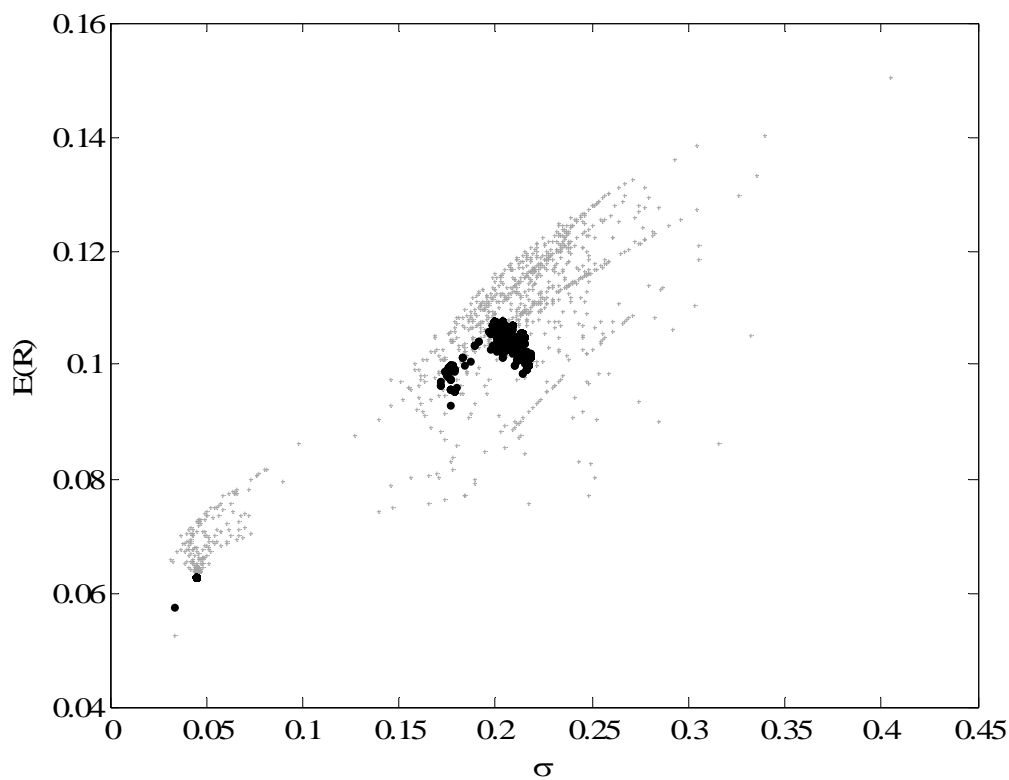
Risky group	Lower bound	Peso infra-gr. <i>neutrale</i>	Upper bound
Azionario Energia	5,7%	9,5%	13,2%
Azionario Materiali	3,7%	6,1%	8,5%
Azionario Industriali	6,2%	10,3%	14,4%
Azionario Beni Voluttuari	6,9%	11,5%	16,0%
Azionario Beni di Prima Necessità	4,8%	8,0%	11,2%
Azionario Salute	5,8%	9,7%	13,6%
Azionario Finanza	14,8%	24,7%	34,6%
Azionario Information Technology	7,0%	11,6%	16,3%
Azionario Telecomunicazioni	2,8%	4,7%	6,6%
Azionario Pubblica Utilità	2,4%	3,9%	5,5%

La Figura 4.10 offre una rappresentazione grafica delle combinazioni $[\sigma_{\text{true}}; E(R)_{\text{true}}]$ dei portafogli vincolati e non, ottenuti mediante le 1.000 simulazioni. Gli indicatori più scuri identificano le combinazioni rischio-rendimento dei portafogli vincolati.

È significativo rilevare che, a causa della maggiore libertà di attribuzione dei pesi alle *asset class* ($0 \leq w_i \leq 100\%$), i portafogli non vincolati presentano, sulla base delle stime corrette, un livello di dispersione delle combinazioni $[\sigma_{\text{true}}; E(R)_{\text{true}}]$ decisamente più ampio di quello dei portafogli vincolati. Infatti, allo scopo di soddisfare pienamente il principio media-varianza, l'ottimizzazione non vincolata spinge verso soluzioni estreme che, a causa dell'*estimation error*, possono rivelarsi decisamente peggiori di quelle conseguite con l'applicazione dei vincoli infra-gruppo. Di contro, le combinazioni rischio-rendimento dei *constrained portfolio* occupano - nello spazio $[\sigma_{\text{true}}; E(R)_{\text{true}}]$ - un'area molto più ristretta, palesando così una maggiore capacità di evitare che l'*estimation error* degli input si trasferisca ai portafogli. L'uso della frontiera non vincolata ed il conseguente tentativo di produrre una frontiera *ex-ante* che sia la più alta possibile hanno quindi un prezzo evidente: in virtù della presunta infallibilità delle stime, si finisce con l'aumentare la probabilità che le combinazioni rendimento-rischio *true* si disperdano nel piano, rischiando così di collocarsi in basso a destra nella Figura 4.10. Queste conclusioni consolidano l'utilità di un modello vincolato che permette di alleviare i pericoli che si nascondono dietro l'utilizzo di parametri di input poco affidabili. Infatti, grazie a questa metodologia, l'*asset manager*

è in grado di associare alle combinazioni $[\sigma_{\text{true}}; E(R)_{\text{true}}]$ un livello di dispersione proporzionale al grado di fiducia che ripone nei parametri di input. Nell'ipotesi estrema di fiducia nulla, la composizione del portafoglio dovrebbe essere indipendente dalle stime; a tale scopo sarebbe sufficiente attribuire agli *upper* e *lower bound* un valore coincidente con i pesi neutrali infra-gruppo, dando così luogo ad una “nuvola” di combinazioni $[\sigma_{\text{true}}; E(R)_{\text{true}}]$ che degenera in un punto.

Figura 4.10: Le Combinazioni $[\sigma_{\text{true}}; E(R)_{\text{true}}]$ dei portafogli *constrained* e *unconstrained*



4.3 La tecnica del *Resampling*^{TM8}

La metodologia qui in esame cerca di alleviare i problemi del modello classico di Markowitz, ricorrendo a molteplici ottimizzazioni; la soluzione finale, denominata frontiera ricampionata (*resampled frontier*), si ottiene effettuando una media degli *output* di queste ottimizzazioni. In termini più specifici, il *resampling*TM propone una logica di maggiore diversificazione del portafoglio attraverso una “mediazione” della

⁸ Questa tecnica, proposta originariamente da Michaud (1998), è una procedura brevettata (US Patent n° 6.003.018 del Dicembre 1999).

composizione di più frontiere statisticamente equivalenti a quella originaria di Markowitz. Gli effetti degli errori di stima sui portafogli ottimali vengono catturati attraverso una procedura Monte Carlo.

Ipotizzando che gli input (il vettore R dei rendimenti attesi, il vettore S delle deviazioni standard e la matrice C dei coefficienti di correlazione) necessari per l'ottimizzazione siano stimati attraverso delle serie campionarie dei rendimenti di ampiezza N , i portafogli ricampionati si ottengono applicando la procedura qui di seguito riportata.

1. Sulla base delle variabili di *input* (R , S e C), si simula - mediante l'utilizzo della tecnica Monte Carlo⁹ - una serie di N rendimenti per ciascuna *asset class*.
2. Date le serie simulate, si provvede al calcolo di un nuovo set di *input* (R_{sim} , S_{sim} e C_{sim}).
3. Gli input così ottenuti vengono utilizzati al fine di “lanciare” una nuova ottimizzazione alla Markowitz, la quale restituisce un nuovo insieme di portafogli efficienti¹⁰.
4. Sulla base della composizione di questi portafogli e degli input originari (R , S e C) si costruisce una frontiera che è *statisticamente equivalente* a quella originaria; questa frontiera rappresenta le combinazioni “rischio;rendimento” che i portafogli componenti la frontiera statisticamente equivalente avrebbero conseguito in presenza del set di *input* originario¹¹.
5. La procedura viene ripetuta per H volte (normalmente tra 1000 e 3000 volte), in modo da ottenere altrettante frontiere *statisticamente equivalenti*.

⁹ Al fine di semplificare la procedura è frequente ricorrere all'ipotesi di distribuzione gaussiana dei rendimenti. In tutti gli esempi numerici di seguito proposti si farà l'assunzione di normalità.

¹⁰ Ipotizziamo che vengano calcolati 100 portafogli efficienti. I rendimenti *target* sono determinati in modo da essere equamente distanziati tra loro:

$$R_{sim} = \begin{bmatrix} E(R)_1 \\ \vdots \\ E(R)_i \\ \vdots \\ E(R)_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(R)_{min} \\ \vdots \\ E(R)_{min} + \frac{E(R)_{max} - E(R)_{min}}{100-1} (i-1) \\ \vdots \\ E(R)_{max} \end{bmatrix}$$

dove:

$E(R)_{min}$ = rendimento atteso del portafoglio a *minimum variance*;

$E(R)_{max}$ = rendimento atteso dell'asset class attesa più redditizia.

¹¹ Le frontiere statisticamente equivalenti possono anche non essere coerenti con l'ipotesi di *avversione al rischio*. Questo accade perché la composizione dei portafogli della frontiera statisticamente equivalente viene determinata sulla base di un set di *input* diverso da quello poi utilizzato per la costruzione della frontiera stessa.

6. I portafogli che compongono ciascuna frontiera simulata vengono ordinati in base al loro rendimento atteso. La composizione media dei *k.esimi* portafogli delle *H* frontiere identifica la composizione del *k.esimo* punto della frontiera ricampionata.
7. Replicando la fase 6 per tutti i punti componenti le frontiere, si ottiene la composizione di tutti i portafogli della frontiera ricampionata.
8. Sulla base degli input originari e della composizione dei portafogli ricampionati, è possibile determinare le combinazioni $[\sigma, E(R)]$ dei portafogli componenti quest'ultima.

Si propone un esempio numerico. Ipotizziamo che un *asset manager* voglia costruire portafogli per un orizzonte temporale d'investimento annuale. L'insieme dei parametri di input è riportato nella Tabella 4.9. Poiché le stime sono state estrapolate da serie storiche campionarie composte da 12 rendimenti annuali relativi al periodo 01/01/1995 – 31/12/2006, allo scopo di stimare le frontiere *statisticamente equivalenti* occorre simulare serie di rendimenti annuali di ampiezza *N* pari a 12.

Tabella 4.9: I parametri di input stimati con la *classical rule*.

Mercati	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi
Monetario area Euro	3,83%	1,30%
Obbligazionario Area Euro	6,46%	4,94%
Azionario Mondo Energia	14,01%	20,90%
Azionario Mondo Materiali	7,79%	19,22%
Azionario Mondo Industriali	7,64%	20,20%
Azionario Beni Voluttuari	8,20%	22,32%
Azionario Mondo Beni di Prima Necessità	9,22%	17,08%
Azionario Mondo Salute	13,40%	24,87%
Azionario Mondo Finanza	9,56%	17,97%
Azionario Mondo Information Technology	17,71%	48,60%
Azionario Mondo Telecomunicazioni	8,11%	31,84%
Azionario Mondo Pubblica Utilità	8,22%	18,77%

ρ	M. 1	M. 2	M. 3	M. 4	M. 5	M. 6	M. 7	M. 8	M. 9	M. 10	M. 11	M. 12
M. 1	1	0,64	-0,14	-0,48	-0,26	-0,14	0,33	0,44	-0,07	-0,02	0,00	-0,10
M. 2	0,64	1	-0,30	-0,69	-0,50	-0,49	0,22	0,31	-0,24	-0,38	-0,33	-0,02
M. 3	-0,14	-0,30	1	0,75	0,88	0,73	0,65	0,61	0,87	0,59	0,55	0,64
M. 4	-0,48	-0,69	0,75	1	0,89	0,80	0,09	0,06	0,61	0,69	0,56	0,29
M. 5	-0,26	-0,50	0,88	0,89	1	0,89	0,42	0,45	0,87	0,79	0,71	0,58
M. 6	-0,14	-0,49	0,73	0,80	0,89	1	0,36	0,38	0,72	0,94	0,92	0,37
M. 7	0,33	0,22	0,65	0,09	0,42	0,36	1	0,95	0,76	0,24	0,35	0,80
M. 8	0,44	0,31	0,61	0,06	0,45	0,38	0,95	1	0,78	0,32	0,39	0,78
M. 9	-0,07	-0,24	0,87	0,61	0,87	0,72	0,76	0,78	1	0,59	0,61	0,83
M. 10	-0,02	-0,38	0,59	0,69	0,79	0,94	0,24	0,32	0,59	1	0,93	0,21
M. 11	0,00	-0,33	0,55	0,56	0,71	0,92	0,35	0,39	0,61	0,93	1	0,33
M. 12	-0,10	-0,02	0,64	0,29	0,58	0,37	0,80	0,78	0,83	0,21	0,33	1

La frontiera ricampionata viene calcolata stimando per ogni ottimizzazione 100 portafogli e reiterando un numero H di simulazioni Monte Carlo pari a 1.000. La Figura 4.11 mostra un confronto tra la frontiera efficiente alla Markowitz e la frontiera ricampionata. Il compito di mostrare la differente composizione dei portafogli è affidato alla Figura 4.12.

Figura 4.11: Confronto tra la frontiera efficiente e quella ricampionata

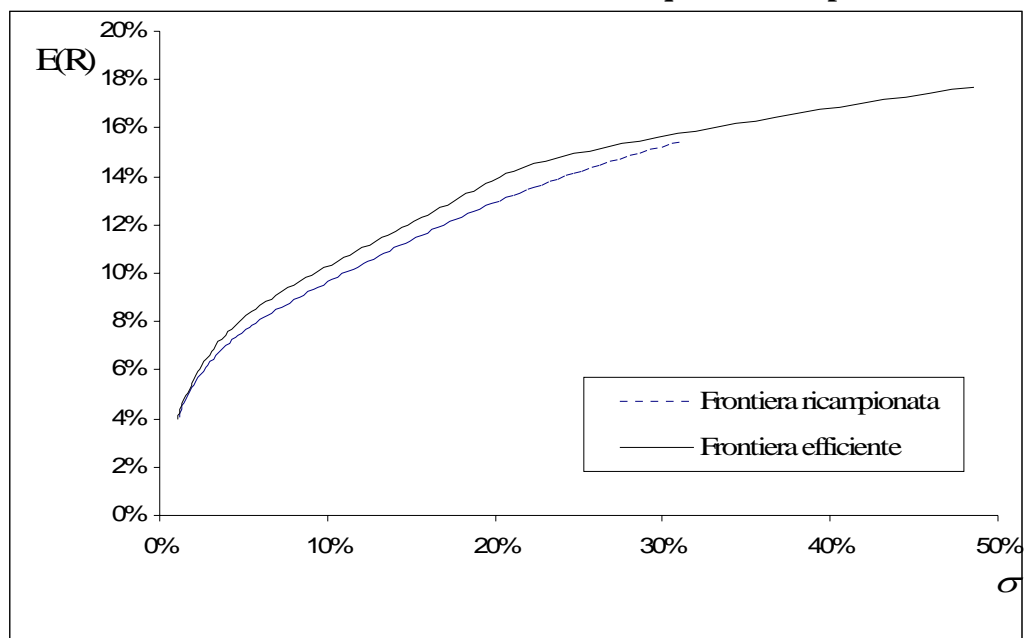
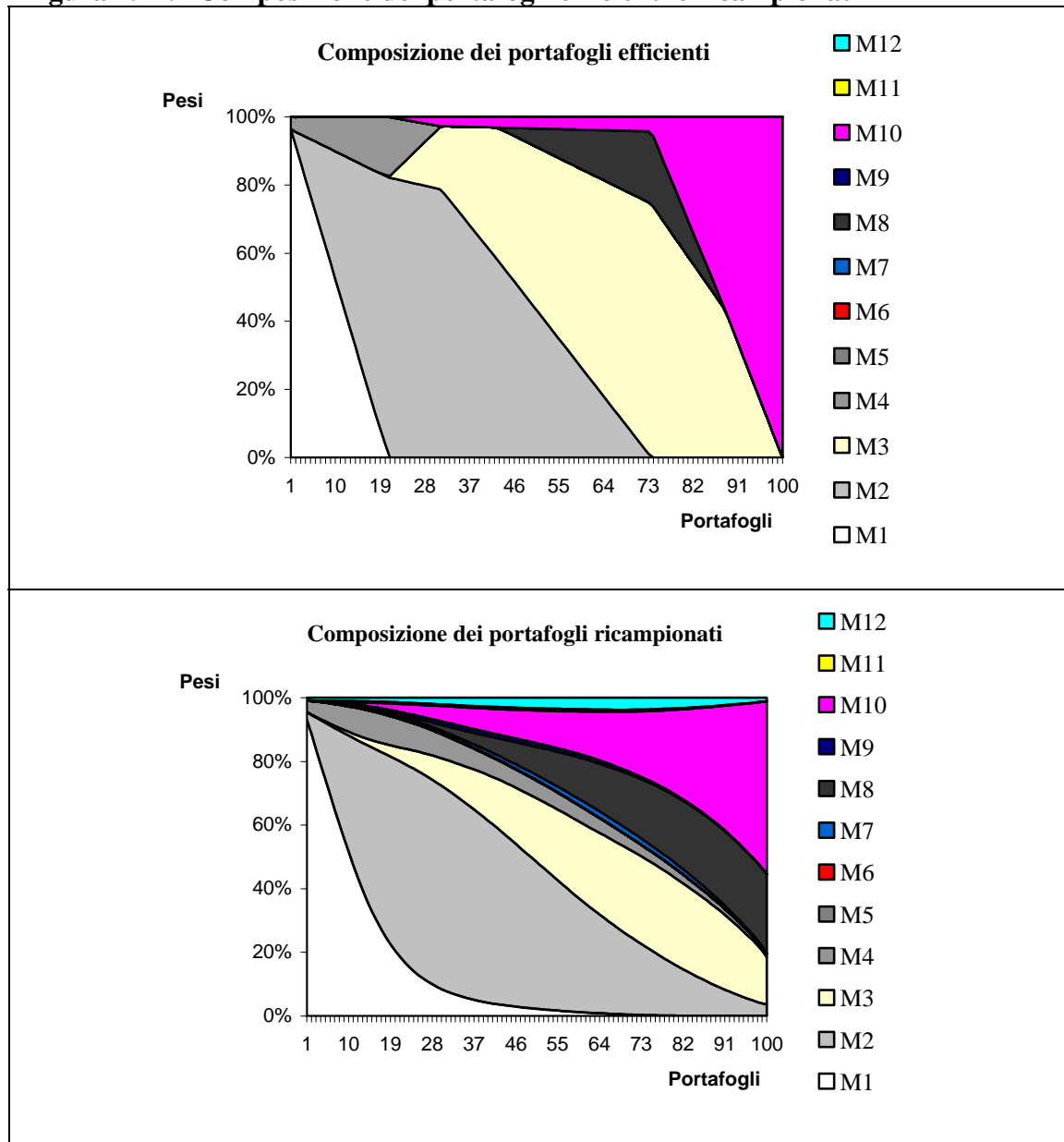


Figura 4.12: Composizione dei portafogli efficienti e ricampionati



L'evoluzione curvilinea dei pesi dei mercati è un elemento distintivo della tecnica del ricampionamento, una sorta di “marchio di fabbrica”. Nei portafogli efficienti - vincolati e non - i pesi evolvono invece linearmente, poiché i portafogli si ottengono attraverso l'interpolazione lineare dei *corner portfolio* adiacenti¹². É palese il maggior grado di diversificazione delle soluzioni ricampionate rispetto a quelle efficienti. Inoltre, la tecnica del *resampling*TM, nel tentativo di restituire portafogli più ricchi, è in grado di

¹² A tal proposito, si veda l'Appendice A.2.1.

discriminare tra le *asset class*, favorendo soprattutto la diversificazione di quelle più rischiose. Questo fenomeno è da accogliere con favore, poiché il problema dell'*estimation error* è riconducibile alla concentrazione nelle *asset class* ad alto rischio; i mercati caratterizzati da minore volatilità possono invece assumere anche la condizione di *asset class* dominanti, poiché il loro peso elevato non rappresenta un concreto fattore di rischio.

È interessante approfondire il modo in cui il *resampling*TM riesca ad assicurare un diverso trattamento tra i mercati. Per le *asset class* caratterizzate da bassa deviazione standard, le simulazioni Monte Carlo restituiscono delle misure simulate di rendimento atteso e rischio simili a quelle di partenza; questo fa sì che tutte le frontiere *statisticamente equivalenti* si caratterizzino, nella porzione più a sinistra, per la presenza di portafogli la cui composizione è molto simile alla composizione della frontiera efficiente originaria. Il processo del *resampling*TM si preoccupa dunque di produrre un “arricchimento” della composizione dei portafogli in riferimento alle *asset class* più rischiose, alle quali è concretamente riconducibile l’esposizione dei portafogli all’errore di stima.

Un altro elemento a favore del *resampling*TM è identificabile nel fatto che esso tende a favorire un’elevata diversificazione dei portafogli solo se quest’ultima non si associa ad un’eccessiva riduzione del rendimento atteso. In tal senso la metodologia si “autodisciplina”, alimentando un processo di diversificazione subordinatamente alla necessità di conseguire l’obiettivo di massimizzazione del rendimento *ex-post* dei portafogli¹³.

La metodologia del *resampling*TM si caratterizza anche per un’altra proprietà: in

¹³ Si propone una spiegazione del modo in cui la metodologia del *resampling*TM riesce ad “autodisciplinarsi”. Si ipotizzi che alcune *asset class* dominino sensibilmente tutte le altre; in tal caso, l’introduzione in portafoglio delle *asset class* trascurate dalla ottimizzazione di Markowitz determinerebbe una sensibile riduzione del rendimento atteso. In una situazione di questo tipo, il metodo Monte Carlo (soprattutto per valori elevati di N) restituirebbe nella maggior parte delle H simulazioni complessive, degli *input* che ribadiscono la dominanza delle medesime *asset class*. In tal modo, la maggioranza delle frontiere statisticamente equivalenti presenteranno dei portafogli dalla composizione simile alla frontiera efficiente di partenza. Tale somiglianza produrrà poi portafogli ricampionati molto simili a quelli efficienti. Si ipotizzi alternativamente che le *asset class* privilegiate dall’ottimizzazione alla Markowitz non dominino sensibilmente le altre; in tal caso, l’introduzione in portafoglio delle *asset class* trascurate dalla ottimizzazione non determinerebbe una sensibile riduzione del rendimento atteso. In una situazione di questo tipo, il metodo Monte Carlo restituirebbe nelle H simulazioni complessive, degli *input* che vedono ruotare le *asset class* considerate dominanti. In tal modo, le frontiere statisticamente equivalenti presenteranno dei portafogli dalla composizione varia e spesso differente da quella della frontiera efficiente di partenza. Questa disuguaglianza produrrà portafogli ricampionati dalla composizione molto diversificata.

presenza di una frontiera efficiente che rappresentata su un sistema di assi $[\sigma, E(R)]$ si contraddistingue, in corrispondenza di valori elevati di σ , per una bassa inclinazione positiva (è il caso della frontiera della Figura 4.11), il processo tende a restituire una frontiera ricampionata “troncata”, ovvero contraddistinta da un livello massimo di *standard deviation* sensibilmente inferiore al valore più alto raggiunto dalla corrispondente frontiera efficiente. Questo comportamento è da accogliere positivamente, in quanto il *resampling*TM “riconosce” il basso contributo in termini di incremento della redditività attesa riconducibile ai portafogli più rischiosi componenti la frontiera efficiente e, conseguentemente, restituisce dei portafogli ricampionati che non soffrono del medesimo limite. In altri termini, il *resampling*TM, in presenza di portafogli la cui efficienza è riconducibile a pochi *basis point* di redditività attesa, riconosce che tali soluzioni presentano, a causa dell’*estimation error*, una elevata probabilità di essere sub-ottimali. In ragione di ciò, tale tecnica preferisce troncare la frontiera, non avendo la possibilità di associare all’incremento del rischio un aumento significativo della *risk adjusted performance*.

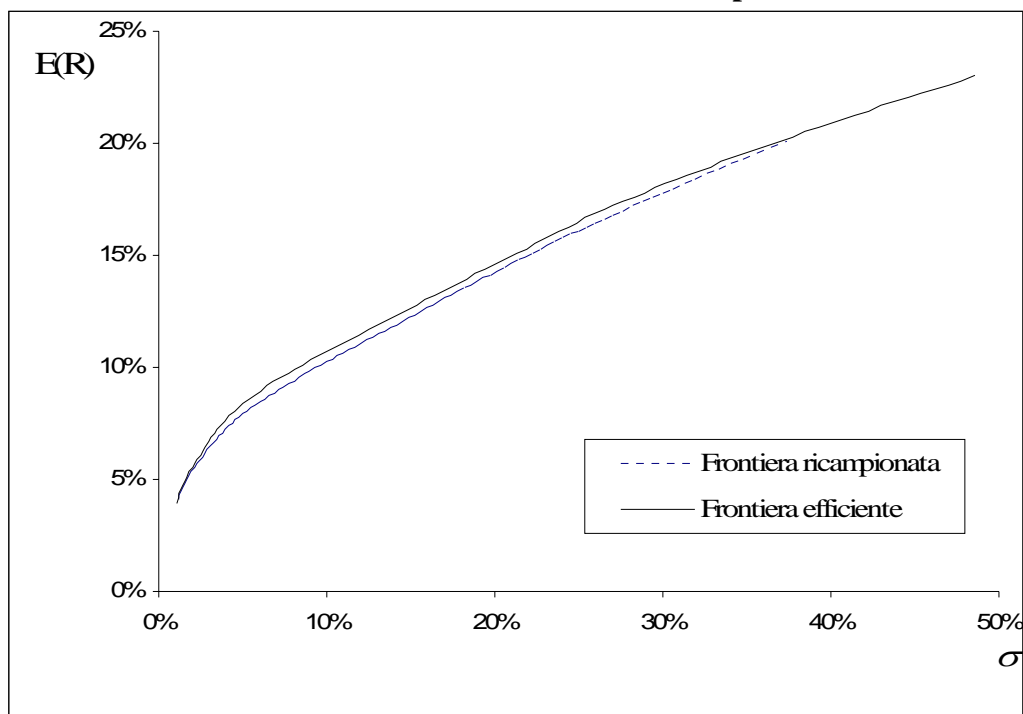
Questo fenomeno tende a scomparire al crescere della pendenza della frontiera efficiente. Se ad esempio riprendiamo i dati presenti nella Tabella 4.9, ed innalziamo il rendimento atteso dell’Azionario Mondo *Information Technology* dal 17,71% al 23%, lasciando inalterati i restanti input, la frontiera ricampionata raggiunge livelli di rischio sensibilmente maggiori (Figura 4.13).

Pur a fronte di queste proprietà che rendono il *resampling*TM attraente, non mancano le critiche. Prendendo spunto da Scherer (2002, 2004) e Michaud e Michaud (2004) passiamo in rassegna i *pitfall* più frequentemente associati alla metodologia in esame.

Scherer (2002) scrive: «*Estimation error in the resampled frontier shows up only as a shortening of the frontier, not as an increase in risk for every return level. Instead, uncertainty about the mean causes a reduction in the maximum expected mean return, which is not plausible*». Il ragionamento dell’autore è, da un punto di vista teorico, ineccepibile: la presenza di errori di stima dovrebbe contribuire ad accrescere l’incertezza dei rendimenti futuri, senza però ridurne il valore atteso, come avviene invece nel *resampling* (e nelle ottimizzazioni vincolate). La decisione di favorire una riduzione del rendimento atteso non trova una giustificazione teorica ed appare quindi non plausibile. Tuttavia, occorre rammentare che la tecnica chiamata in causa è di tipo

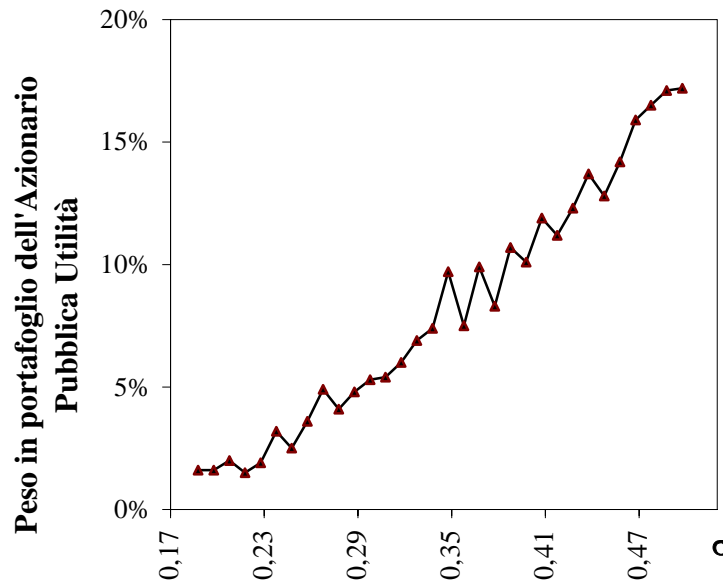
euristico e, in quanto tale, ricerca soluzioni empiricamente affidabili, non teoricamente ineccepibili. Al più possiamo affermare che, in virtù di una non ben definita funzione di preferenza che incorpora anche l'avversione per l'incertezza delle stime, il *resampling*TM rinuncia alla massimizzazione del rendimento atteso pur di alleviare il problema dell'*estimation error*. Se si parte dal presupposto che il *resampling*TM sia una tecnica euristica, la critica mossa da Scherer appare sterile; essa è invece determinante al fine di smorzare qualsiasi pretesa di fare del *resampling*TM una metodologia di ottimizzazione teoricamente rigorosa.

Figura 4.13: Confronto tra le frontiere efficiente e ricampionata



Il *resampling*TM si caratterizza per un'altra particolarità che è fonte di perplessità: aumentando il rischio di una specifica asset class e lasciando inalterati i restanti parametri, il peso di quest'ultima è destinato ad aumentare. Sul tema, si propone un esempio numerico. Riprendendo i dati della Tabella 4.9 e mutando esclusivamente il rischio dell'Azionario Mondo Pubblica Utilità che dal valore iniziale del 18,77% arriva progressivamente sino al 50,77%, il peso che questo *asset* assume nel portafoglio ricampionato con *maximum variance* passa dal valore iniziale dell'1,1% al 17,2% (Figura 4.14).

Figura 4.14: La variazione del peso dell'Azionario Mondo Pubblica Utilità al crescere del rischio del mercato (portafoglio ricampionato con rischio massimo).



Per un *asset manager* non è confortante sapere che l'incremento della deviazione standard dei rendimenti del mercato, sintomo di un peggioramento della qualità, sia recepito dal ricampionamento con un aumento del peso del mercato stesso. Urge una spiegazione delle ragioni alla base di questo fenomeno contro-intuitivo. A causa dell'incremento della volatilità attesa dei rendimenti, la probabilità che l'Azionario Pubblica Utilità assuma rendimenti simulati altamente positivi o negativi è destinata ad aumentare:

- nelle simulazioni ottimistiche la programmazione quadratica premierà l'Azionario Pubblica Utilità attribuendogli pesi significativi all'interno dei portafogli componenti le frontiere statisticamente equivalenti;
- nelle simulazioni pessimistiche la programmazione quadratica ignorerà l'asset in questione che assumerà peso nullo.

In assenza di *short selling*, il maggior peso che tale mercato assume nelle proiezioni positive non trova compensazione nei pesi negativi assunti nelle simulazioni sfavorevoli e conseguentemente: «*An increase in volatility will lead to an increase in the average allocation. Hence, a worsening Sharpe ratio would be accompanied by an increase in weight. [...] it arises directly from the averaging rule in combination with a long only*

constraint, which creates an optionality for the allocation of the corresponding asset» (Scherer, 2004)¹⁴.

Inoltre, la tecnica del ricampionamento tende a violare alcune delle regole fondamentali della ottimizzazione media-varianza:

1. la frontiera ricampionata può assumere una forma convessa, cosicché combinazioni lineari di due portafogli ricampionati possono collocarsi al di sopra della frontiera;
2. la frontiera ricampionata può avere una inclinazione negativa, negando così il principio di avversione al rischio degli investitori.

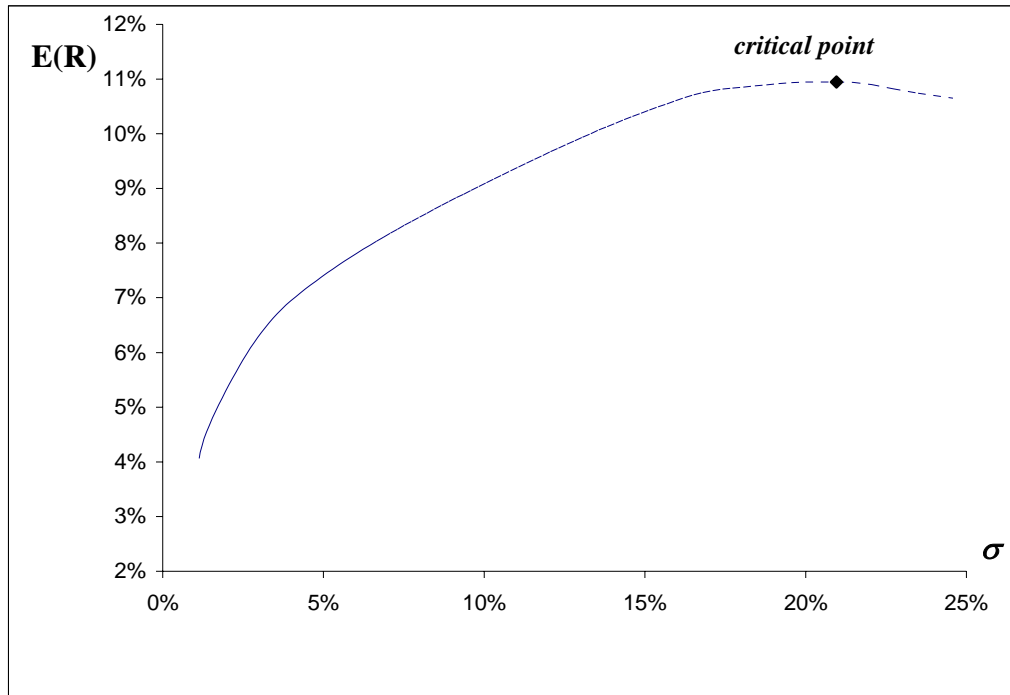
Quest'ultimo fenomeno è riconducibile alla presenza di *asset class* caratterizzate da basso rendimento atteso ed elevata volatilità. A titolo esemplificativo, se riprendiamo la Tabella 4.9 e riduciamo il rendimento atteso dell'Azionario *Information Technology* attribuendogli un valore pari al 7%, la frontiera ricampionata (calcolata replicando l'iter precedentemente descritto) assume la forma riportata nella Figura 4.15. Si noti come la frontiera non sia monotona crescente, caratterizzandosi per un *critical point* a partire dal quale i portafogli ricampionati vedono aumentare il loro rischio e ridursi il loro rendimento atteso. Michaud e Michaud (2003) suggeriscono di interrompere la frontiera in corrispondenza del *critical point*, in ragione della sensibile riduzione dell'efficienza *out-of-sample* che caratterizza i portafogli collocati oltre tale punto.

L'ultima e più significativa delle critiche mosse alla *resampled efficiency* è riconducibile al fatto di basare l'intero processo su stime che possono essere *biased*, e quindi divergere dai parametri *true* ignoti. In ragione di ciò, il processo di *averaging* dei portafogli statisticamente equivalenti promosso dal ricampionamento non impedisce di trasferire gli errori di stima ai *resampled portfolio*.

Tutti i fenomeni testé analizzati sono difficili da giustificare da un punto di vista teorico; tuttavia essi non ledono oltre modo le potenzialità applicative di questa metodologia, la cui efficacia va misurata *out-of-sample*, così da incorporare la capacità del modello di difendersi dall'incertezza nelle stime. Si è pronti a scommettere che ciascun investitore, anche il più razionale, sarebbe disposto a barattare il rigore metodologico con una crescente capacità di difendersi dal fenomeno dell'*estimation error*.

¹⁴ Questo limite è quindi destinato a sparire se applicato ad ottimizzazioni non soggette all'ipotesi di non negatività dei pesi.

Figura 4.15: Frontiera ricampionata con inclinazione negativa.



Un limite puramente operativo della tecnica del *resampling*TM è identificabile nella possibile natura *unreasonable* dei portafogli. Infatti, pur assicurando la diversificazione, tale metodologia non fa nessuna particolare assunzione circa la composizione dei portafogli e ciò può favorire il manifestarsi di composizioni di portafoglio¹⁵ giudicate inammissibili. I portafogli ricampionati non soffrono invece in modo sensibile del fenomeno della instabilità della composizione al variare degli input: modifiche non significative dei parametri non producono infatti grosse variazioni del peso in portafoglio delle *asset class*. A conferma di quanto qui affermato, si ripropone la *sensitivity analysis* già applicata nel paragrafo 3.4. Vengono utilizzati anche gli stessi dati numerici, in modo da rendere comparabili i risultati ottenuti.

Un *asset manager* ha intenzione di costruire un portafoglio coerente con un parametro di avversione al rischio pari a:

$$\frac{E(R)_{Port}}{\sigma_{Port}} = 1$$

Ipotizzando che il *portfolio manager* abbia selezionato le *asset class* della Tabella 3.7 e che le stime siano quelle della Tabella 3.13, il portafoglio viene stimato

¹⁵ Cfr. il paragrafo 3.3.

applicando il *resampling*TM e selezionando la soluzione coerente con il parametro di *risk aversion*. Si sono simulate serie di rendimenti di ampiezza 20 anni e si sono lanciate 500 simulazioni Monte Carlo¹⁶.

Il portafoglio ricampionato così ottenuto è il seguente:

$$W_{Opt} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0\% \\ 37,4\% \\ 3,5\% \\ 25,8\% \\ 1,3\% \\ 8,5\% \\ 7,1\% \\ 7,9\% \\ 0 \\ 1,7\% \\ 2,5\% \\ 3,3\% \end{bmatrix}$$

Allo scopo di valutare in che misura questa composizione sia sensibile ad una variazione di $E(R)$ e σ , l'*asset manager* è chiamato ad identificare degli intervalli di variazione dei parametri che egli giudica insignificanti. La Tabella 3.14 mostra i valori estremi, minimi e massimi, attribuiti rispettivamente ai rendimenti attesi ed alle deviazioni standard.

La generazione di numeri casuali ε distribuiti in maniera uniforme e compresi tra 0 e 1, permette di estrapolare *randomly* dei valori simulati dei vettori dei rendimenti e dei rischi. Tali parametri, insieme alla matrice delle correlazioni, vengono utilizzati come input per lanciare un nuovo *resampling*TM e successivamente identificare il nuovo portafoglio con parametro di avversione al rischio pari a 1. Ripetendo questa procedura 100 volte otterremo altrettanti portafogli simulati, la cui composizione andrà confrontata con la composizione del portafoglio ricampionato iniziale.

La Tabella 4.10 sintetizza i risultati numerici della *sensitivity analysis*¹⁷. La Figura 4.16 mostra la composizione dei 100 portafogli ricampionati simulati.

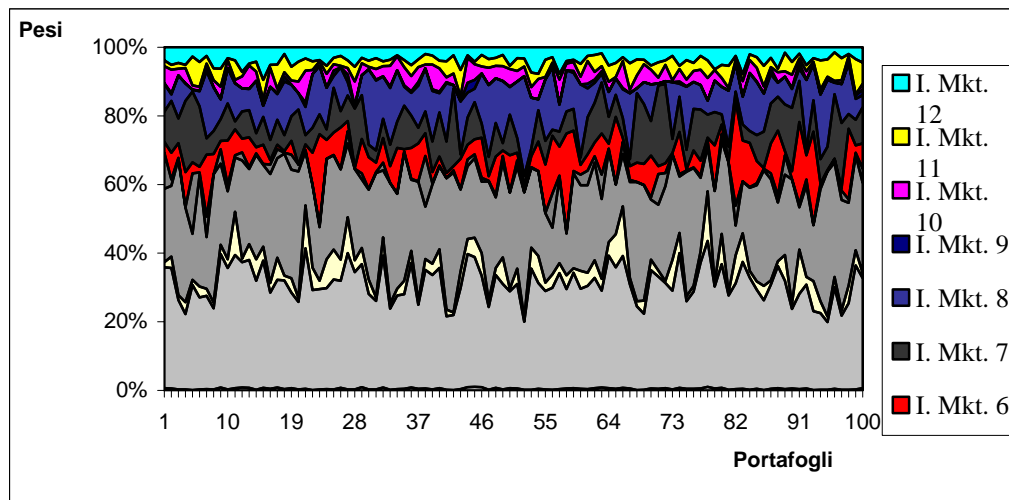
¹⁶ Poiché il test di *sensitivity* è particolarmente lungo (la procedura del ricampionamento è replicata per 100 volte), rispetto agli esempi precedenti il parametro N è stato ridotto da 1.000 a 500.

¹⁷ Per una descrizione delle misure riportate nella Tabella 4.10, si rimanda ancora al paragrafo 3.3.

Tabella 4.10: L'output della *sensitivity analysis*.

	Max $ w_i - w_{iniziale} $	75° Percentile $ w_i - w_{iniziale} $	Media $ w_i - w_{iniziale} $	σ $(w_i - w_{iniziale})$
Monetario area Euro	0,9%	0,7%	0,5%	0,2%
Obbligazionario Area Euro	17,7%	9,8%	7,1%	5,2%
Azionario Mondo Energia	10,9%	2,7%	2,3%	3,2%
Azionario Mondo Materiali	17,1%	9,9%	6,1%	7,5%
Azionario Mondo Industriali	16,3%	1,3%	1,7%	3,0%
Azionario Beni Voluttuari	22,0%	7,3%	5,6%	6,8%
Azionario Mondo Beni di Prima Necessità	16,4%	5,0%	4,1%	5,4%
Azionario Mondo Salute	21,2%	7,4%	5,1%	6,1%
Azionario Mondo Finanza	2,9%	0,3%	0,3%	0,6%
Azionario Mondo Information Technology	7,6%	2,7%	1,8%	2,1%
Azionario Mondo Telecomunicazioni	7,8%	2,4%	1,8%	2,3%
Azionario Mondo Pubblica Utilità	6,2%	1,8%	1,3%	1,6%
Media delle Distanze Euclidee	0,1583			

Figura 4.16: La composizione dei 100 portafogli ricampionati simulati.



Il confronto tra le Tabelle 4.10 e 3.15 e tra le Figure 4.16 e 3.8 fugge qualsiasi dubbio circa la maggiore instabilità dei portafogli efficienti rispetto a quelli ricampionati.

4.3.1 La scelta dell'ampiezza N dei rendimenti simulati

Se i parametri di input vengono stimati utilizzando la *classical rule*, ovvero

estrapolandoli da un campione di rendimenti storici, la scelta del parametro N è obbligatoria. Infatti, al fine di trasferire alle frontiere simulate la medesima incertezza implicita nell'utilizzo del campione storico, occorre attribuire ad ogni serie simulata di rendimenti la stessa dimensione del campione storico. Così, dato che negli esempi sin qui sviluppati i parametri di input sono stati estrapolati da serie storiche di 12 rendimenti annuali, le frontiere ricampionate sono state calcolate simulando serie della medesima dimensione¹⁸.

Tuttavia, gli input alla base della programmazione quadratica non sono stimati ricorrendo necessariamente alla *classical rule* e, conseguentemente, non è sempre possibile fissare oggettivamente il numero dei rendimenti da simulare. Se ad esempio i rendimenti attesi, i rischi e le correlazioni venissero stimati ricorrendo a giudizi soggettivi degli *asset manager*, mancando il supporto del campione storico, la scelta del parametro N non sarebbe più obiettiva. Ancor prima di proporre una logica numerica in grado di rendere meno arbitraria la scelta del valore da attribuire ad N , proponiamo un esempio numerico che permette di apprezzare l'impatto che il valore di questo parametro ha sulla composizione e sulle combinazioni $[E(R); \sigma]$ dei portafogli ricampionati. L'obiettivo è quello di dimostrare che il parametro N «*is a natural way to model investor uncertainty for Mean-Variance optimization*» (Michaud e Michaud, 2003).

Tabella 4.11: I parametri di input.

¹⁸ La letteratura finanziaria ha inizialmente trascurato il problema concernente il valore da attribuire al parametro. Michaud (1998) scrive: «*Monte Carlo simulates 18 years of monthly returns*». Questa affermazione può indurre ad ipotizzare che il processo di *resampling* debba essere sviluppato ricorrendo a serie simulate di 216 rendimenti mensili. Solo più tardi, il “padre” di questa metodologia chiarirà il suo pensiero: «*In Michaud (1998, Ch.6) each of the simulated MV efficient frontiers are computed from 216 simulated monthly returns. This is because the original historical return data consisted of eighteen years of monthly returns*» (Michaud e Michaud, 2003).

Mercati	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi
Asset 1	8,15%	17,10%
Asset 2	10,89%	13,64%
Asset 3	-3,71%	25,46%
Asset 4	4,76%	21,09%
Asset 5	8,80%	24,71%
Asset 6	6,10%	15,99%
Asset 7	10,77%	17,56%
Asset 8	4,63%	11,09%
Asset 9	5,24%	13,31%
Asset 10	7,61%	4,26%
Asset 11	2,32%	12,50%
Asset 12	2,98%	10,91%
Asset 13	6,52%	1,13%

ρ	A.1	A.2	A.3	A.4	A.5	A.6	A.7	A.8	A.9	A.10	A.11	A.12	A.13
A.1	1	0,63	0,45	0,56	0,51	0,73	0,68	-0,12	-0,11	-0,15	0,24	0,23	0,05
A.2	0,63	1	0,38	0,59	0,55	0,63	0,55	-0,15	-0,07	-0,21	0,08	-0,15	0,19
A.3	0,45	0,38	1	0,39	0,38	0,50	0,44	-0,13	-0,03	-0,13	0,54	0,15	0,02
A.4	0,56	0,59	0,39	1	0,73	0,59	0,43	-0,18	-0,07	-0,24	0,21	-0,05	0,07
A.5	0,51	0,55	0,38	0,73	1	0,42	0,35	-0,33	-0,21	-0,20	0,05	-0,15	0,01
A.6	0,73	0,63	0,50	0,59	0,42	1	0,67	-0,11	-0,09	-0,15	0,34	0,24	0,16
A.7	0,68	0,55	0,44	0,43	0,35	0,67	1	-0,04	-0,07	-0,02	0,34	0,30	0,14
A.8	-0,12	-0,15	-0,13	-0,18	-0,33	-0,11	-0,04	1	0,53	0,35	0,04	0,21	0,19
A.9	-0,11	-0,07	-0,03	-0,07	-0,21	-0,09	-0,07	0,53	1	0,15	0,12	0,17	0,14
A.10	-0,15	-0,21	-0,13	-0,24	-0,20	-0,15	-0,02	0,35	0,15	1	-0,01	0,14	0,21
A.11	0,24	0,08	0,54	0,21	0,05	0,34	0,34	0,04	0,12	-0,01	1	0,49	0,07
A.12	0,23	-0,15	0,15	-0,05	-0,15	0,24	0,30	0,21	0,17	0,14	0,49	1	0,20
A.13	0,05	0,19	0,02	0,07	0,01	0,16	0,14	0,19	0,14	0,21	0,07	0,20	1

Utilizzando i parametri di input riportati nella Tabella 4.11¹⁹, sviluppiamo la logica del *resampling*TM (si replica il procedimento già svolto in precedenza, stimando per ogni ottimizzazione 100 portafogli e reiterando un numero H di simulazioni Monte Carlo pari a 1.000), attribuendo al parametro N valori pari a 10, 25, 50 e 100. La Figura 4.17 mostra un confronto tra la frontiera efficiente alla Markowitz e le frontiere ricampionate. La Figura 4.18 ha il compito di mostrare la differente composizione dei portafogli. Si noti che al crescere della dimensione di N, i portafogli ricampionati:

- tendono ad essere meno diversificati;
- assumono una composizione più simile ai portafogli efficienti alla Markowitz.

In pratica, all'aumentare di N, la frontiera ricampionata tende asintoticamente alla frontiera efficiente. Mettendoci nei panni di un *asset manager*, possiamo apprezzare le flessibilità di questa metodologia che si adatta alle condizioni dell'utilizzatore. Se

¹⁹ Ipotizziamo che tali parametri non siano estrapolati da un campione storico di rendimenti annuali.

l'*asset* manager è fiducioso nei confronti delle stime ed intende quindi privilegiare la redditività attesa dei portafogli ricampionati ai danni del loro grado di diversificazione, egli deve utilizzare un valore di N molto elevato. Al contrario, se in virtù di una forte incertezza delle stime si desidera privilegiare il livello di diversificazione dei portafogli ai danni della loro redditività, il valore di N dovrà essere ridotto.

Figura 4.17: Confronto tra la frontiera efficiente e le frontiere ricampionate stimate attribuendo diversi valori al parametro N

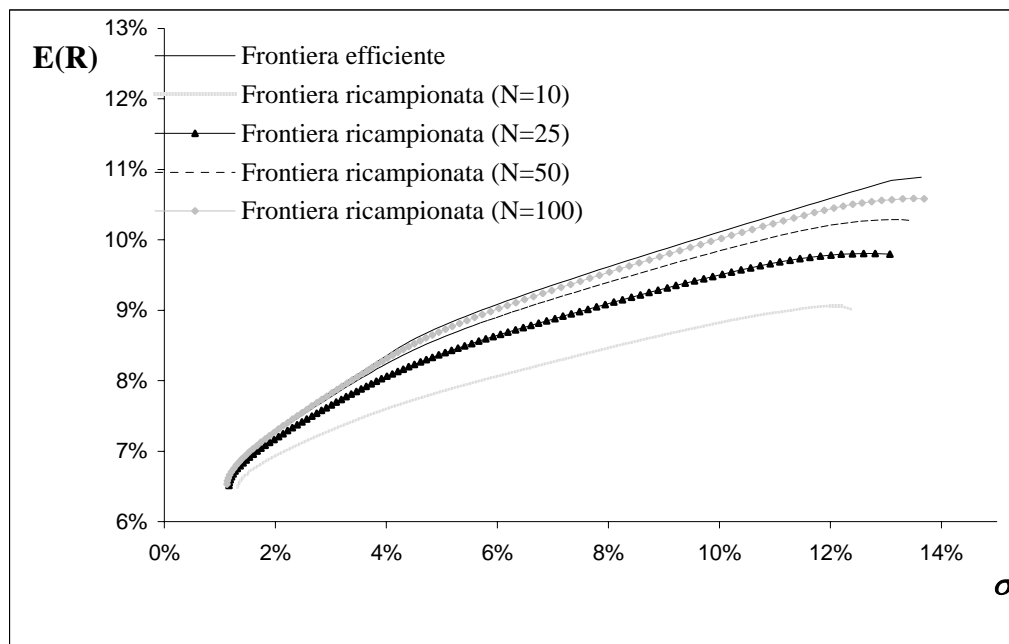
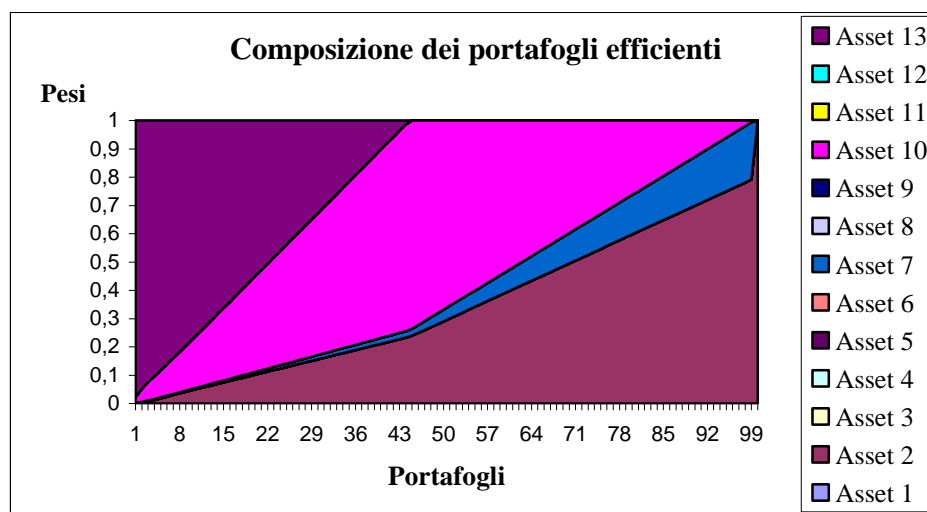
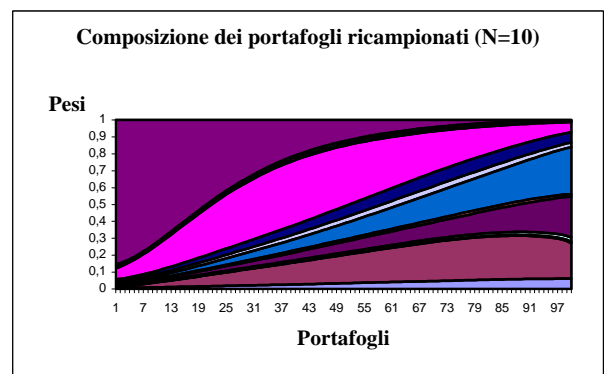
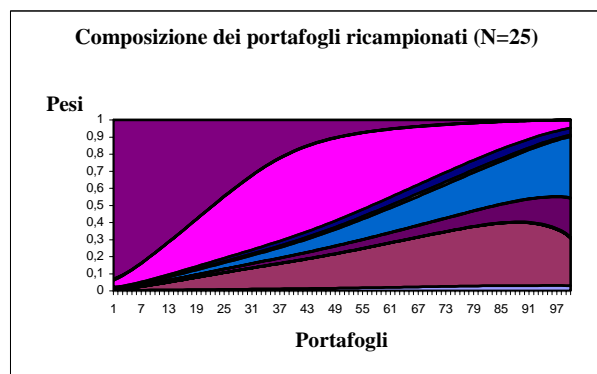
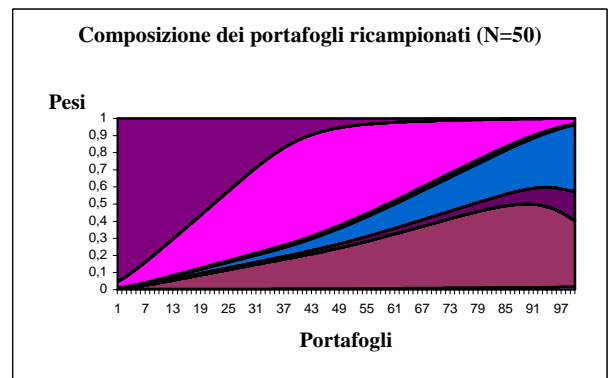
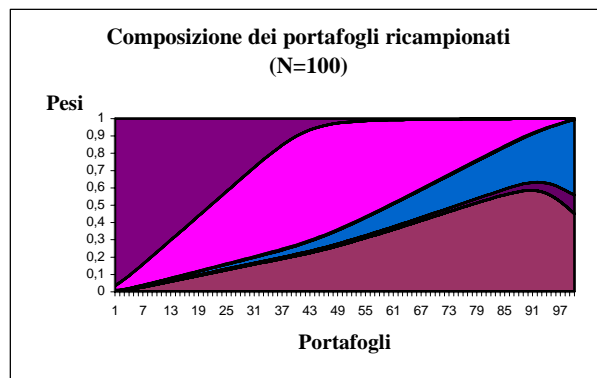


Figura 4.18: Composizione dei portafogli efficienti e di quelli ricampionati





In sintesi, utilizzando un valore di N basso, la frontiera ricampionata attribuisce scarso valore agli input creando portafogli molto diversificati (la strategia tende a “degenerare” verso una *naive portfolio formation rule*); viceversa, optando per un valore di N alto, i portafogli ricampionati assumono una composizione molto simile a quella della frontiera efficiente stimata ex-ante. Tuttavia, la predilezione per un approccio prudente e la conseguente esigenza di non esporsi sensibilmente al problema della distanza tra *input* attesi ed *input* effettivi dovrebbero sempre suggerire l’uso di valori di N non eccessivamente elevati.

Pur senza l’ambizione di riconoscerle rigore metodologico, si propone una metodologia che può essere applicata allo scopo di supportare l’*asset manager* nella scelta del valore appropriato da attribuire al parametro N. Tale logica si basa sulle proprietà delle medie campionarie. Dato un campione casuale estratto da una distribuzione normale, la media campionaria ha anch’essa una distribuzione normale. Più nello specifico, indicato con \bar{X} il rendimento medio campionario di un campione casuale composto da N* rendimenti estratti da una distribuzione normale con media

$E(R)$ e deviazione standard σ , \bar{X} ha anch'esso distribuzione normale con media $E(R)$ e deviazione standard $\sigma/\sqrt{N^*}$ ²⁰.

Ipotizziamo che l'*asset manager* abbia stimato – per 13 *asset class* e senza l'ausilio di un campione casuale di osservazioni – i parametri della tabella 4.11. Focalizzando l'attenzione sul rendimento atteso, l'*asset manager* è chiamato a stimare, per ciascun mercato, l'intorno $[\alpha_1; \alpha_2]$ di $E(R)$ che ha una probabilità del 95% di contenere lo stimatore \bar{X} . Definita:

$$(4.9) \quad n\left(\bar{X}; E(R); \frac{\sigma^2}{N^*}\right)$$

la funzione di densità di probabilità gaussiana della variabile aleatoria \bar{X} avente rendimento atteso $E(R)$ e deviazione standard σ^2/N^* , possiamo scrivere²¹:

$$(4.10) \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} n\left(\bar{X}; E(R); \frac{\sigma^2}{N^*}\right) d\bar{X} = 95\%$$

La Tabella 4.12 riporta i valori estremi α_1 e α_2 selezionati dall'*asset manager*. *Coeteris paribus*, maggiore è la distanza tra i *lower* e *upper bound*, più elevata è l'incertezza relativa al valore del rendimento atteso del singolo mercato.

Tabella 4.12: I *lower* e *upper bound* dello stimatore \bar{X} (intervallo di confidenza del 95%).

²⁰ Per dimostrare ciò è frequente ricorrere al metodo della funzione generatrice dei momenti. Si veda Mood, Graybill e Boes (1997).

²¹ Alternativamente, possiamo scrivere:

$$\Pr(\alpha_1 \leq \bar{X} \leq \alpha_2) = 95\% .$$

Questo calcolo andrebbe sviluppato utilizzando le variabili di *input true*, ma in assenza di queste si opta per le stime *biased*. Questa semplificazione ha la stessa natura di quella alimentata nel processo di *resampling*TM quando si sviluppano le simulazioni Monte Carlo sulla base delle stime incerte.

Assel Class	<i>Lower bound</i>	Rendimenti Attesi	<i>Upper bound</i>
Asset 1	<i>2,00%</i>	8,15%	<i>14,00%</i>
Asset 2	<i>3,00%</i>	10,89%	<i>15,00%</i>
Asset 3	<i>-12,00%</i>	-3,71%	<i>7,00%</i>
Asset 4	<i>-1,00%</i>	4,76%	<i>8,00%</i>
Asset 5	<i>2,00%</i>	8,80%	<i>13,00%</i>
Asset 6	<i>1,00%</i>	6,10%	<i>10,00%</i>
Asset 7	<i>3,00%</i>	10,77%	<i>15,00%</i>
Asset 8	<i>-1,00%</i>	4,63%	<i>8,20%</i>
Asset 9	<i>1,00%</i>	5,24%	<i>9,00%</i>
Asset 10	<i>3,80%</i>	7,61%	<i>9,00%</i>
Asset 11	<i>-2,20%</i>	2,32%	<i>6,00%</i>
Asset 12	<i>-3,00%</i>	2,98%	<i>7,00%</i>
Asset 13	<i>5,00%</i>	6,52%	<i>7,00%</i>

Date le proprietà della distribuzione normale è possibile impostare una ottimizzazione matematica che restituisca (per ogni mercato) il valore di N^* tale per cui la probabilità che \bar{X} sia compreso nell'intorno stimato risulti pari al 95%. In termini analitici l'ottimizzazione da risolvere è la seguente:

$$(4.11) \quad \min_{N^*} \left| \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} n \left(\bar{X}; E(R); \frac{\sigma^2}{N^*} \right) d\bar{X} \right\} - 95\% \right|$$

La Tabella 4.13 mostra i valori di N^* così calcolati; il valore medio approssimato all'intero più vicino - nell'esempio numerico pari a 44 – identifica la dimensione da attribuire al parametro N^* , in modo da trasferire alle frontiere statisticamente equivalenti la medesima incertezza espressa dagli *asset manager* attraverso la stima dei *range* $[\alpha_1; \alpha_2]$ dei rendimenti attesi. Ad intervalli delle stime più ampi (ovvero in presenza di stime più incerte e quindi meno affidabili) vengono associati valori N^* minori che alimentano un processo di *resamplingTM* in grado di favorire una maggiore diversificazione (cfr. Figura 4.17) ai danni della redditività attesa dei portafogli.

Tabella 4.13: I valori N^* per le singole *asset class* ed il corrispondente valore medio

Assel Class	N*
Asset 1	31,26
Asset 2	30,08
Asset 3	29,42
Asset 4	116,62
Asset 5	97,33
Asset 6	52,08
Asset 7	47,27
Asset 8	27,35
Asset 9	43,16
Asset 10	25,49
Asset 11	37,17
Asset 12	21,32
Asset 13	15,18
Valore medio di N*	44,13

In assenza di stime campionarie in grado di dare obiettività alla dimensione del parametro N , la tecnica appena descritta può rappresentare un valido punto di partenza al fine di identificare l'ampiezza delle serie simulate in grado di riflettere l'incertezza delle stime dei rendimenti attesi. Il lettore attento potrà obiettare che la dimensione del parametro N dovrebbe dipendere anche dall'incertezza di σ e ρ . Ciò nonostante, la decisione di semplificare l'approccio focalizzandosi sul solo rendimento atteso non è priva di fondamento; infatti, come si avrà modo di sottolineare nel prossimo capitolo, è piuttosto usuale sviluppare modelli che contemplano l'incertezza della sola variabile rendimento atteso e trattano le restanti variabili come *true*. Tale *modus operandi* è giustificato dal fatto che le stime dei rendimenti attesi sono soggette ad un grado di incertezza maggiore delle misure di rischio e correlazione; a tal proposito Black (1993) afferma: «*Explaining variance is easy. We can use daily data to estimate covariances [...] Estimating expected return is hard. Daily data hardly help at all*». A costo di essere ripetitivi si sottolinea che la logica testé descritta non ha alcuna aspirazione di essere metodologicamente rigorosa.

4.3.2 *ResamplingTM versus Efficient portfolio*

Lo scopo di questo paragrafo, che chiude il capitolo dedicato alle tecniche euristiche, è quello di valutare, con l'ausilio di un test di simulazione, se i portafogli ricampionati presentino una migliore performance *out-of-sample* rispetto ai portafogli

alla Markowitz.

Ipotizziamo che un *asset manager*, con orizzonte temporale annuale, abbia selezionato 12 asset class e che i parametri di *input true* siano quelli riportati nella Tabella 4.14.

Tabella 4.14: I parametri true delle 12 asset class selezionate

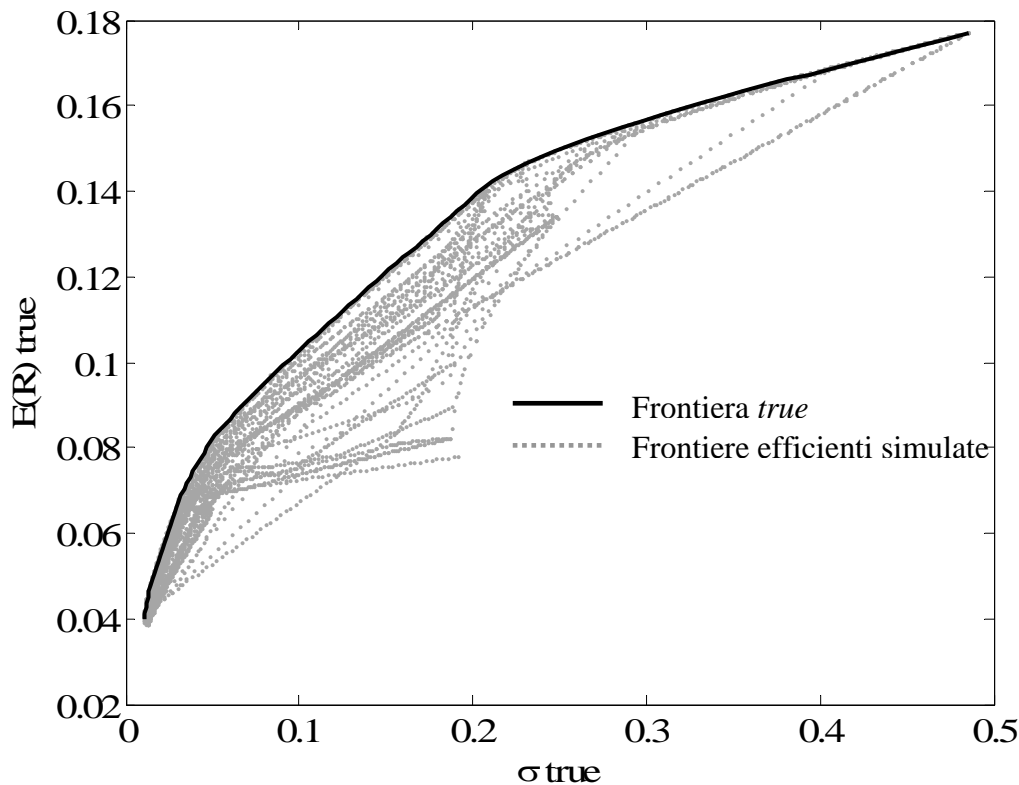
Mercati	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi
Monetario area Euro	3,83%	1,30%
Obbligazionario Area Euro	6,46%	4,94%
Azionario Mondo Energia	14,01%	20,90%
Azionario Mondo Materiali	7,79%	19,22%
Azionario Mondo Industriali	7,64%	20,20%
Azionario Beni Voluttuari	8,20%	22,32%
Azionario Mondo Beni di Prima Necessità	9,22%	17,08%
Azionario Mondo Salute	13,40%	24,87%
Azionario Mondo Finanza	9,56%	17,97%
Azionario Mondo Information Technology	17,71%	48,60%
Azionario Mondo Telecomunicazioni	8,11%	31,84%
Azionario Mondo Pubblica Utilità	8,22%	18,77%

ρ	M. 1	M. 2	M. 3	M. 4	M. 5	M. 6	M. 7	M. 8	M. 9	M. 10	M. 11	M. 12
M. 1	1	0,64	-0,14	-0,48	-0,26	-0,14	0,33	0,44	-0,07	-0,02	0,00	-0,10
M. 2	0,64	1	-0,30	-0,69	-0,50	-0,49	0,22	0,31	-0,24	-0,38	-0,33	-0,02
M. 3	-0,14	-0,30	1	0,75	0,88	0,73	0,65	0,61	0,87	0,59	0,55	0,64
M. 4	-0,48	-0,69	0,75	1	0,89	0,80	0,09	0,06	0,61	0,69	0,56	0,29
M. 5	-0,26	-0,50	0,88	0,89	1	0,89	0,42	0,45	0,87	0,79	0,71	0,58
M. 6	-0,14	-0,49	0,73	0,80	0,89	1	0,36	0,38	0,72	0,94	0,92	0,37
M. 7	0,33	0,22	0,65	0,09	0,42	0,36	1	0,95	0,76	0,24	0,35	0,80
M. 8	0,44	0,31	0,61	0,06	0,45	0,38	0,95	1	0,78	0,32	0,39	0,78
M. 9	-0,07	-0,24	0,87	0,61	0,87	0,72	0,76	0,78	1	0,59	0,61	0,83
M. 10	-0,02	-0,38	0,59	0,69	0,79	0,94	0,24	0,32	0,59	1	0,93	0,21
M. 11	0,00	-0,33	0,55	0,56	0,71	0,92	0,35	0,39	0,61	0,93	1	0,33
M. 12	-0,10	-0,02	0,64	0,29	0,58	0,37	0,80	0,78	0,83	0,21	0,33	1

Poiché l'*asset manager* non dispone delle stime corrette, si ipotizza che egli estragga i parametri necessari per l'ottimizzazione da serie campionarie di rendimenti annuali di lunghezza pari ad 8 anni. Allo scopo di imitare questo comportamento, ricorriamo alla tecnica Monte Carlo che, sulla base degli input della Tabella 4.14, permette di simulare serie di rendimenti di ampiezza $N=8$, dalle quali estrapolare gli *input* simulati. Nello specifico, sviluppiamo 50 simulazioni Monte Carlo le quali restituiscono altrettanti set di input $\left[E(R)_i^{Sim}, \sigma_{ij}^{Sim} \right]$ utilizzati per stimare la composizione di 50 frontiere efficienti. La Figura 4.19 mostra le combinazioni rischio-

rendimento dei portafogli efficienti calcolate sulla base dei parametri corretti. Non tutte le frontiere risultano essere coerenti con il principio media varianza; ciò accade perchè tali portafogli sono raffigurati utilizzando parametri di rendimento, rischio e correlazione diversi da quelli utilizzati per la loro stima. Chiaramente, tutte le frontiere simulate sono dominate dalla frontiera *true* calcolata sulla base degli input corretti; in alcuni casi l'errore nelle stime è così elevato da produrre delle combinazioni rischio-rendimento sensibilmente peggiori di quelle massime conseguibili in assenza di errori. Questa differenza in termini di rischio e redditività è riconducibile al fatto che i dati simulati spingono verso portafogli composti da *asset class* che verrebbero ignorate se si disponesse delle stime esatte²².

Figura 4.19: Le combinazioni rischio-rendimento *true* delle 50 frontiere efficienti calcolate sulla base degli input simulati

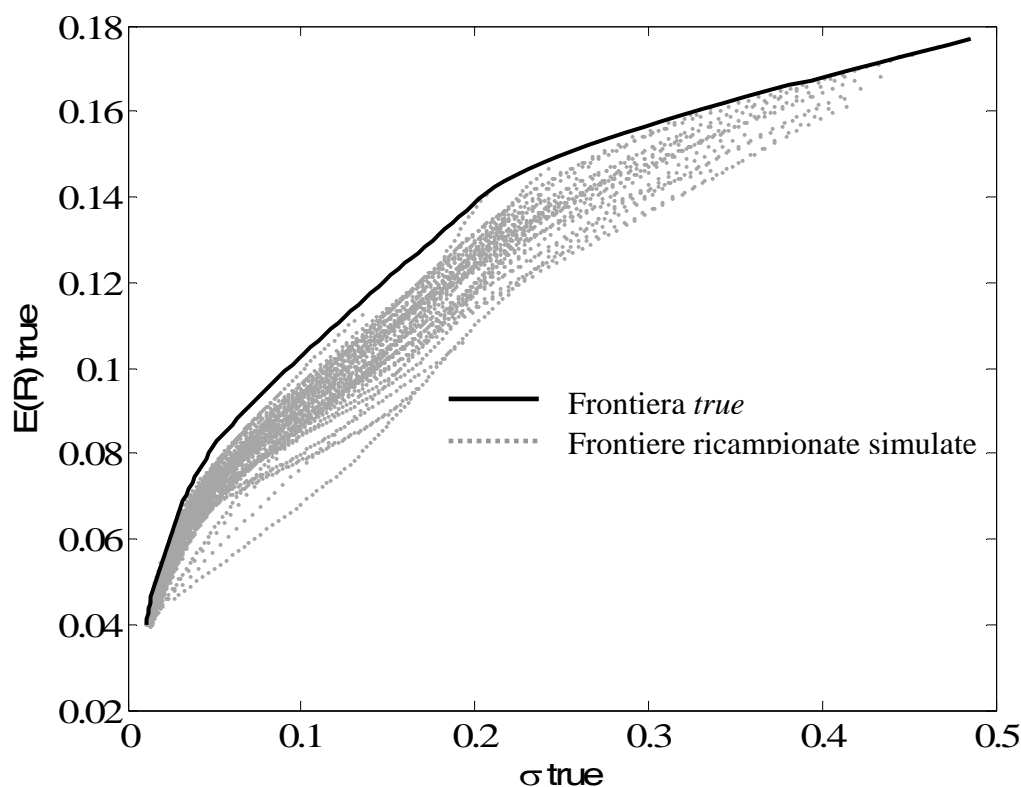


²² Si può affermare che a causa dell'*estimation error* vi è una elevata distanza euclidea tra i portafogli efficienti *true* e quelli simulati.

A questo punto associamo a ciascuna delle 50 frontiere efficienti simulate una corrispondente frontiera ricampionata. A tal fine occorre reiterare per 50 volte la tecnica del *resampling*TM descritta all'inizio del paragrafo 4.3, partendo dai 50 set di input $[E(R)_i^{Sim}, \sigma_{ij}^{Sim}]$ già utilizzati per la stima delle frontiere efficienti simulate. Più nello specifico, in ogni ricampionamento si sono simulate serie di rendimenti di ampiezza 8 anni e si sono lanciate 500 simulazioni Monte Carlo²³. La Figura 4.20 mostra le combinazioni rischio-rendimento dei portafogli ricampionati calcolate sulla base dei parametri esatti. Il confronto tra le Figure 4.19 e 4.20 permette di apprezzare come i portafogli ricampionati presentino, rispetto ai portafogli efficienti, una minore dispersione delle combinazioni rischio-rendimento *true*. Questo accadimento (proprio anche delle frontiere vincolate) denota la maggiore capacità del *resampling*TM di produrre soluzioni meno soggette al problema dell'*estimation error*: grazie alla minore differenza di composizione tra portafogli efficienti *true* e portafogli ricampionati, questi ultimi, se valutati sulla base dei parametri corretti, mostrano la tendenza a mantenere buone combinazioni rischio-rendimento. Si noti, ad esempio, come i portafogli efficienti simulati mostrino una maggiore attitudine a collocarsi più in basso e a destra, popolando così un'area di elevata inefficienza.

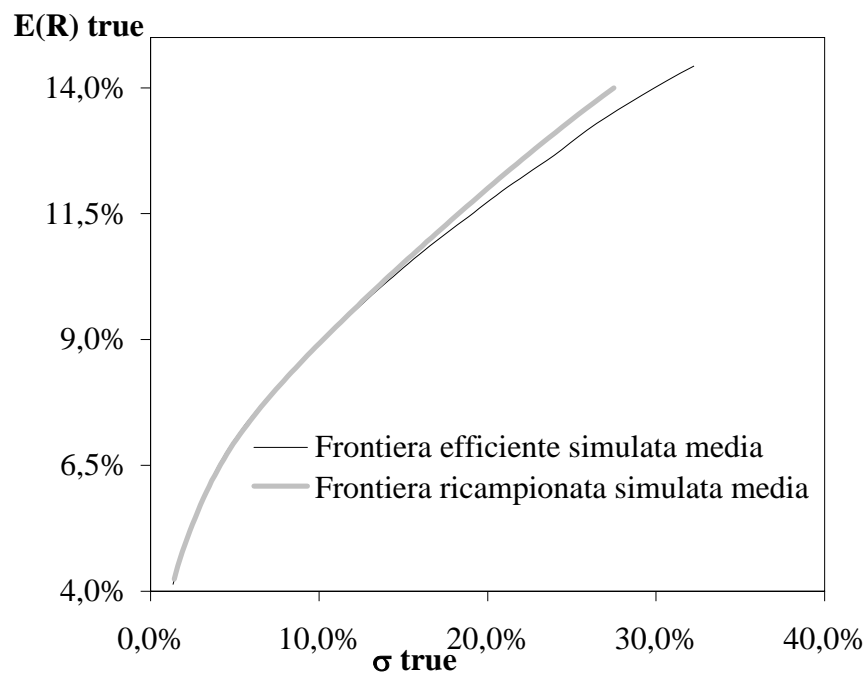
Figura 4.20: Le combinazioni rischio-rendimento *true* delle 50 frontiere ricampionate calcolate sulla base degli input simulati

²³ Dovendo reiterare 50 processi di *resampling*TM si è deciso di ridurre il parametro N da 1.000 a 500.



Allo scopo di giungere ad una valutazione sintetica della differente performance *out-of-sample* dei portafogli, si calcola la media dei rendimenti e dei rischi delle 50 frontiere efficienti e delle 50 ricampionate. La Figura 4.21 mostra che, in media, i *resampled portfolio* tendono a performare meglio di quelli efficienti simulati, e conferma così i pericoli che si celano dietro la scelta di costruire portafogli ignorando il problema della qualità delle stime: «*Uncertainty about parameter values leads to suboptimal portfolio choices*» (Jorion, 1986).

Figura 4.21: Le combinazioni rischio-rendimento media delle frontiere efficienti e ricampionate



L'analisi dei modelli euristici termina qui. Il compito del prossimo e conclusivo capitolo sarà quello di dimostrare che le problematiche che accompagnano l'applicazione pratica del modello di Markowitz possono essere fronteggiate ricorrendo anche a tecniche bayesiane.

INDICE CAPITOLO 5

CAPITOLO 5: ASSET ALLOCATION BAYESIANA.....	197
5.1 Introduzione	197
5.2 Gli stimatori bayesiani.....	200
5.3 Gli <i>shrinkage estimator</i>.....	206
5.3.1 Dalla teoria alla pratica	211
5.3.2 <i>Shrinkaged</i> versus <i>sampled</i> portafoglio	226
5.3.3 <i>Una riflessione finale</i>	231
5.4 Il modello di Black e Litterman	232
5.4.1 <i>Le analytics del modello</i>	238
5.4.2 <i>Applicazione pratica</i>	250
5.5 Combinare modelli euristici e bayesiani	271

CAPITOLO 5: ASSET ALLOCATION BAYESIANA

«*The rational investor is a bayesian*».
(H. M. Markowitz)

5.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti si è più volte evidenziata la capacità dell'*estimation error* di impoverire le proprietà dei portafogli efficienti. Markowitz (1952) era perfettamente consapevole della necessità di accrescere la qualità delle stime («*One suggestion as to tentative μ_i , σ_{ij} is to use the observed μ_i , σ_{ij} for some period of the past. I believe that better methods, which take into account more information, can be found*»). Tuttavia egli, focalizzandosi sulla fase di ottimizzazione, definisce il problema delle stime “*another story*”, lasciando così ad altri studiosi il compito di affrontarlo.

L'appello di Markowitz ha sortito effetti insperati, alimentando un copiosissimo filone di studi alla ricerca di stimatori più affidabili da utilizzare nella ottimizzazione media-varianza. Il compito di questo capitolo è passare in rassegna le soluzioni che, agendo direttamente sui parametri di *input*, permettono di alleviare molti dei *pitfall* dei portafogli alla Markowitz.

Data l'impossibilità di conoscere con certezza la distribuzione dei rendimenti delle *asset class*, è prassi frequente ricorrere alla *classical rule*, rimpiazzando così i parametri *true* con stimatori estratti da campioni storici. Tuttavia, l'*asset manager* razionale non è neutrale al problema dell'incertezza ed è quindi chiamato ad identificare stimatori che risentono meno del problema dell'*estimation error*. È significativo rilevare che il problema della qualità degli *input* non è uniformemente distribuito tra i parametri $E(R)$, σ e ρ , poiché il deterioramento della performance *out-of-sample* dei portafogli efficienti è dovuto prevalentemente alla qualità delle stime del rendimento atteso. A tal proposito, Jorion (1985) scrive: «*Uncertainty in variances and covariances is not as critical*

because they are more precisely estimated». In linea con questa prospettiva focalizzeremo la nostra attenzione prevalentemente sulla variabile $E(R)$.

Allo scopo di fugare qualsiasi dubbio circa le scarse capacità previsionali delle medie campionarie, seguiamo la metodologia proposta da Jorion (1985)¹.

Dato il k -esimo mercato, definiamo:

- $r_{k,t}$ = il rendimento mensile che il mercato consegue al tempo t ;
- $\bar{r}_{k,t-1}$ = la media mobile campionaria degli ultimi n rendimenti mensili della finestra temporale $(t-n; t-1)$.

Regredendo (con il metodo *OLS*) $r_{k,t}$ rispetto a $\bar{r}_{k,t-1}$ si testa la capacità delle medie campionarie di spiegare il rendimento futuro del mercato²:

$$(5.1) \quad r_{k,t} = \beta_k \cdot \bar{r}_{k,t-1} + \varepsilon_{k,t-1}$$

Qualora la media campionaria palesasse eccellenti doti previsionali, il coefficiente β dovrebbe assumere un valore prossimo all'unità e l' R^2 della regressione dovrebbe essere prossimo a 1.

Passando all'esempio numerico, gli indici di mercato analizzati sono i seguenti:

- MSCI Europe - Gross Index;
- MSCI North America - Gross Index;
- MSCI Japan - Gross Index;
- MSCI Pacific free ex Japan - Gross Index;
- MSCI EM (Emerging Markets) - Gross Index.

I rendimenti (espressi in euro) utilizzati nell'analisi sono relativi al periodo gennaio 1988 – dicembre 2006; la finestra temporale utilizzata per la stima della media campionaria è di 12 rendimenti mensili. La Tabella 5.1 mostra i risultati delle regressioni.

A conferma della necessità di trovare soluzioni alternative alla *classical rule*, i valori di R^2 confermano lo scarso potere previsionale delle medie campionarie; i coefficienti beta appaiono significativamente distanti dal valore unitario.

¹ Questo procedimento è a sua volta tratto da Fama (1976b).

² Si assume che la retta di regressione lineare abbia intercetta nulla. Ecco come Jorion (1995) giustifica questa scelta: «*If the intercept is eliminated, however, I hope that the level of returns – rather than variations – will be explained by past averages. In addition, with slowly varying expected returns, the moving average should capture some of the non-stationarity in the series*».

Tabella 5.1: Analisi della capacità previsiva delle medie campionarie

	β_k (<i>Standard Error</i>)	Intervallo di confidenza (95%) di β_k		Stat t	R ²	Durbin- Watson
MSCI Europe	0,532 (0,170)	0,20	0,87	3,128	0,044	1,853
MSCI North America	0,492 (0,176)	0,14	0,84	2,792	0,035	1,917
MSCI Japan	0,138 (0,192)	-0,24	0,52	0,718	0,002	1,827
MSCI Pacific Free ex Japan	0,224 (0,206)	-0,18	0,63	1,083	0,005	1,906
MSCI Emerging Market	0,332 (0,191)	-0,04	0,71	1,740	0,014	1,581

In generale, è possibile identificare due soluzioni utili per migliorare l'efficacia delle stime campionarie nelle ottimizzazioni di portafoglio:

- modelli fattoriali;
- stimatori *bayesiani*.

L'utilizzo dei modelli fattoriali è appena accennato³, mentre ci si focalizzerà sull'implementazione delle logiche bayesiane.

Allo scopo di ridurre l'errore statistico delle stime campionarie è possibile ricorrere ad una struttura fattoriale in grado di ridurre i *free parameter* della matrice delle covarianze⁴. Tale soluzione è stata originariamente proposta da Sharpe che, nel suo lavoro del 1963, suggerisce di utilizzare nelle ottimizzazioni media-varianza la matrice delle covarianze⁵ implicita in un modello di mercato unifattoriale, il cui *common factor*

³ La scelta di non effettuare un approfondimento dei modelli fattoriali ha come sua unica giustificazione la valenza non enciclopedica del lavoro: l'obiettivo non è quello di analizzare la totalità delle tecniche implementabili per scopi di *asset allocation*, ma piuttosto quella di approfondire le soluzioni che, per ampiezza di utilizzo, recente creazione o interesse di chi scrive, sono reputate meritevoli di approfondimento.

⁴ Sulla capacità dei modelli fattoriali di migliorare la performance delle stime campionarie, si veda Chan, Karcerski e Lakonishok (1999).

⁵ Definiti:

- B = il vettore colonna che accoglie i coefficienti β delle N *asset class*;
- COV_ε = la matrice delle covarianze dei residui (si ipotizza che questi ultimi siano non correlati, conseguentemente i valori di COV_ε esterni alla diagonale principale assumono tutti valore nullo);
- σ_{mkt}^2 = la varianza del portafoglio di mercato;

la matrice delle covarianze implicita nel modello è così calcolata:

esplicito è rappresentato dal rendimento del portafoglio di mercato (r_{mkt}):

$$(5.2) \quad r_i = \alpha_i + \beta_i \cdot r_{mkt} + \varepsilon_i$$

Il pericolo che si nasconde dietro questo approccio è ben espresso da Brandt (1995): «*A single factor may not capture all of the covariations among assets, leading not only to a biased but potentially systematically biased estimate of the return covariance matrix*». Il passaggio ad un modello multifattoriale si accompagna però alla difficoltà nella selezione dei fattori⁶.

5.2 Gli stimatori bayesiani

L'approccio bayesiano alla selezione di portafoglio affonda le proprie radici nei lavori di Zellner e Chetty (1965), Mao e Sarndal (1966), Kalymon (1971), Barry (1974), Barry e Winkler (1975, 1976), Klein e Bawa (1976, 1977), Brown (1978), Bawa, Brown and Klein (1979). Questo filone letterario trae origine dai limiti che contraddistinguono la *classical rule* e dal conseguente tentativo di sviluppare un nuovo *framework* in grado di porre parziale rimedio al problema dell'*estimation error*.

Nelle pagine precedenti si è più volte sottolineato come l'utilizzo della *classical rule* esaspera il problema della efficienza *out-of-sample* dei portafogli, amplificando così le perplessità di un approccio che si limita ad estrapolare le stime dei parametri ricorrendo alle sole informazioni disponibili in un campione storico di rendimenti. Una soluzione utile allo scopo di mitigare questo problema consiste nell'ampliare il set informativo dal quale estrapolare gli *input* dell'ottimizzazione. Più nello specifico, alle informazioni campionarie andrebbero affiancate altre informazioni (definite *prior information* o più semplicemente *prior*) che possono trarre origine dall'esperienza e dalle competenze degli *asset manager*⁷. La statistica bayesiana, che ha tra i suoi tratti distintivi proprio la capacità di combinare informazioni campionarie e *prior information*, offre così un vantaggio operativo di non poco conto: gli stimatori finali

$$\Sigma = \sigma_{mkt}^2 \cdot B \cdot B^T + COV_{\varepsilon}$$

⁶ Sulla scelta dei *common factor*, si vedano Merton (1973), Chen, Roll e Ross (1986), Connor e Korajczyk (1988), Fama e French (1993).

⁷ Si fa notare che questo utilizzo dell'approccio bayesiano nella costruzione di portafoglio, descritto con precisione analitica solo negli anni '70, era già presente *in nuce* nel pensiero di Markowitz (1952): «*My feeling is that the statistical computation should be used to arrive at a tentative set of μ_i e $\sigma_{i,j}$. Judgment should then be used in increasing or decreasing some of this μ_i e $\sigma_{i,j}$ on the basis of factors or nuances not taken into account by the formal computations*».

possono essere influenzati direttamente dalle *view* (o opinioni) di mercato degli *asset manager*⁸, favorendo così la costruzione di *input* (e conseguentemente di portafogli) più coerenti con la aspettative degli *asset manager*.

Per apprezzare al meglio il contributo offerto dalla statistica bayesiana nella *portfolio construction*, si analizzano le differenze esistenti tra stimatori classici e stimatori *bayesiani*⁹.

Nell'approccio statistico tradizionale, uno stimatore non è altro che una funzione che processa una serie storica di osservazioni passate, restituendo così un valore puntuale $\hat{\theta}$ che si ci auspica prossimo al vero parametro θ^{true} ignoto. Così, data una serie di 20 rendimenti annuali, lo stimatore classico della media campionaria è dato da:

$$(5.3) \quad \hat{\mu} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} r_i$$

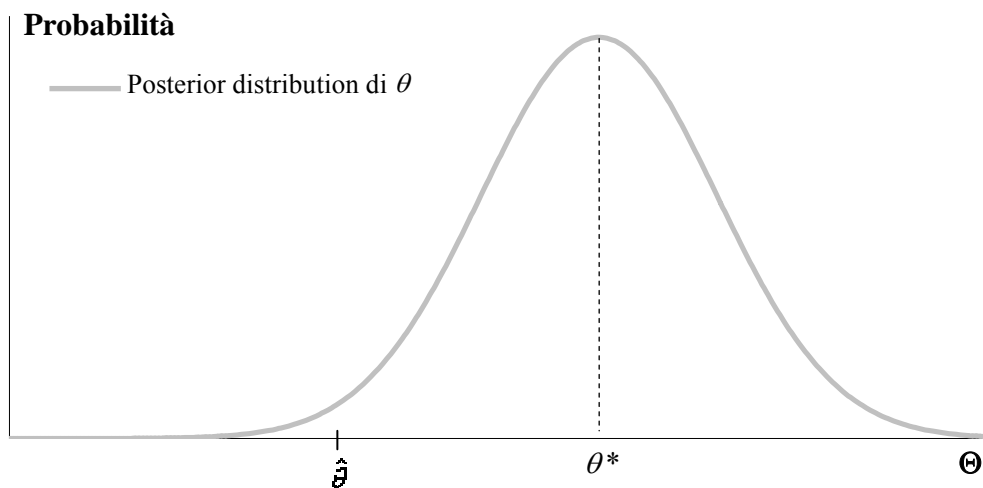
Il processo di stima basato sulla statistica bayesiana differisce da quello testé descritto tanto per la natura degli *input* processati, quanto per l'*output* prodotto.

In primo luogo, l'approccio bayesiano non restituisce stime puntuali, bensì una variabile aleatoria θ , ovvero una funzione di densità di probabilità (definita normalmente *posterior density*) del parametro ricercato. La Figura 5.1 offre una rappresentazione grafica del difforme risultato conseguito dal processo di stima classica e bayesiana.

Figura 5.1: Stima bayesiana *versus* stima classica

⁸ Questo tema verrà ripreso ed approfondito nel paragrafo 5.4, dedicato al modello di Black-Litterman.

⁹ L'analisi è tratta da Meucci (2005) e Brandt (1995).



Le stime puntuali ($\hat{\theta}$), se utilizzate, sono considerate corrette al 100%; alternativamente, in un contesto bayesiano il parametro ignoto θ^{true} è ipotizzato essere “nascosto” nello spazio di valori espressi dalla *posterior distribution*, con una maggiore probabilità di collocarsi in corrispondenza della media a posteriori (θ^*).

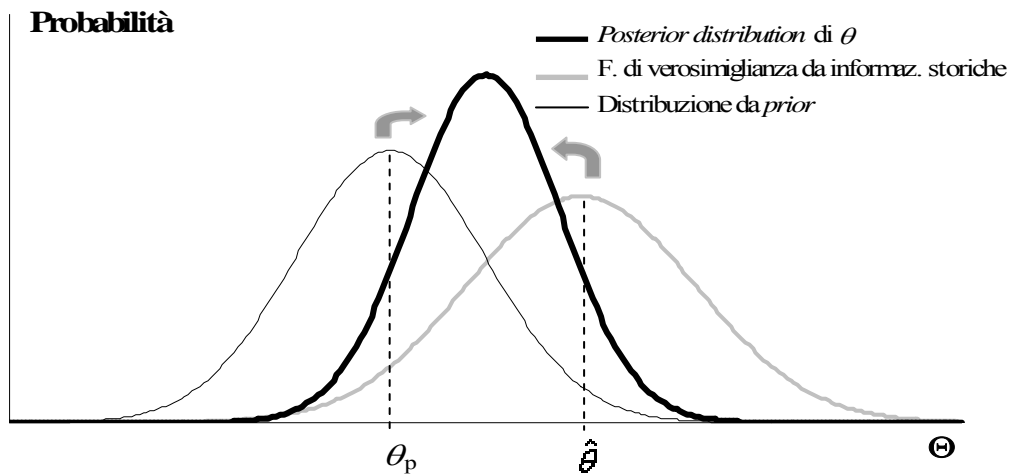
Della seconda fonte di difformità si è già detto; la stima bayesiana origina dalla combinazione di:

- informazioni storiche espresse da un campione di osservazioni;
- una informazione *prior* che esprime il bagaglio di conoscenze ed esperienze personali dell'*asset manager*.

Il campione di rendimenti storici di ampiezza T dà luogo ad una distribuzione di probabilità (la funzione di verosimiglianza) della variabile θ ; maggiore è il valore T , minore è la dispersione della variabile attorno a $\hat{\theta}$. L'esperienza dell'*asset manager* permette di identificare un valore *prior* θ_p la cui incertezza può essere “catturata” definendo un numero T_{prior} di pseudo-osservazioni. Al crescere di T_{prior} , aumenta la confidenza dell'*asset manager* nella propria esperienza e, conseguentemente, aumenta anche la concentrazione della *prior distribution* attorno a θ_p .

La logica bayesiana consiste nel combinare le due distribuzioni di probabilità traenti origine rispettivamente dalle informazioni storiche e dal *prior*, stimando così la *posterior distribution* (Figura 5.2).

Figura 5.2: La stima della *posterior distribution*



A crescere di T (di T_{prior}), come conseguenza della maggiore affidabilità dell'informazione storica (del *prior*), la *posterior distribution* vedrà aumentare la sua concentrazione attorno a $\hat{\theta}$ (a θ_p).

Indichiamo con Y_N l'insieme dei dati storici utilizzati per modellare la distribuzione storica e con $f_p(\theta)$ la distribuzione di probabilità di θ riconducibile al *prior*. Applicando il teorema di Bayes si ricava la *posterior distribution* di θ :

$$(5.4) \quad f(\theta|Y_N) = \frac{f(Y_N|\theta) \cdot f_p(\theta)}{f(Y_N)}$$

Questo risultato può essere usato anche allo scopo di ottenere la distribuzione *soggettiva* dei rendimenti futuri (\tilde{r}) condizionata dal *prior* e dalle osservazioni storiche:

$$(5.5) \quad f(\tilde{r}|Y_N) = \int f(\tilde{r}|\theta) \cdot f(\theta|Y_N) \cdot d(\theta)$$

Da un punto di vista concettuale l'approccio bayesiano è piuttosto semplice da interpretare: esso combina le informazioni derivanti da un campione storico con l'esperienza dell'*asset manager*, giungendo così ad una distribuzione soggettiva dei parametri di *input*. Il suo utilizzo, tuttavia, non è privo di asperità: «*It involves multiple integrations. Therefore, the choices of distributions that allow us to obtain analytical results is quite limited*» (Meucci, 2005). Al tentativo di incorporare gli *informative prior* si affianca dunque la difficoltà di assicurare la trattabilità analitica della *posterior distribution*.

Coerentemente con l'obiettivo di produrre delle stime più affidabili dei parametri utilizzati nella ottimizzazione media-varianza, focalizziamo il nostro interesse su un processo bayesiano in grado di restituire stimatori del rendimento atteso e della matrice delle covarianze¹⁰.

Ipotizziamo di disporre di C *asset class*, i cui rendimenti seguono una distribuzione normale multivariata:

$$(5.6) \quad r \sim N(\mu, \Sigma);$$

I rendimenti attesi (identificati dal vettore μ) e la matrice delle covarianze (Σ) sono ignoti. Disponendo di un set di rendimenti storici di ampiezza pari a T , è possibile estrapolare la media campionaria ($\hat{\mu}$) e la matrice delle covarianze campionarie ($\hat{\Sigma}$).

Passando al *prior information*, al fine di garantire la trattazione analitica della *posterior distribution*, modellizziamo il *prior* come una *NIW (Normal-Inverse-Wishart) distribution*¹¹. In altri termini, “spezziamo” la distribuzione di μ nella distribuzione condizionale di μ dato Σ e nella distribuzione di Σ .

Ipotizziamo che la distribuzione condizionale di μ , dato Σ , sia una normale multivariata con valori medi pari a μ_{prior} e matrice delle covarianze pari a Σ/T_{prior} :

$$(5.7) \quad \mu|\Sigma \sim N(\mu_{prior}, \frac{\Sigma}{T_{prior}})$$

T_{prior} è uno scalare positivo che riflette la fiducia nei confronti di μ_{prior} : maggiore è il suo valore, minore è la dispersione della distribuzione normale multivariata e, conseguentemente, più elevata è la fiducia riposta in μ_{prior} ¹².

Relativamente alla *prior distribution* della matrice delle covarianze Σ , ipotizziamo che quest'ultima segua una distribuzione *Normal-Inverse-Wishart*:

$$(5.8) \quad \Sigma \sim \text{InvW}(v, \frac{\Sigma_{prior}}{v})$$

Σ_{prior} è una matrice quadrata ($K \times K$), simmetrica e definita positiva; v è uno scalare positivo che riflette l'incertezza di Σ_{prior} .

¹⁰ L'analisi segue Meucci (2005). Una trattazione simile è ravvisabile anche in Frost e Savarino (1986), Jorion (1986) e Scherer (2004).

¹¹ Per un approfondimento sulle distribuzioni di Wishart, si vedano Mardia, Kent e Bibby (1979) e Anderson (1984).

¹² Il processo è assimilabile alla stima dei rendimenti medi attraverso un campione di osservazioni di ampiezza T_{prior} , nell'ipotesi in cui la stima campionaria restituisca un valore esatto della matrice delle covarianze Σ .

Barry (1974) dimostra che la *prior distribution* (marginale) di μ è una *t* di *Student*:

$$(5.9) \quad \mu \sim St(v, \mu_{prior}, \frac{\Sigma_{prior}}{T_{prior}})$$

Applicando il teorema di Bayes è possibile, calcolare la *posterior distribution* rispettivamente di μ e Σ ¹³:

$$(5.10) \quad \mu \sim St(v_1, \mu_1, \frac{\Sigma_1}{T_1})$$

$$(5.11) \quad \Sigma \sim InvW(v_1, \frac{\Sigma_1}{v_1})$$

dove:

$$v_1 = (v + T)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{T_1} \cdot (T_{prior} \cdot \mu_{prior} + T \cdot \hat{\mu})$$

$$\Sigma_1 = \frac{1}{v_1} \cdot \left[v \cdot \Sigma_{prior} + T \cdot \hat{\Sigma} + \frac{(\mu_{prior} - \hat{\mu})(\mu_{prior} - \hat{\mu})'}{\frac{1}{T} + \frac{1}{T_{prior}}} \right]$$

Data la *posterior distribution* di μ , è possibile stimarne il valore medio:

$$(5.12) \quad \hat{\mu}_{bayes} = \frac{(T_{prior} \cdot \mu_{prior} + T \cdot \hat{\mu})}{T_{prior} + T}$$

Lo stimatore bayesiano $\hat{\mu}_{bayes}$ si ottiene come media tra l'informazione campionaria ($\hat{\mu}$) e quella *prior* (μ_{prior}). Al crescere della dimensione T del campione lo stimatore $\hat{\mu}_{bayes}$ si avvicina al valore $\hat{\mu}$; di contro, all'aumentare delle pseudo-osservazioni T_{prior} lo stimatore $\hat{\mu}_{bayes}$ tende a μ_{prior} .

In modo equivalente, è possibile calcolare il valore medio della *posterior distribution* di Σ :

¹³ I calcoli analitici sono omessi per non appesantire la trattazione. Per un approfondimento si rimanda a Meucci (2005).

$$(5.13) \quad \hat{\Sigma}_{bayes} = \frac{1}{v + T + N + 1} \cdot \left[v \cdot \Sigma_{prior} + T \cdot \hat{\Sigma} + \frac{(\mu_{prior} - \hat{\mu})(\mu_{prior} - \hat{\mu})'}{\frac{1}{T} + \frac{1}{T_{prior}}} \right]$$

Al crescere della dimensione T del campione lo stimatore $\hat{\Sigma}_{bayes}$ si avvicina al valore $\hat{\Sigma}$; viceversa, all'aumentare delle pseudo-osservazioni T_{prior} , lo stimatore bayesiano tende a Σ_{prior} .

Nella speranza che l'informazione *prior* contribuisca a ridurre il problema della scarsa efficienza *out-of-sample* dei portafogli, gli stimatori bayesiani $\hat{\mu}_{bayes}$ e $\hat{\Sigma}_{bayes}$ possono essere utilizzati come input di una ottimizzazione alla Markowitz. Tali parametri, denominati *classical-equivalent estimator*, sono un esempio di *shrinkage estimators* e sono definiti *Bayes-Stein shrinkage estimator*.

L'analisi prosegue con l'esame degli stimatori di *shrinkage* e del modello di Black-Litterman, entrambi ritenuti conformi alla logica bayesiana.

5.3 Gli *shrinkage estimator*

L'idea di impiegare gli stimatori di *shrinkage* come strumenti utili per affrontare il problema dell'incertezza nelle stime, è da attribuirsi a James e Stein (1961)¹⁴. Per certi versi è sorprendente che la loro intuizione - definita da Lindley (1962) «*One of the most important statistical ideas of the decade*» - non abbia trovato un riconoscimento immediato in ambito statistico. Per ciò che concerne l'utilizzo degli stimatori di *shrinkage* nell'*asset management*, i pionieri sono Jobson, Korkie e Ratti (1979), Jobson e Korkie (1981b), Jorion (1985, 1986) e Frost e Savarino (1986).

Focalizzando l'attenzione sulla previsione dei rendimenti attesi delle *asset class*, cerchiamo di mostrare le ragioni che spingono ad abbandonare una media campionaria a favore di uno stimatore che "si ritrae" (*to shrink*) verso un valore *prior*. A tale scopo, proponiamo una analisi dell'errore nella stima della media campionaria.

Ipotizziamo che i rendimenti attesi di C *asset class* seguano una distribuzione normale multivariata con parametri ignoti μ e Σ :

$$(5.14) \quad r \sim N(\mu, \Sigma)$$

¹⁴ Altrettanto determinante è il contributo di Stein (1955) che dimostra la possibilità di selezionare stimatori meno erratici della media campionaria.

Le medie campionarie delle *asset class* (rappresentate dal vettore $\hat{\mu}$) estratte da un campione di ampiezza T sono anch'esse distribuite normalmente con parametri ignoti μ e Σ/T :

$$(5.15) \quad \hat{\mu} \sim N(\mu, \frac{\Sigma}{T})$$

Allo scopo di sintetizzare in un unico valore l'errore dello stimatore campionario, introduciamo una funzione quadratica di perdita (*loss*):

$$(5.16) \quad Loss(\hat{\mu}, \mu) = (\hat{\mu} - \mu)^T \cdot (\hat{\mu} - \mu)$$

Il valore di questa funzione è nullo solo nell'ipotesi in cui le medie campionarie coincidano perfettamente con i valori *true*. La misura dell'errore può essere ulteriormente sintetizzata stimando il valore atteso della funzione di perdita; calcoliamo così un indicatore, definito *errore* (o *error*), pari al valore atteso della funzione di perdita:

$$(5.17) \quad Err^2(\hat{\mu}, \mu) = E[(\hat{\mu} - \mu)^T \cdot (\hat{\mu} - \mu)] = \frac{tr(\Sigma)}{T}$$

dove $tr(\Sigma)$ identifica la somma di tutti i valori presenti lungo la diagonale principale della matrice delle covarianze.

Come è lecito attendersi, maggiore è l'ampiezza del campione di estrazione della media campionarie, minore è l'errore che si rischia di commettere.

L'*errore* può essere scomposto in due distinte componenti definite *bias* e *inefficiency*; la relazione che lega queste variabili è la seguente:

$$(5.18) \quad Err^2(\hat{\mu}, \mu) = Bias^2(\hat{\mu}, \mu) + Ineff^2(\hat{\mu})$$

Il *bias* è una misura parziale dell'errore che misura la distanza tra il valore atteso della media campionaria $[E(\hat{\mu})]$ e il valore atteso *true* (μ):

$$(5.19) \quad Bias^2(\hat{\mu}, \mu) = [E(\hat{\mu}) - \mu]^T \cdot [E(\hat{\mu}) - \mu] = [\mu - \mu]^T \cdot [\mu - \mu] = 0$$

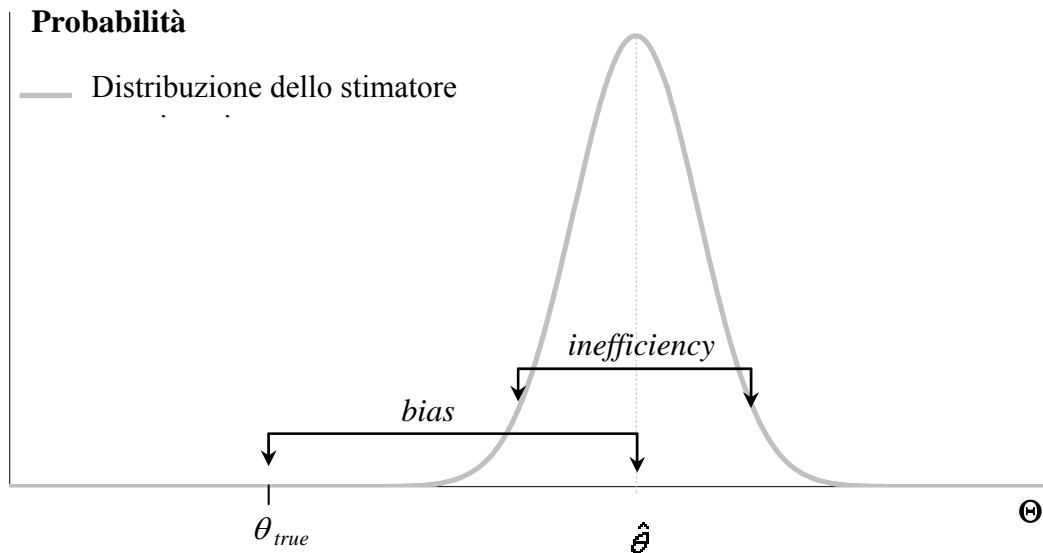
Come noto, la media campionaria è uno stimatore *unbiased*, ovvero immune dall'errore parziale testé menzionato. L'*inefficiency* misura invece la dispersione (la deviazione standard) della media campionaria:

$$(5.20) \quad Ineff^2(\hat{\mu}) = \sigma(\hat{\mu}) = \frac{tr(\Sigma)}{T}$$

$\hat{\mu}$ deve dunque il suo eventuale errore di stima alla sola *inefficiency*. La figura 5.3

offre, per un generico parametro θ , una rappresentazione grafica della differenza tra *bias* e *inefficiency*.

Figura 5.3: Rappresentazione grafica del *bias* e dell'*inefficiency*.



Qualora si voglia identificare uno stimatore di μ caratterizzato da un errore statistico migliore della media campionaria, la variabile sulla quale agire è l'*inefficiency*, non essendovi modo di migliorare la performance in termini di *bias*. L'obiettivo è quindi quello di identificare uno stimatore che, rispetto alla media campionaria, si caratterizzi per una minore *inefficiency*, a costo di non disporre più di uno stimatore *unbiased*. A tal fine, è utile ricorrere a stimatori costanti caratterizzati da valori elevati di *bias*, ma valori nulli di *inefficiency*:

$$(5.21) \quad \mu_{\text{cost}} = A$$

dove A è uno scalare.

James e Stein (1961) dimostrano che per un numero C di variabili aleatorie (indipendenti e normalmente distribuite) maggiore di 2, il vettore $\hat{\mu}$ delle medie campionarie presenta un errore statistico maggiore rispetto ad uno stimatore ottenuto come combinazione tra le medie campionarie stesse ed uno stimatore costante μ_{cost} ¹⁵:

¹⁵ In termini bayesiani μ_{cost} è l'*informative prior*.

$$\begin{aligned}
(5.22) \quad \hat{\mu}_{shrink} &= (1-\alpha) \cdot \hat{\mu} + \alpha \cdot \mu_{cost} \cdot I \\
&= (1-\alpha) \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mu}_C \end{bmatrix} + \alpha \cdot \begin{bmatrix} \mu_{cost} \\ \mu_{cost} \\ \vdots \\ \mu_{cost} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$ e con I che identifica un vettore colonna di tutti valori 1 di dimensione C :

$$(5.23) \quad I = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tali stimatori, denominati *James-Stein shrinkage estimator*, comprimono i valori delle medie campionarie avvicinandoli così allo stimatore costante. Lo scopo è quello di identificare il valore ottimale di α , ovvero il coefficiente di ponderazione in grado di minimizzare la funzione di perdita dello stimatore¹⁶:

$$(5.24) \quad \min_{\alpha} Loss(\mu_{shrink}, \mu) = Loss[(1-\alpha) \cdot \hat{\mu} + \alpha \cdot \mu_{cost} \cdot I, \mu]$$

È dimostrabile¹⁷ che utilizzando una funzione di perdita di questo tipo¹⁸:

$$(5.25) \quad Loss(\hat{\mu}, \mu) = (\hat{\mu} - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\hat{\mu} - \mu)$$

la perdita viene minimizzata per un valore di α pari a:

$$(5.26) \quad \alpha^* = \min \left[1, \frac{1}{T} \cdot \frac{(C-2)}{(\hat{\mu} - \mu_{cost} \cdot I)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\hat{\mu} - \mu_{cost} \cdot I)} \right]$$

L'espressione analitica permette di apprezzare come il coefficiente di *shrinkage* cresca (potenziando così la contrazione delle medie verso lo stimatore costante):

1. all'aumentare del numero C di *asset class*;
2. al ridursi del numero T di osservazioni storiche campionarie;
3. al ridursi della distanza tra le medie campionarie ($\hat{\mu}$) e lo stimatore costante (μ_{cost}).

Per ciò che concerne il valore dello stimatore costante (μ_{cost}), piuttosto che

¹⁶ Nel lavoro di James e Stein (1961) gli autori dimostrano la superiorità degli stimatori di *shrinkage* in presenza di una funzione di perdita quadratica. Brown (1966, 1975) e Berger (1978) confrontano medie campionarie e stimatori di *shrinkage* anche in presenza di funzioni di perdita con forma analitica differente.

¹⁷ Si omettono i tediosi calcoli analitici.

¹⁸ Questa misura che rappresenta la distanza di Mahalanobis sarà oggetto di approfondimento nel paragrafo 5.4.2.

utilizzare un generico scalare, è possibile ricorrere a valori dipendenti dai dati campionari. La *grand mean*, ovvero la media aritmetica delle medie campionarie delle singole *asset class*, può rappresentare un ottimo candidato:

$$(5.27) \quad M_{\text{cost}} = \begin{bmatrix} \mu_{\text{cost}} \\ \vdots \\ \mu_{\text{cost}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^K \frac{\hat{\mu}_i}{C} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^K \frac{\hat{\mu}_i}{C} \end{bmatrix}$$

Alternativamente, Jorion (1985, 1986) suggerisce di utilizzare la *volatility weighted grand mean*:

$$(5.28) \quad M_{\text{cost}} = \begin{bmatrix} \mu_{\text{cost}} \\ \vdots \\ \mu_{\text{cost}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1}}{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot I} \cdot \hat{\mu} \\ \vdots \\ \frac{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1}}{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot I} \cdot \hat{\mu} \end{bmatrix}$$

Si fa notare che il vettore riga che identifica i coefficienti di ponderazione delle medie campionarie:

$$(5.29) \quad W = [w_1 \quad \dots \quad w_c] = \frac{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1}}{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot I}$$

corrisponde alla composizione del portafoglio a *minimum variance* in una ottimizzazione non vincolata¹⁹. Conseguentemente il valore μ_{cost} corrisponde al rendimento medio campionario del portafoglio a minimo rischio.

È bene notare che le soluzioni testé menzionate producono sulle stime un risultato significativamente differente:

- l'utilizzo della *grand mean* comprime le medie campionarie delle *asset class*, incrementando le medie campionarie con valore inferiore alla *grand mean* e riducendo quelle con valore superiore;
- l'uso del rendimento del portafoglio a *minimum variance*, conducendo ad un valore μ_{cost} inferiore alle medie campionarie di quasi tutte le *asset class*, produce una riduzione generalizzata delle medie campionarie di (quasi) tutte le *asset class*; la riduzione è più pronunciata per le *asset class* caratterizzate da valori più elevati di $\hat{\mu}$.

¹⁹ È noto che la composizione del portafoglio a *minimum variance* non è influenzato dai rendimenti attesi degli asset, dipendendo essa dalla sola matrice delle covarianze.

L'utilizzo degli stimatori di *shrinkage* può essere applicato anche alla matrice delle covarianze²⁰:

$$(5.30) \quad \hat{\Sigma}_{shrink} = (1 - \beta) \cdot \hat{\Sigma} + \beta \cdot \Sigma_{cost}$$

5.3.1 Dalla teoria alla pratica

Abbandonando l'impostazione teorica, passiamo alle applicazioni pratiche di questi stimatori. Al fine di renderne più semplice la comprensione, faremo frequente ricorso ad esempi numerici.

Ipotizziamo di voler calcolare uno stimatore affidabile del rendimento annuo atteso delle seguenti *asset class*:

- Mkt 1. Monetario Area Euro;
- Mkt 2. Obbligazionario Area Euro;
- Mkt 3. Obbligazionario Internazionale;
- Mkt 4. Azionario Europa;
- Mkt 5. Azionario Nord America;
- Mkt 6. Azionario Giappone;
- Mkt 7. Azionario Pacifico con esclusione del Giappone;
- Mkt 8. Azionario Paesi Emergenti;

I parametri *true* che ipotizziamo ignoti sono quelli riportati nella Tabella 5.2; i rendimenti attesi dei mercati seguono una distribuzione normale multivariata. Non disponendo delle stime esatte, studiamo due soluzioni alternative: gli stimatori campionari (la *classical rule*) e gli *shrinkage estimator*. Al fine di testare la presunta capacità degli stimatori di *shrinkage* di dominare le stime campionarie, ci serviremo di un test di simulazione. Partendo dai parametri *true* e con l'ausilio della tecnica Monte Carlo, simuliamo delle serie di rendimenti annuali di ampiezza T , grazie alle quali è possibile calcolare il rendimento medio campionario e il corrispondente stimatore di *shrinkage*. Per la media campionario utilizziamo la formula usuale:

$$(5.31) \quad \hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_i$$

²⁰ Sulla forma di Σ_{cost} , sul calcolo di β e per un generale approfondimento dell'applicazione degli *shrinkage estimator* alla matrice delle covarianze, si veda Ledoit e Wolf (2003).

Tabella 5.2: Valore atteso, rischio e correlazione *true* dei rendimenti annuali delle 10 asset class

Indici di Mercato	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi
I. Mkt. 1	5,83%	3,09%
I. Mkt. 2	6,48%	5,31%
I. Mkt. 3	6,86%	8,56%
I. Mkt. 4	13,64%	20,41%
I. Mkt. 5	13,97%	22,05%
I. Mkt. 6	4,85%	31,57%
I. Mkt. 7	15,15%	31,59%
I. Mkt. 8	20,58%	38,72%

Correlazioni	I. Mkt. 1	I. Mkt. 2	I. Mkt. 3	I. Mkt. 4	I. Mkt. 5	I. Mkt. 6	I. Mkt. 7	I. Mkt. 8
I. Mkt. 1	1	0,28	0,28	-0,11	0,03	-0,24	0,08	0,11
I. Mkt. 2	0,28	1	0,56	-0,01	0,06	-0,28	0,12	-0,15
I. Mkt. 3	0,28	0,56	1	0,54	0,64	0,33	0,54	0,44
I. Mkt. 4	-0,11	-0,01	0,54	1	0,90	0,62	0,62	0,63
I. Mkt. 5	0,03	0,06	0,64	0,90	1	0,53	0,46	0,54
I. Mkt. 6	-0,24	-0,28	0,33	0,62	0,53	1	0,74	0,79
I. Mkt. 7	0,08	0,12	0,54	0,62	0,46	0,74	1	0,89
I. Mkt. 8	0,11	-0,15	0,44	0,63	0,54	0,79	0,89	1

Definiti:

- $\hat{\mu}$ = vettore colonna delle medie campionarie;
- C = numero della *asset class*.
- $\hat{\Sigma}$ = matrice delle covarianze campionarie²¹;

il valore dello stimatore costante μ_{cost} è pari al rendimento medio campionario del portafoglio a *minimum variance*:

$$(5.32) \quad \mu_{\text{cost}} = \frac{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1}}{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot I} \cdot \hat{\mu}$$

Lo stimatore di *shrinkage* del rendimento atteso viene quindi calcolato applicando la formula nota:

$$(5.33) \quad \hat{\mu}_{\text{shrink}} = (1 - \alpha) \cdot \hat{\mu} + \alpha \cdot \mu_{\text{cost}} \cdot I$$

²¹ Zellner e Chetty (1965) consigliano di correggere la matrice delle covarianze campionarie nel modo seguente:

$$\frac{T-1}{T-C-2} \hat{\Sigma}$$

Noi non seguiremo questo suggerimento.

Dove il coefficiente di *shrinkage* α viene stimato seguendo Jorion (1985, 1986):

$$(5.34) \quad \alpha = \frac{\delta}{T + \delta}$$

$$\text{con } \delta = \frac{(C + 2)}{(\hat{\mu} - \mu_{\text{cost}} \cdot I)^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot (\hat{\mu} - \mu_{\text{cost}} \cdot I)}$$

Noti gli stimatori $\hat{\mu}$ e $\hat{\mu}_{\text{shrink}}$ è possibile misurare le seguenti funzioni di perdita:

$$(5.35) \quad \text{Loss}(\hat{\mu}, \mu) = (\hat{\mu} - \mu)^T \cdot (\hat{\mu} - \mu)$$

e

$$(5.36) \quad \text{Loss}(\hat{\mu}_{\text{shrink}}, \mu) = (\hat{\mu}_{\text{shrink}} - \mu)^T \cdot (\hat{\mu}_{\text{shrink}} - \mu)$$

nonché quantificare l'errore di stima che essi producono:

$$(5.37) \quad \text{Err}^2(\hat{\mu}, \mu) = E[(\hat{\mu} - \mu)^T \cdot (\hat{\mu} - \mu)]$$

e

$$(5.38) \quad \text{Err}^2(\hat{\mu}_{\text{shrink}}, \mu) = E[(\hat{\mu}_{\text{shrink}} - \mu)^T \cdot (\hat{\mu}_{\text{shrink}} - \mu)]$$

L'*error* è poi scomponibile in termini di *bias* e *inefficiency*.

Nella analisi attribuiamo a T un valore pari a 12, 15, 30, 40, 50, 60, e 70, ipotizzando così che le stime vengano estrapolate da campioni storici di rendimenti annuali di ampiezza crescente. Per ciascun valore di T, lanciamo 10.000 simulazioni Monte Carlo, ciascuna delle quali fornirà il *set* di informazioni necessario per calcolare lo stimatore di *shrinkage* e quello campionario. Questo processo permetterà di stimare, per ogni valore di T, 10.000 livelli di *loss* ed altrettanti errori di stima riconducibili rispettivamente a $\hat{\mu}$ e $\hat{\mu}_{\text{shrink}}$. Sarà così possibile disegnare la distribuzione delle perdite (*loss distribution*) dello stimatore, misurare il valore medio dell'errore e quantificarne l'impatto in termini di *bias* ed *inefficiency*. La Figura 5.4 sintetizza graficamente i risultati ottenuti. Al crescere della dimensione campionaria:

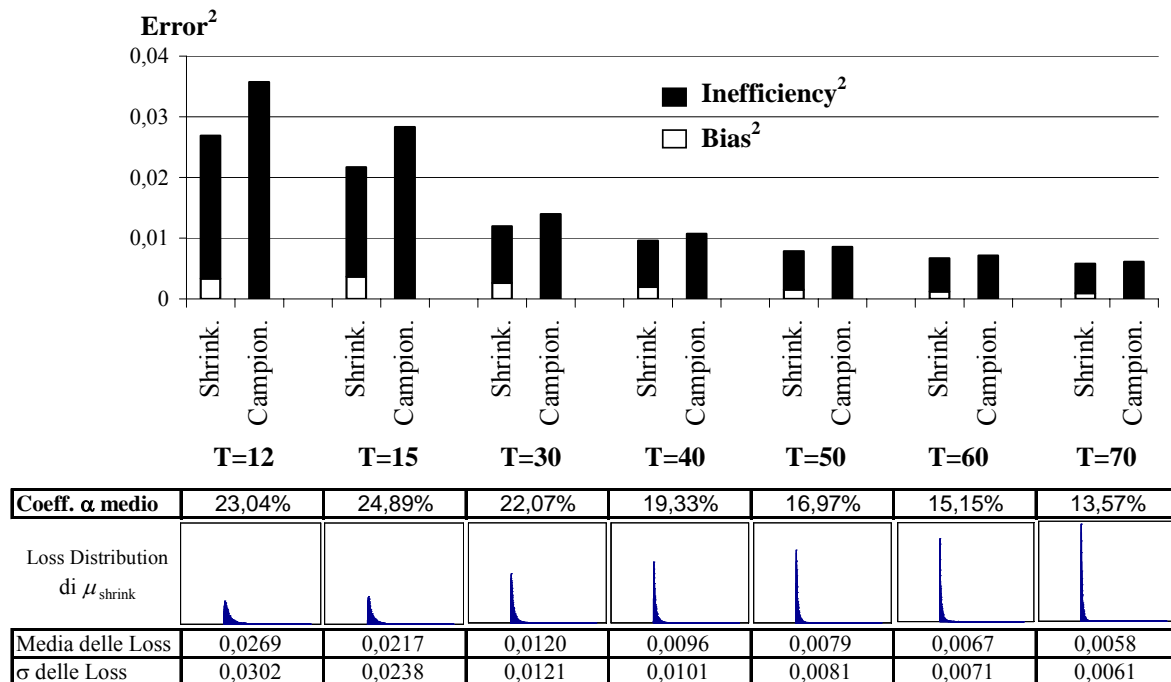
- si riduce progressivamente l'errore nella stima tanto della media campionaria, quanto dello stimatore *bayesiano*;
- la *loss distribution* dello stimatore di *shrinkage* vede diminuire tanto il valore medio, quanto la volatilità;
- il coefficiente α si riduce, indebolendo così il contributo dello stimatore costante alla stima di $\hat{\mu}_{\text{shrink}}$.

È significativo rilevare che per tutte le dimensioni campionarie l'errore medio degli stimatori *bayesiani* è minore dell'errore dello stimatore campionario. Questo risultato conferma l'intuizione con la quale Stein (1955) definiva la media campionaria uno stimatore inammissibile, in ragione della possibilità di identificare un parametro (nel nostro caso $\hat{\mu}_{shrink}$) tale per cui:

$$(5.39) \quad Err^2(\hat{\mu}_{shrink}, \mu) < Err^2(\hat{\mu}, \mu) < \frac{tr(\Sigma)}{T}$$

Inoltre, come era lecito attendersi, lo stimatore di *shrinkage* mostra la sua superiorità rispetto alla media campionaria soprattutto per bassi valori di T. Infatti, è in corrispondenza di campioni di scarsa ampiezza che ci si attende un contributo determinante del *prior information* nella riduzione dell'*inefficiency* dello stimatore campionario. Al crescere di T l'errore di $\hat{\mu}_{shrink}$ e quello di $\hat{\mu}$ tendono a coincidere, come conseguenza della elevata affidabilità dello stimatore campionario e della conseguente riduzione del coefficiente α . Infine, al crescere di T lo stimatore di *shrinkage*, convergendo verso un parametro *unbiased* ($\hat{\mu}$), vede progressivamente ridursi la dimensione del *bias*.

Figura 5.4: Analisi della performance di $\hat{\mu}$ e di $\hat{\mu}_{shrink}$



Una volta esibiti i vantaggi di un approccio *bayesiano* alla stima del rendimento atteso, è utile proporre un esempio di applicazione dello *shrinkage estimator* di Jorion (1985, 1986) all'interno della ottimizzazione media-varianza. L'esercizio numerico è utile per palesare l'effetto che l'approccio bayesiano produce sulla composizione del portafoglio e sulla forma della frontiera efficiente *constrained*.

Ipotizziamo che un *asset manager* voglia costruire portafogli per un orizzonte temporale d'investimento annuale. Utilizzando serie storiche campionarie di 12 anni relative al periodo 01/01/1995 – 31/12/2006, egli estrapola le stime campionarie di $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ e $\hat{\rho}$ (Tabella 5.3). Tuttavia, conscio dei limiti che accompagnano l'utilizzo di stimatori campionari estratti da serie di ridotta ampiezza, l'*asset manager* ricorre agli stimatori di *shrinkage* di Jorion (1985, 1986) per operare una correzione dei rendimenti attesi.

Tabella 5.3: I parametri di input stimati con la *classical rule*.

Mercati	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi
Mkt1 - Monetario area Euro	3,83%	1,30%
Mkt2 - Obbligazionario Area Euro	6,46%	4,94%
Mkt3 - Azionario Mondo Energia	14,01%	20,90%
Mkt4 - Azionario Mondo Materiali	7,79%	19,22%
Mkt5 - Azionario Mondo Industriali	7,64%	20,20%
Mkt6 - Azionario Mondo Beni Voluttuari	8,20%	22,32%
Mkt7 - Azionario Mondo Beni di Prima Necessità	9,22%	17,08%
Mkt8 - Azionario Mondo Salute	13,40%	24,87%
Mkt9 - Azionario Mondo Finanza	9,56%	17,97%
Mkt10 - Azionario Mondo Information Technology	17,71%	48,60%
Mkt11 - Azionario Mondo Telecomunicazioni	8,11%	31,84%
Mkt12 - Azionario Mondo Pubblica Utilità	8,22%	18,77%

ρ	M. 1	M. 2	M. 3	M. 4	M. 5	M. 6	M. 7	M. 8	M. 9	M. 10	M. 11	M. 12
M. 1	1	0,64	-0,14	-0,48	-0,26	-0,14	0,33	0,44	-0,07	-0,02	0,00	-0,10
M. 2	0,64	1	-0,30	-0,69	-0,50	-0,49	0,22	0,31	-0,24	-0,38	-0,33	-0,02
M. 3	-0,14	-0,30	1	0,75	0,88	0,73	0,65	0,61	0,87	0,59	0,55	0,64
M. 4	-0,48	-0,69	0,75	1	0,89	0,80	0,09	0,06	0,61	0,69	0,56	0,29
M. 5	-0,26	-0,50	0,88	0,89	1	0,89	0,42	0,45	0,87	0,79	0,71	0,58
M. 6	-0,14	-0,49	0,73	0,80	0,89	1	0,36	0,38	0,72	0,94	0,92	0,37
M. 7	0,33	0,22	0,65	0,09	0,42	0,36	1	0,95	0,76	0,24	0,35	0,80
M. 8	0,44	0,31	0,61	0,06	0,45	0,38	0,95	1	0,78	0,32	0,39	0,78
M. 9	-0,07	-0,24	0,87	0,61	0,87	0,72	0,76	0,78	1	0,59	0,61	0,83
M. 10	-0,02	-0,38	0,59	0,69	0,79	0,94	0,24	0,32	0,59	1	0,93	0,21
M. 11	0,00	-0,33	0,55	0,56	0,71	0,92	0,35	0,39	0,61	0,93	1	0,33
M. 12	-0,10	-0,02	0,64	0,29	0,58	0,37	0,80	0,78	0,83	0,21	0,33	1

A tale scopo, egli attribuisce allo stimatore costante μ_{cost} un valore pari al rendimento

medio campionario del portafoglio a *minimum variance*:

$$\mu_{\text{cost}} = \frac{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1}}{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot I} \cdot \hat{\mu} = W_{\text{Min Var}} \cdot \hat{\mu} = 5,09\%$$

con :

$$W_{\text{Min Var}}^T = \begin{bmatrix} 110,8\% \\ -3,8\% \\ 19,9\% \\ -4,9\% \\ -50,0\% \\ 28,4\% \\ -29,5\% \\ -5,4\% \\ 21,6\% \\ 5,0\% \\ -12,8\% \\ 20,7\% \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\mu} = \begin{bmatrix} 3,83\% \\ 6,46\% \\ 14,01\% \\ 7,79\% \\ 7,64\% \\ 8,20\% \\ 9,22\% \\ 13,40\% \\ 9,56\% \\ 17,71\% \\ 8,11\% \\ 8,22\% \end{bmatrix}$$

Il coefficiente di *shrinkage* α è:

$$\alpha = \frac{\delta}{T + \delta} = \frac{(C + 2)}{T + \frac{(C + 2)}{\frac{(\hat{\mu} - \mu_{\text{cost}} \cdot I)^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot (\hat{\mu} - \mu_{\text{cost}} \cdot I)}{12 + 1,7943}}} = \frac{1,7943}{12 + 1,7943} = 13,01\%$$

Disponendo di tutte le informazioni necessarie, si procede al calcolo dello stimatore di *shrinkage* della media:

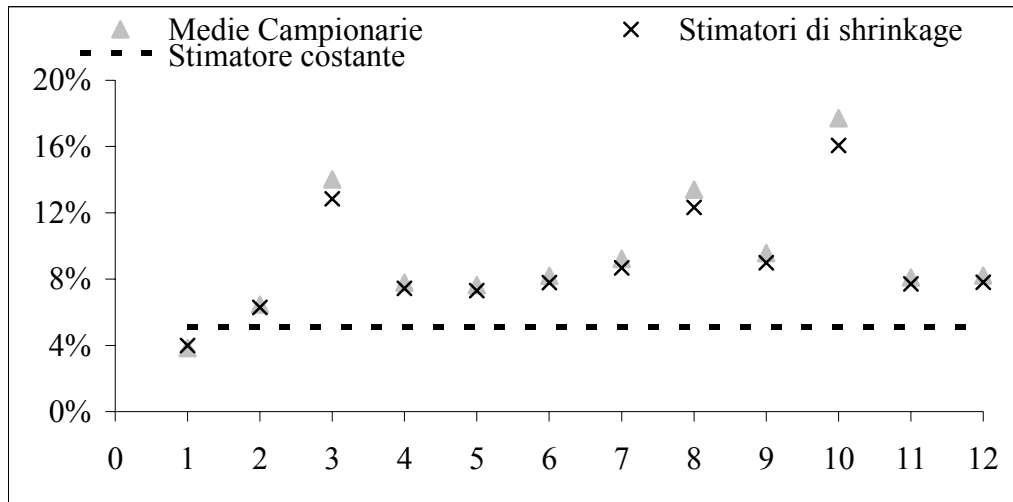
$$\hat{\mu}_{\text{shrink}} = (1 - \alpha) \cdot \hat{\mu} + \alpha \cdot \mu_{\text{cost}} \cdot I = 86,99\% \cdot \begin{bmatrix} 3,83\% \\ 6,46\% \\ 14,01\% \\ 7,79\% \\ 7,64\% \\ 8,20\% \\ 9,22\% \\ 13,40\% \\ 9,56\% \\ 17,71\% \\ 8,11\% \\ 8,22\% \end{bmatrix} + 13,01\% \cdot 5,09\% \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,99\% \\ 6,28\% \\ 12,85\% \\ 7,44\% \\ 7,31\% \\ 7,80\% \\ 8,68\% \\ 12,32\% \\ 8,68\% \\ 16,07\% \\ 7,72\% \\ 7,81\% \end{bmatrix}$$

La Figura 5.5 offre una rappresentazione grafica dell'effetto di "compressione" che la logica bayesiana produce sulle stime. Le stime $\hat{\mu}_{shrink}$, insieme ai parametri campionari di deviazione standard ($\hat{\sigma}$) e correlazione ($\hat{\rho}$), vengono utilizzate per risolvere il problema di programmazione quadratica in grado di restituire la composizione dei portafogli efficienti:

$$(5.40) \quad \begin{aligned} & \underset{w}{Min} \quad \sum_{i,j=1}^C w_i w_j \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j \hat{\rho}_{i,j} \\ & \text{Con vincoli :} \\ & \sum_{i=1}^K w_i \mu_{shrink} = R^* \\ & \sum_{i=1}^K w_i = 1 \\ & w_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, C \end{aligned}$$

La Figura 5.6 permette di confrontare la frontiera efficiente ottenuta con le medie campionarie e quella riconducibile agli stimatori di *shrinkage* delle medie; il compito di esibire la differente composizione è affidato ai grafici ad area della Figura 5.7.

Figura 5.5: L'effetto di *shrinkage* sulle stime



Si noti come i portafogli ottenuti usando alternativamente $\hat{\mu}$ e $\hat{\mu}_{shrink}$ non presentino differenze in termini di composizione. L'uso degli *shrinkage estimator* di Jorion (1985, 1986) non produce quindi un effetto sul peso dei mercati²². Esso produce

²² L'effetto di composizione si manifesta solo nell'ipotesi estrema in cui il coefficiente ALFA assuma valore pari a 1.

invece un impatto consistente in termini di combinazioni rischio-rendimento dei portafogli: la frontiera calcolata con medie bayesiane tende ad assumere una forma più piatta con una conseguente contrazione del *range* dei valori assunti dal rendimento atteso. In particolare, minore è la fiducia che si ripone nella media campionaria, maggiore è la riduzione dell'inclinazione dell'*efficient set*.

Figura 5.6: Confronto tra le frontiere campionaria e bayesiana

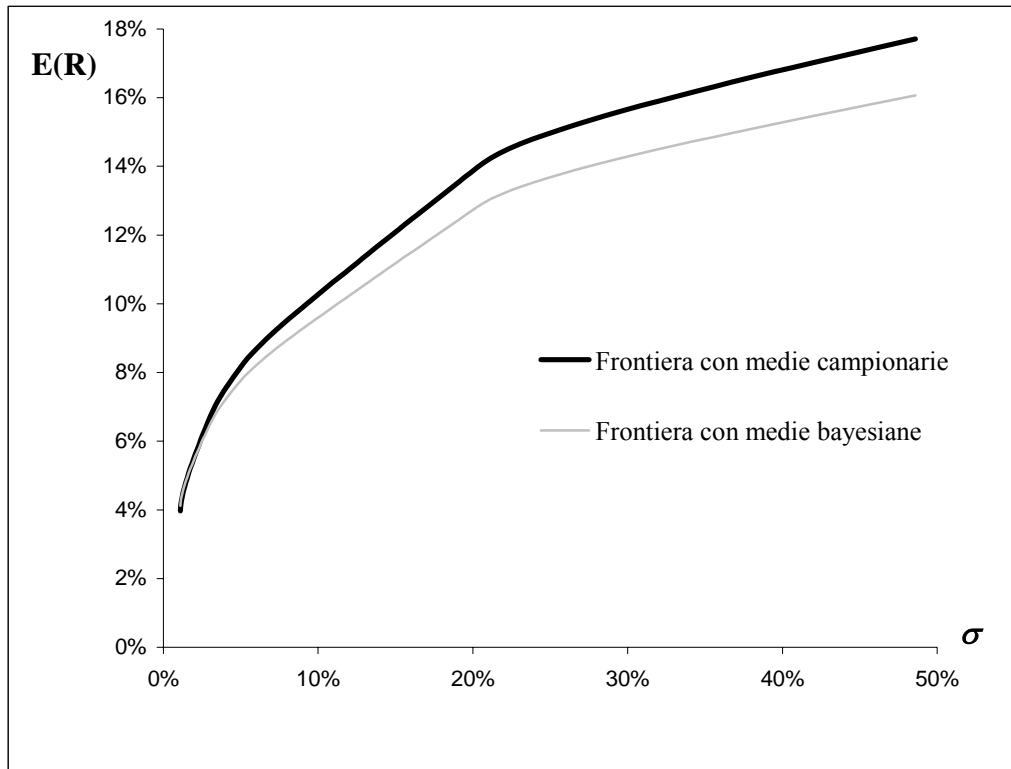
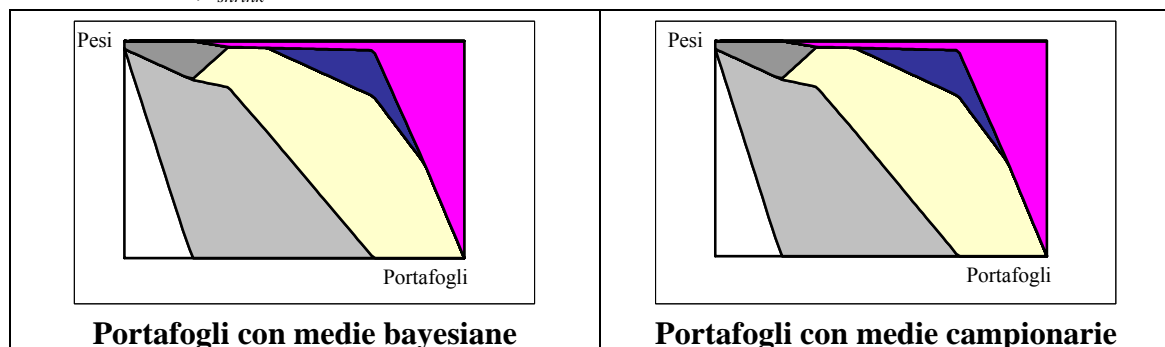


Figura 5.7: Confronto tra la composizione dei portafogli ottenuti applicando $\hat{\mu}$ e $\hat{\mu}_{shrink}$.



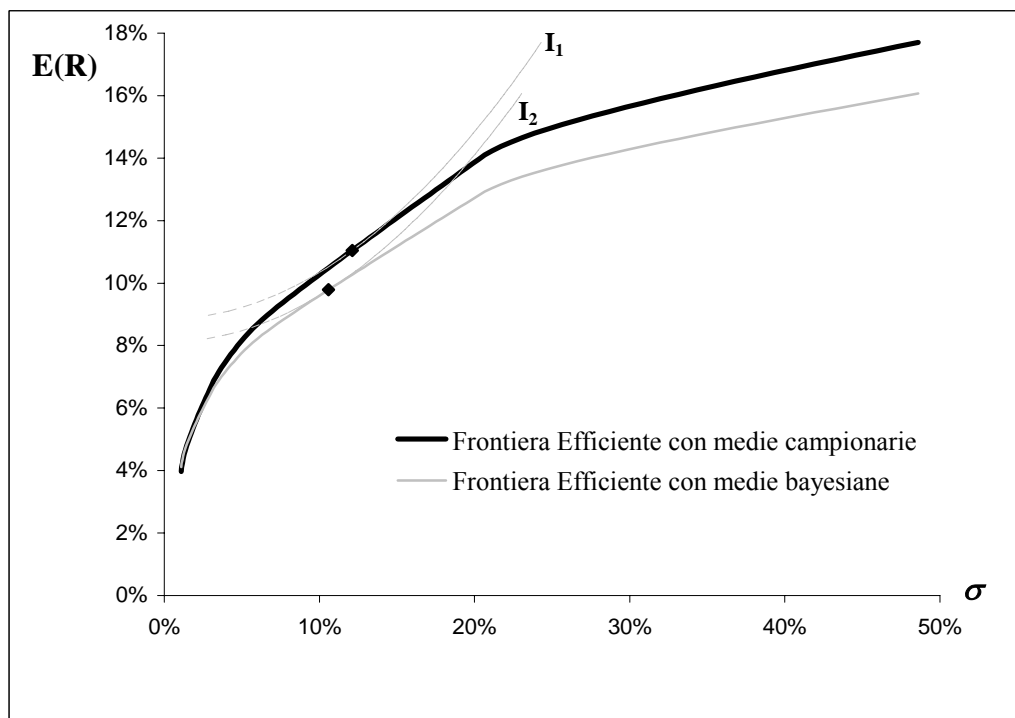
Il contributo degli stimatori di *shrinkage* alla riduzione del problema

dell'incertezza dei parametri è ravvisabile proprio nell'abbassamento della frontiera efficiente. Il *flattening* della curva è difatti il fenomeno che protegge gli investitori dai pericoli dell'*estimation error*. Allo scopo di dimostrare quanto affermato, occorre fare ricorso alle funzioni di utilità. Ipotizziamo che le preferenze dell'investitore siano rappresentate dalla seguente funzione di utilità attesa:

$$(5.41) \quad E[U(x)] = E(R) - \frac{3}{2} \cdot \sigma^2$$

La Figura 5.8 identifica le combinazioni rischio-rendimento dei portafogli efficienti che massimizzano $E[U(x)]$; grazie alla forma più piatta, la frontiera con medie bayesiane “incontra” la funzione di utilità in corrispondenza di un punto che si colloca più a sinistra nel sistema di assi, sicché il portafoglio ottimale selezionato con la frontiera con medie bayesiane è meno rischioso del portafoglio selezionato con la frontiera calcolata utilizzando medie campionarie (Tabella 5.4).

Figura 5.8: I punti di tangenza tra le frontiere efficienti e le curve di indifferenza



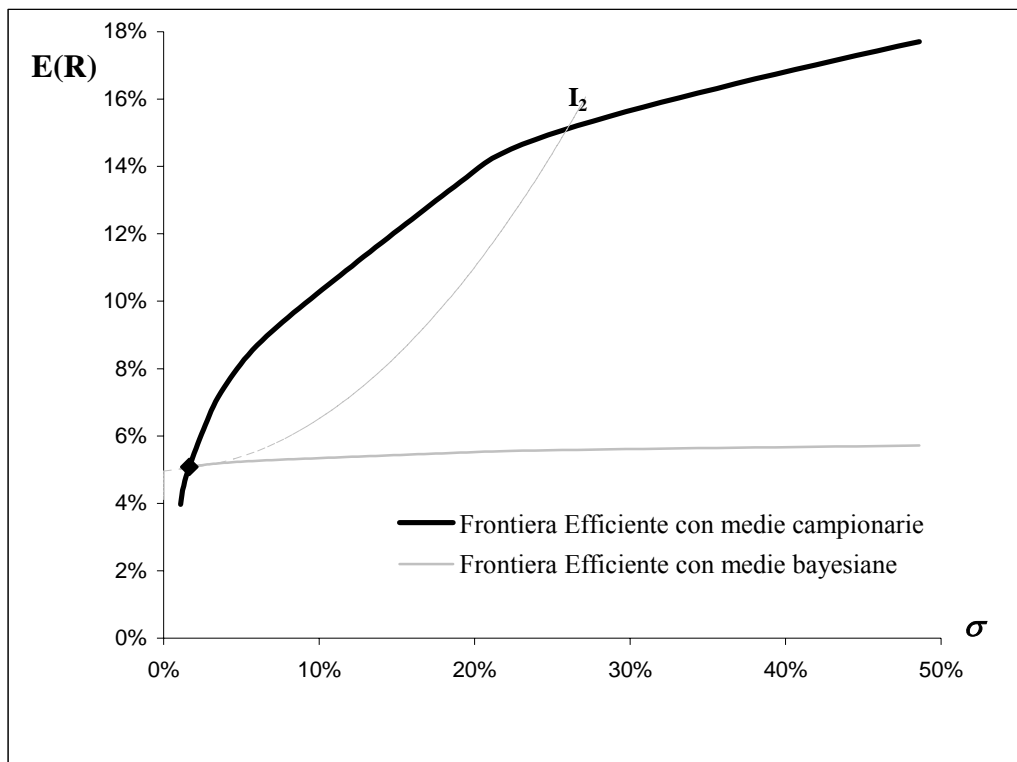
In conclusione, la reazione degli *shrinkage estimator* all'incertezza nelle stime non si concretizza, come nelle tecniche euristiche, nella ricerca di una maggiore diversificazione, bensì nella selezione di portafogli che diventano via via meno

rischiosi: come posizione estrema, in presenza di una fiducia nulla per le medie campionarie, gli investitori sarebbero indotti a selezionare il portafoglio a minimo rischio (Figura 5.9).

Tabella 5.4: La composizione dei portafogli ottimali identificata dal punto di tangenza tra le curve di indifferenza e le frontiere efficienti.

Mercati	Portafogli Ottimali	
	Frontiera con medie campionarie	Frontiera con medie di shrinkage
Monetario Area Euro	0,00%	0,00%
Obbligazionario Area Euro	40,47%	47,97%
Azionario Mondo Energia	49,61%	45,00%
Azionario Mondo Materiali	0,00%	0,00%
Azionario Mondo Industriali	0,00%	0,00%
Azionario Mondo Beni Voluttuari	0,00%	0,00%
Azionario Mondo Beni di Prima Necessità	0,00%	0,00%
Azionario Mondo Salute	6,45%	3,72%
Azionario Mondo Finanza	0,00%	0,00%
Azionario Mondo Information Technology	3,46%	3,31%
Azionario Mondo Telecomunicazioni	0,00%	0,00%
Azionario Mondo Pubblica Utilità	0,00%	0,00%
σ del Portafoglio	12,11%	10,59%
Percentuale di azionario in portafoglio	59,53%	52,03%

Figura 5.9: Il caso estremo di portafoglio ottimo che coincide con quello a minimo rischio.



Allo scopo di approfondire l'effetto che gli stimatori di *shrinkage* producono sul processo di *portfolio selection*, proponiamo un esperimento²³. Ricorriamo alle frontiere efficienti con ammissione dello *shortselling*, in modo da sfruttarne le proprietà di seguito descritte:

- A. noti due portafogli efficienti, la loro combinazione lineare permette di ottenere tutti gli altri portafogli;
- B. la composizione del portafoglio a *minimum variance* dipende esclusivamente dalla matrice delle covarianze.

Ipotizziamo che un *asset manager* abbia prodotto, per sei mercati, le stime campionarie $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ e $\hat{\rho}$ riportate nella Tabella 5.5 ed estratte da un campione di osservazioni storiche di ampiezza $T=12$. La composizione dei portafogli efficienti può essere calcolata analiticamente scrivendo la Lagrangiana²⁴:

$$(5.42) \quad L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} + \lambda \left[R^* - \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) \right] + \gamma \left(1 - \sum_{i=1}^n w_i \right)$$

Sfruttando la proprietà citata nel punto A., la composizione percentuale (W^*) dei

²³ L'analisi è ispirata a Jorion (1985).

²⁴ Si veda l'Appendice A.2.1

portafogli efficienti può essere ottenuta come combinazione lineare del portafoglio a *minimum variance* e di quello caratterizzato dal valore massimo del coefficiente $E(R)/\sigma$:

$$(5.43) \quad W^* = \beta \cdot \frac{\hat{\Sigma}^{-1} \cdot I}{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot I} + (1 - \beta) \cdot \frac{\hat{\Sigma}^{-1} \cdot \hat{\mu}}{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot \hat{\mu}} \cdot I = \beta \cdot \begin{bmatrix} 0,633 \\ 0,249 \\ 0,213 \\ -0,340 \\ 0,235 \\ 0,009 \end{bmatrix} + (1 - \beta) \cdot \begin{bmatrix} -2,062 \\ -4,917 \\ 8,267 \\ -2,666 \\ -1,512 \\ 3,890 \end{bmatrix}$$

Dove:

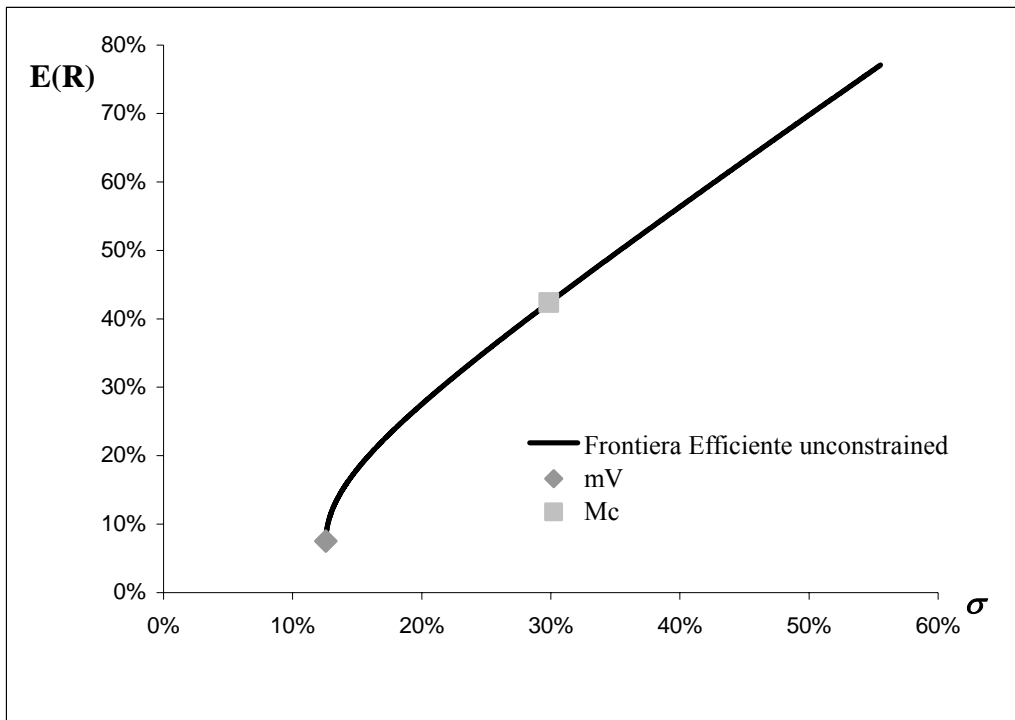
- $\frac{\hat{\Sigma}^{-1} \cdot I}{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot I}$ è la composizione del portafoglio (denominato *mV*) a *minimum variance*;
- $\frac{\hat{\Sigma}^{-1} \cdot \hat{\mu}}{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot \hat{\mu}}$ è la composizione del portafoglio (denominato *Mc*) con $E(R)/\sigma$ massimo.

La Figura 5.10 offre una rappresentazione grafica della frontiera efficiente *unconstrained* e della combinazione rischio-rendimento dei portafogli *mV* e *Mc*.

Tabella 5.5: I parametri di input stimati con la *classical rule*.

Mercati	Rendimenti Attesi	Rischi Attesi	ρ	Mkt A	Mkt B	Mkt C	Mkt D	Mkt E	Mkt F
Mkt A	6,00%	15,00%	Mkt A	1	0,15	0,23	0,19	0,10	0,30
Mkt B	8,00%	20,90%	Mkt B	0,15	1	0,75	0,88	0,73	0,65
Mkt C	9,00%	19,22%	Mkt C	0,23	0,75	1	0,89	0,80	0,09
Mkt D	5,00%	20,20%	Mkt D	0,19	0,88	0,89	1	0,89	0,42
Mkt E	6,00%	22,00%	Mkt E	0,10	0,73	0,80	0,89	1	0,36
Mkt F	10,80%	27,00%	Mkt F	0,30	0,65	0,09	0,42	0,36	1

Figura 5.10: La combinazione rischio-rendimento dei portafogli *unconstrained*.



Per ridurre l'errore di stima, applichiamo alle medie campionarie gli stimatori di *shrinkage*. Seguendo Jorion (1985, 1986) attribuiamo allo stimatore costante μ_{cost} un valore pari al rendimento medio campionario del portafoglio a *minimum variance*:

$$\mu_{\text{cost}} = \frac{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1}}{I^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot I} \cdot \hat{\mu} = W_{\text{Min Var}} \cdot \hat{\mu} =$$

$$= [0,633 \quad 0,249 \quad 0,213 \quad -0,340 \quad 0,235 \quad 0,09] \cdot \begin{bmatrix} 6,0\% \\ 8,0\% \\ 9,0\% \\ 5,0\% \\ 6,0\% \\ 10,8\% \end{bmatrix} = 7,52\%$$

Il coefficiente di *shrinkage* α è:

$$\alpha = \frac{\delta}{T + \delta} = \frac{\frac{(C + 2)}{(\hat{\mu} - \mu_{\text{cost}} \cdot I)^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot (\hat{\mu} - \mu_{\text{cost}} \cdot I)}}{T + \frac{(C + 2)}{(\hat{\mu} - \mu_{\text{cost}} \cdot I)^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot (\hat{\mu} - \mu_{\text{cost}} \cdot I)}} = \frac{4,8365}{12 + 4,8365} = 28,73\%$$

Lo stimatore $\hat{\mu}_{\text{shrink}}$ è:

$$\hat{\mu}_{shrink} = (1 - \alpha) \cdot \hat{\mu} + \alpha \cdot \mu_{cost} \cdot I = 71,27\% \cdot \begin{bmatrix} 6,0\% \\ 8,0\% \\ 9,0\% \\ 5,0\% \\ 6,0\% \\ 10,8\% \end{bmatrix} + 28,73\% \cdot 7,72\% \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,44\% \\ 7,86\% \\ 8,58\% \\ 5,72\% \\ 6,44\% \\ 9,86\% \end{bmatrix}$$

Le stime di *shrinkage*, insieme ai parametri campionari di deviazione standard ($\hat{\sigma}$) e correlazione ($\hat{\rho}$), vengono utilizzate per costruire la frontiera bayesiana *unconstrained*. Quest'ultima presenta il portafoglio a *minimum variance* che coincide con quello della frontiera campionaria²⁵; il portafoglio (che denominiamo ancora *Mc*) con composizione:

$$\begin{bmatrix} -2,062 \\ -4,917 \\ 8,267 \\ -2,666 \\ -1,512 \\ 3,890 \end{bmatrix}$$

è nuovamente parte dell'*efficient set*, poiché, come si è già sottolineato, gli stimatori di *shrinkage* non mutano la composizione dei portafogli²⁶. Assumendo che le preferenze dell'investitore siano rappresentate dalla seguente funzione di utilità attesa:

$$E[U(x)] = E(R) - 4 \cdot \sigma^2$$

la Figura 5.11 mostra i portafogli di tangenza che massimizzano $E[U(x)]$. I portafogli ottenuti con medie campionarie e bayesiane che ottimizzano le preferenze dell'investitore presentano le seguenti composizioni:

$$W_{Campion} = \begin{bmatrix} -0,968 \\ -2,820 \\ 4,997 \\ -1,722 \\ -0,802 \\ 2,315 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W_{Bayes} = \begin{bmatrix} -0,508 \\ -1,939 \\ 3,623 \\ -1,325 \\ -0,504 \\ 1,652 \end{bmatrix}$$

Sfruttando la proprietà delle frontiere *unconstrained* citata nel precedente punto B.,

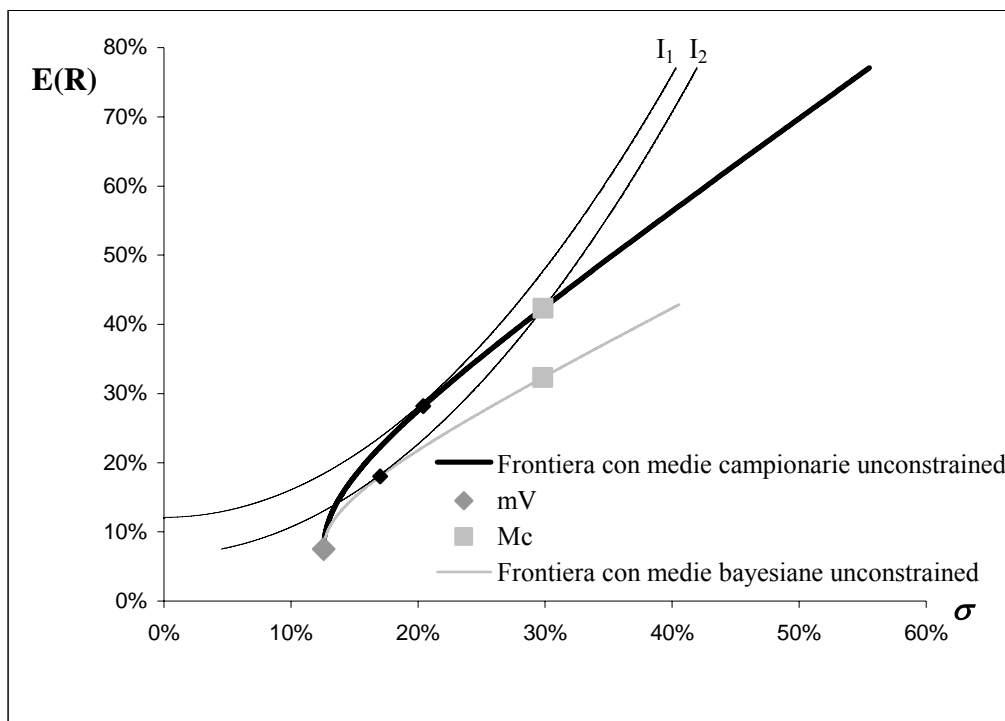
²⁵ La matrice delle covarianze è immutata.

²⁶ In tal caso, tuttavia, il portafoglio *Mc* non è quello che massimizza il rapporto con $E(R)/\sigma$.

possiamo identificare – tanto per la frontiera campionaria, quanto per quella bayesiana – il coefficiente β tale per cui la combinazione tra i portafogli mV e Mc restituisca il portafoglio che massimizza l'utilità attesa:

$$\begin{aligned}
 - \text{Frontiera}_{\text{medie campionarie}}: & \begin{bmatrix} -0,968 \\ -2,820 \\ 4,997 \\ -1,722 \\ -0,802 \\ 2,315 \end{bmatrix} = 40,6\% \cdot \begin{bmatrix} 0,633 \\ 0,249 \\ 0,213 \\ -0,340 \\ 0,235 \\ 0,009 \end{bmatrix} + (1 - 40,6\%) \cdot \begin{bmatrix} -2,062 \\ -4,917 \\ 8,267 \\ -2,666 \\ -1,512 \\ 3,890 \end{bmatrix} \\
 - \text{Frontiera}_{\text{medie bayesiane}}: & \begin{bmatrix} -0,508 \\ -1,939 \\ 3,623 \\ -1,325 \\ -0,504 \\ 1,652 \end{bmatrix} = 57,7\% \cdot \begin{bmatrix} 0,633 \\ 0,249 \\ 0,213 \\ -0,340 \\ 0,235 \\ 0,009 \end{bmatrix} + (1 - 57,7\%) \cdot \begin{bmatrix} -2,062 \\ -4,917 \\ 8,267 \\ -2,666 \\ -1,512 \\ 3,890 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Figura 5.11: I punti di tangenza tra le frontiere efficienti *unconstrained* e le curve di indifferenza.



Il processo bayesiano spinge verso un portafoglio ottimo maggiormente dipendente

dal portafoglio a *minimum variance*; poiché quest'ultimo è indipendente dalle misure di rendimento atteso, possiamo affermare che il processo di *shrinkage* riduce il ruolo che le stime dei rendimenti attesi hanno sulla composizione dei portafogli efficienti. Mano a mano che la dimensione del campione si riduce (decresce la significatività della stima campionaria $\hat{\mu}$), il coefficiente β è destinato ad aumentare, erodendo così la capacità dei rendimenti attesi di influenzare la composizione dei portafogli.

5.3.2 *Shrinkaged versus sampled portfolio*

Questo esperimento propone un confronto tra portafogli ottenuti con dati campionari e portafogli costruiti con gli stimatori di *shrinkage* per le medie. L'obiettivo è quello di dimostrare che, in presenza di stime erratiche, un portafoglio che nasce da un processo bayesiano ha elevate probabilità di dominare *out-of-sample* un portafoglio giudicato efficiente sulla base di stime campionarie incerte.

Ipotizziamo che un *asset manager* italiano voglia costruire un portafoglio combinando 8 mercati, di cui 6 azionari. L'orizzonte temporale d'investimento è annuale e l'insieme dei parametri *true* corrispondenti alle *asset class* selezionate è quello riportato nella Tabella 5.2. L'*asset manager* non conosce questi parametri e ricorre quindi alle informazioni derivanti dalle serie storiche campionarie. Assumiamo che i rendimenti degli asset siano variabili *random* stazionarie e distribuite normalmente; per simulare campioni di dati assimilabili a serie storiche, facciamo ricorso alla tecnica Monte Carlo. Immaginando che l'*asset manager* disponga di un campione storico di 12 anni, dovremo simulare serie di rendimenti annuali di ampiezza $T=12$. È proprio in un contesto di stime campionarie estratte da serie storiche di dimensione ridotte che gli stimatori di *shrinkage* dovrebbero offrire un contributo determinante nella riduzione dell'*estimation error*.

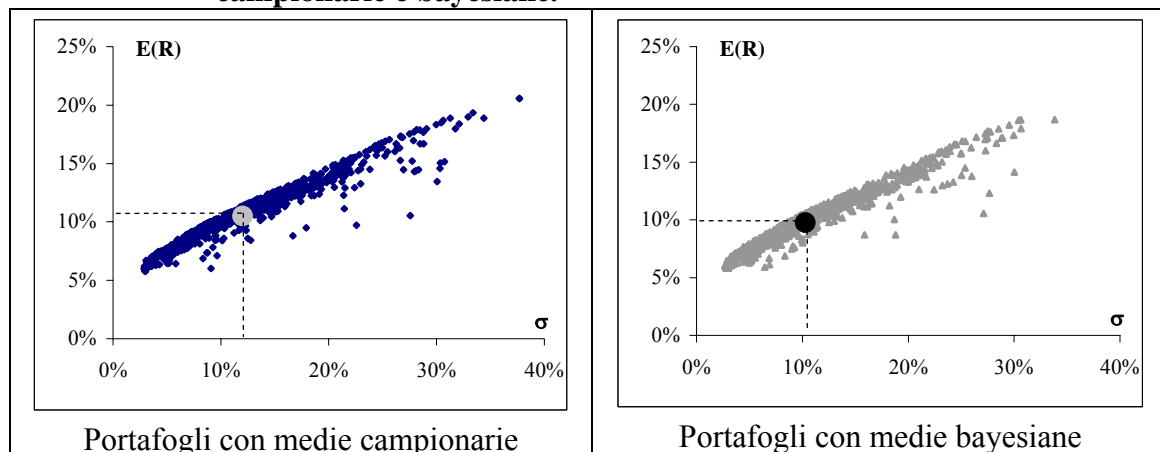
Allo scopo di valutare la presunta superiorità di un approccio bayesiano viene sviluppato questo procedimento:

1. in base alle variabili di input *true*, si simula, per ciascuna asset class e mediante la tecnica Monte Carlo, una serie di 12 rendimenti annuali;
2. utilizzando questo campione simulato, si calcola il set di input campionari $[\hat{\mu}, \hat{\sigma} \text{ e } \hat{\rho}]$;

3. si effettua una ottimizzazione media-varianza e si seleziona il portafoglio migliore per un investitore le cui preferenze sono identificate dalla seguente funzione di utilità, $E[U(x)] = E(R) - 3 \cdot \sigma^2$;
4. utilizzando gli input campionari $[\hat{\mu}, \hat{\sigma} \text{ e } \hat{\rho}]$, si calcolano gli stimatori di *shrinkage* delle medie $(\hat{\mu}_{shrink})^{27}$; queste, insieme alla matrice delle covarianze campionarie vengono utilizzate come input di una ottimizzazione funzionale alla successiva identificazione del portafoglio che massimizza le preferenze dell'investitore;
5. note le composizioni dei due portafogli così identificati, è possibile determinare quali sono le combinazioni $[\sigma_{true}; E(R)_{true}]$ che i portafogli avrebbero conseguito sulla base dei veri input;
6. l'intero processo viene ripetuto 1.000 volte.

La Figura 5.12 offre una rappresentazione grafica delle combinazioni $[\sigma_{true}; E(R)_{true}]$ dei portafogli con medie campionarie e bayesiane ottenuti mediante le 1.000 simulazioni.

Figura 5.12: Le Combinazioni $[\sigma_{true}; E(R)_{true}]$ dei portafogli ottenuti con medie campionarie e bayesiane.



Come primo risultato, si noti come i due portafogli non presentino, sulla base delle stime corrette, un livello di dispersione delle combinazioni $[\sigma_{true}; E(R)_{true}]$ significativamente diverso. Tuttavia, nella Figura 5.12 gli indicatori di maggiore dimensione, identificando i valori medi di rendimento atteso e rischio, dimostrano che il

²⁷ Si è applicato il modello di Jorion (1986).

processo di *shrinkage* favorisce la selezione di portafogli caratterizzati da minore rischiosità. Allo scopo di facilitare il confronto tra i risultati, facciamo ricorso al concetto di *equivalente certo* (EC). Dato un portafoglio rischioso con combinazione $[\sigma_{\text{true}}; E(R)_{\text{true}}]$, il suo *equivalente certo* è l'investimento *risk-free* - con coordinate $(0; r_f^*)$ - che l'investitore considera equamente preferibile. L'obiettivo è quello di identificare il tasso privo di rischio tale per cui il portafoglio *risky* e quello *risk-free* producono per l'investitore la medesima soddisfazione. A tale scopo, occorre seguire l'iter qui di seguito descritto. Note la combinazione $[\sigma_{\text{true}}; E(R)_{\text{true}}]$ di un portafoglio, nonché la funzione di utilità dell'investitore, è possibile identificare il livello di utilità attesa che questo attribuisce al portafoglio:

$$(5.44) \quad E[U(x)]^* = E(R)_{\text{true}} - \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \sigma_{\text{true}}^2$$

Calcolato $E[U(x)]^*$, è possibile “disegnare” la curva di isoutilità:

$$(5.45) \quad E(R) = E[U(x)]^* + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \sigma^2$$

che identifica le combinazioni rischio-rendimento alle quali corrisponde un equivalente livello di soddisfazione per l'investitore. Il tasso di rendimento r_f^* si ottiene identificando il valore $E(R)$ corrispondente al rischio nullo:

$$(5.46) \quad E(R) = E[U(x)]^* + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot 0^2 = E[U(x)]^*$$

L'EC del portafoglio è quindi un investimento privo di rischio con combinazione $\{0; E[U(x)]^*\}$. A scopo esemplificativo, ipotizziamo di voler calcolare l'equivalente certo di un portafoglio con coordinate rischio-rendimento pari a (11,35%; 10,57%). Data la funzione di utilità attesa dell'investitore - $E[U(x)] = E(R) - 3 \cdot \sigma^2$ - possiamo calcolare il livello $E[U(x)]^*$ attribuito al portafoglio:

$$E[U(x)]^* = 10,57\% - 3 \cdot (11,35\%)^2 = 6,71\%$$

Calcolato $E[U(x)]^*$, è possibile “disegnare” la curva di isoutilità:

$$E(R) = 6,71\% + \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \sigma^2$$

Poiché questa funzione “incontra” l'asse delle ordinate in corrispondenza di un valore pari a $r_f^*=6,71\%$, l'investimento con combinazione $(0; 6,71\%)$ identifica l'*equivalente certo* del portafoglio iniziale (Figura 5.13). Naturalmente, più elevato è il valore r_f^* ,

maggiore è la soddisfazione dell'investitore.

Tornando alla simulazione, date le combinazioni rischio-rendimento della Figura 5.12 si è provveduto a calcolare l'*equivalente certo* (ed i valori r_f^*) dei 1.000 portafogli campionari e bayesiani. La Figura 5.14 identifica le distribuzioni discrete di r_f^* ; il valore medio e la deviazione standard di r_f^* sono i seguenti:

$$\bar{r}_{f\,campion}^* = 4,88\% \quad \bar{r}_{f\,bayes}^* = 5,50\%$$

$$\sigma_{campion}^* = 3,71\% \quad \sigma_{bayes}^* = 2,93\%$$

Inoltre, nel 63,8% delle simulazioni il portafoglio che origina dagli *shrinkage estimator* presenta un *equivalente certo* con rendimento maggiore. I dati numerici e la forma delle funzioni di distribuzione evidenziano la capacità dei portafogli bayesiani di produrre *equivalenti certi* di qualità superiore rispetto ai portafogli campionari.

Figura 5.13: Identificazione dell'*equivalente certo* di un portafoglio rischioso.

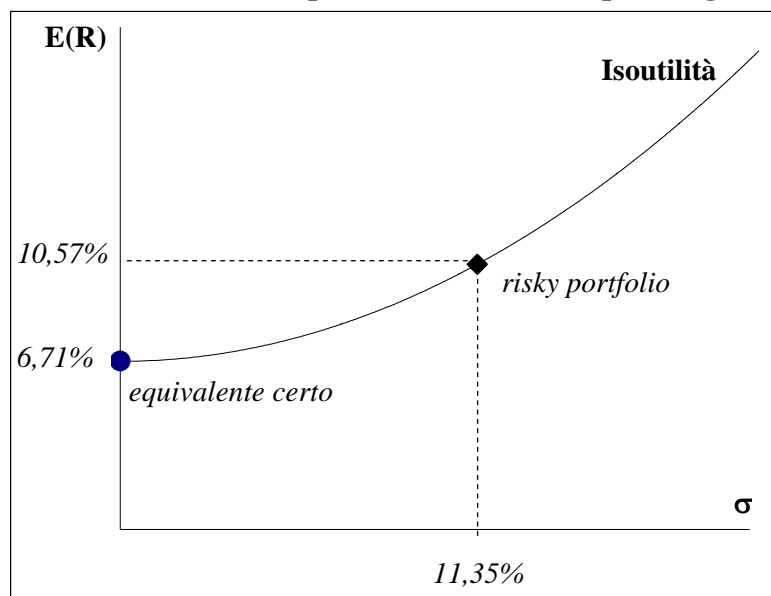
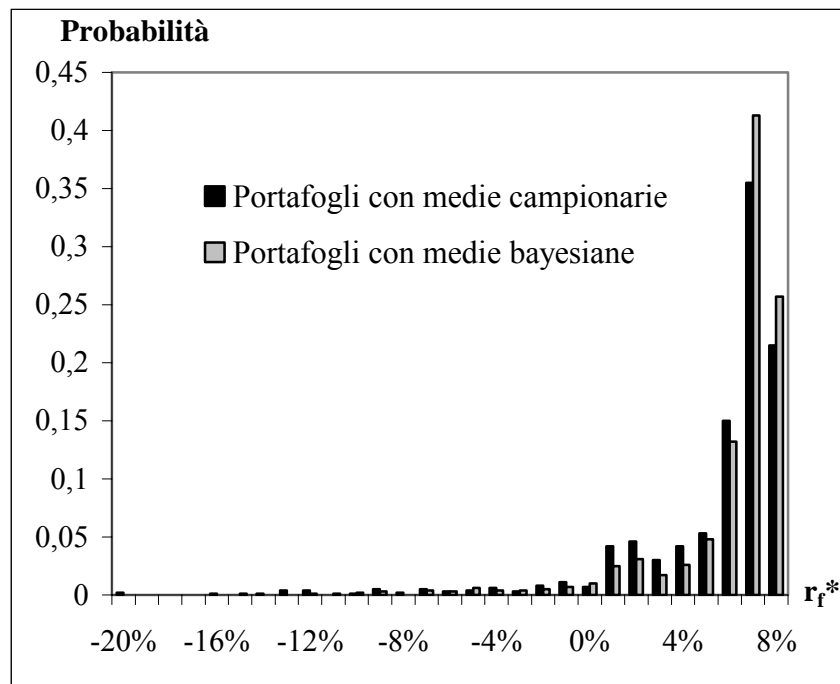
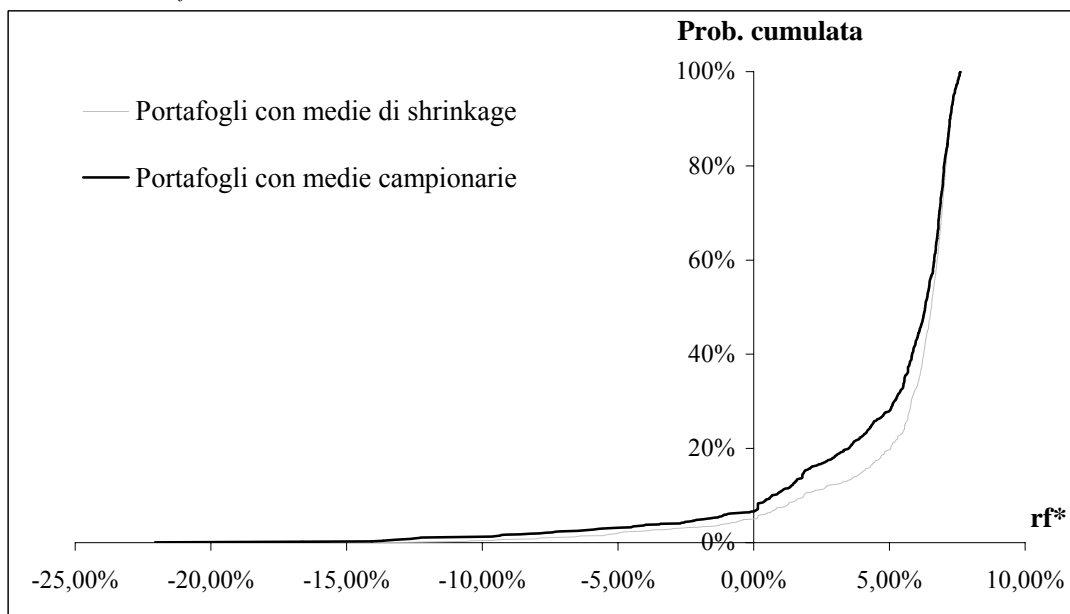


Figura 5.14: Le funzioni di distribuzione di r_f^* .



A conferma della maggiore qualità dei portafogli che originano dall'approccio di *shrinkage*, nella Figura 5.15 sono state riportate le funzioni di distribuzione cumulata di probabilità (F) dei valori r_f^* corrispondenti ai portafogli ottenuti con le medie campionarie e bayesiane.

Figura 5.15: Le funzioni di distribuzione cumulata di probabilità della variabile r_f^* .



Il grafico evidenzia che gli *equivalenti certi* bayesiani arrivano quasi a dominare *stocasticamente* in forma debole (o dominanza di primo ordine) gli *equivalenti certi* campionari²⁸.

5.3.3 Una riflessione finale

Le simulazioni confermano la capacità di un modello di *shrinkage* di alleviare i problemi che si celano dietro l'utilizzo di parametri di input poco affidabili. Infatti, grazie a questa metodologia, l'*asset manager* è in grado di applicare alle combinazioni $(\hat{\sigma}; \hat{\mu})$ una correzione proporzionale al grado di fiducia riposta nei parametri di input. Gli esperimenti condotti sembrano confermare due risultati significativi:

- gli stimatori di *shrinkage* delle medie presentano livelli di *estimation error* inferiori agli stimatori campionari;
- i portafogli efficienti originanti dall'utilizzo di stimatori di *shrinkage* si caratterizzano per risultati *out-of-sample* migliori rispetto ai portafogli che si alimentano di soli input campionari.

Se da un punto di vista statistico-matematico i risultati conseguiti dagli *shrinkage estimator* sono positivi, non si può tacere delle perplessità di natura operativa che accompagnano l'applicazione di questa metodologia²⁹. Un primo elemento in grado di ostacolarne l'uso pratico è ravvisabile nella mancata modifica della composizione dei portafogli efficienti. Infatti, in assenza di cambiamenti nei pesi delle *asset class*, i portafogli attenuti con gli stimatori di *shrinkage* “ereditano” dalla ottimizzazione

²⁸ Definiti:

- $F_{\text{bayes}}(\tau)$ = la probabilità cumulata che il rendimento dell'*equivalente certo* bayesiano assuma un valore inferiore a τ ,
- $F_{\text{campion}}(\tau)$ = la probabilità cumulata che il rendimento dell'*equivalente certo* campionario assuma un valore inferiore a τ ,

i portafogli bayesiani dominano in forma debole i portafogli campionari se:

$$F_{\text{bayes}}(\tau) \leq F_{\text{campion}}(\tau) \quad \text{per } \tau \in [-\infty; +\infty]$$

²⁹ Queste critiche non possono essere estese all'intera categoria degli stimatori di *shrinkage*, bensì vanno limitate alle sole applicazioni proposte nelle pagine precedenti.

classica di Markowitz le carenze più volte enunciate³⁰:

- eccessiva concentrazione dei portafogli;
- natura *unreasonable* dei pesi delle *asset class*;
- elevata sensibilità dei portafogli a variazioni marginali degli *input*.

Gli stimatori di *shrinkage* non offrono alcuna risposta a queste problematiche operative e ciò li colloca su un piano teorico, di sostanziale incapacità di affrontare (e risolvere) molte delle questioni pratiche che un *asset manager* è chiamato a fronteggiare quotidianamente. Per questa ragione l'*iter* proposto dagli *shrinkage estimator* appare di difficile applicazione nell'ambito dell'*asset management*, a meno che questa tecnica non venga combinata con logiche euristiche in grado di affrontare anche il problema della ragionevolezza e stabilità dei portafogli³¹.

Un secondo elemento foriero di perplessità è riconducibile alla natura del *prior*. Nel paragrafo dedicato all'introduzione della statistica bayesiana si è detto che l'informazione *prior* dà l'opportunità di incorporare nelle stime il bagaglio di conoscenze ed esperienze personali dell'*asset manager*. Tuttavia, l'uso della *grand mean* o del rendimento del portafoglio a *minimum variance* rappresenta una scelta puramente matematica (legata alla minimizzazione di una *loss function*) che non offre la concreta opportunità di incorporare delle vere e proprie previsioni economiche. Permane quindi il rischio che l'*asset manager*, non potendo realmente incidere sui parametri che alimentano l'ottimizzazione, consideri gli *input* (ed i portafogli) non rappresentativi delle sue *view* di mercato.

Il modello di Black e Litterman, oggetto di esame nel successivo paragrafo, dimostra di saper fronteggiare - in un *framework* bayesiano - anche i problemi pratici che gli *shrinkage estimator* ignorano.

5.4 Il modello di Black e Litterman

Pur a fronte di un rigore metodologico invidiabile, i modelli quantitativi di costruzione del portafoglio non vengono applicati con l'assiduità che sarebbe lecito attendersi. Ne consegue che la *naive portfolio formation rule*, seppur priva di

³⁰ Cfr il paragrafo 3.3.

³¹ Sull'utilizzo congiunto di modelli euristici e bayesiani, si veda il paragrafo 5.5.

giustificazioni teoriche, è molto più diffusa di quanto si creda. A tal proposito Black e Litterman (1992) scrivono: «*Quantitative asset allocation models have not played the important role they should in global portfolio management. A good part of the problem is that such models are difficult to use and tend to result in portfolios that are badly behaved*».

Il fallimento operativo delle tecniche quantitative è sovente riconducibile alla incapacità di sviluppare un modello di *portfolio construction* che sia *compliant* con il modo di ragionare (e di operare) dei gestori. Così, ad esempio, l'ottimizzazione classica alla Markowitz conduce raramente a composizioni di *asset class* giudicate ragionevoli; questo pensiero, più volte ribadito nel corso di questo scritto, è ben sintetizzato dai “padri” della metodologia in esame: «*When investors impose no constraints, the model almost always ordain large short positions in many asset. When constraints rule out short position, the models often prescribe “corner” solutions with zero weights in many assets, as well as unreasonably large weights in the assets of market with small capitalization*» (Black e Litterman, 1992).

Una tecnica matematica che ambisca ad una concreta applicazione deve quindi incorporare le esigenze degli *asset manager*; in assenza di ciò il modello quantitativo è destinato al solo piano teorico. Non è arduo produrre un elenco delle proprietà che un modello di *asset allocation* dovrebbe acquisire al fine di trovare il favore dei gestori:

1. il modello dovrebbe evitare la costruzione di *corner portfolio*, privilegiando la diversificazione;
2. il modello dovrebbe tenere in debita considerazione le capitalizzazioni di borsa dei mercati, in modo da incorporare la tendenza dei gestori a discostarsi da una posizione *market neutral* solo in presenza di aspettative affidabili;
3. le stime di rendimento atteso, rischio e correlazione, lungi dal limitarsi a riflettere la sola storia (*classical rule*), dovrebbero incorporare le *view* sui mercati espresse dagli *asset manager*;
4. il modello dovrebbe permettere di esprimere aspettative sui mercati caratterizzate da diversi gradi di fiducia;
5. il modello dovrebbe permettere di esprimere *view relative* (*il mercato A batte il*

mercato B del $k\%$) e *view* assolute (il mercato C renderà l' $x\%$)³²;

6. il modello dovrebbe contemplare la possibilità che l'*asset manager* produca *view* per un sotto-insieme dei mercati considerati nel processo di *asset allocation*, limitandosi ad esempio a quelli che conosce meglio.

Il modello di Black e Litterman (d'ora in avanti anche B-L) è in grado di recepire tutti i punti menzionati, palesando così uno straordinario equilibrio tra rigore metodologico e fruibilità. E proprio grazie al raro equilibrio tra teoria e pratica, Fisher Black e Robert Litterman, con i loro contributi datati 1990 e 1992, hanno consegnato alla storia della finanza uno strumento efficacissimo al fine di «integrare le opinioni del comitato di investimento in un modello di equilibrio universale» (Fusai e Meucci, 2003). Pertanto, l'approccio B-L, oltre che come mezzo di riduzione dell'*estimation error*, deve essere visto come uno strumento prezioso al fine di rendere applicabile il modello di Markowitz.

Brandt (1995) suggerisce che il modello B-L rappresenta un caso particolare di *stima mista*³³, consistente nel combinare due fonti informative alternative per giungere (attraverso un approccio bayesiano) ad una *posterior distribution*³⁴. Ancor prima di descrivere le *analytics* del modello, analizziamo un caso generale di *stima mista* coerente con il *framework* econometrico di B-L. L'analisi sarà utile allo scopo di evidenziare la natura bayesiana dell'approccio.

Ipotizziamo che i rendimenti di una *asset class* si distribuiscano come una normale:

$$(5.47) \quad r \sim N(\mu, s)$$

I parametri μ e s (varianza) sono ignoti. L'*asset manager*, “pescando” da una fonte informativa³⁵, fa una prima assunzione circa la distribuzione dei rendimenti del mercato:

$$(5.48) \quad r \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{s})$$

Tale stima è soggetta ad *estimation error* e per alleviare questo problema essa viene combinata con una nuova previsione “figlia” di una seconda fonte informativa: l'*asset manager*, sulla base della sua esperienza e abilità, è chiamato ad esprimere una *view*

³² Infatti, è piuttosto frequente che nei Comitati di Investimento venga prodotta una previsione che coinvolge più mercati contemporaneamente. Diventa quindi necessario implementare un modello matematico che rifletta questo *modus operandi*.

³³ Il primo esempio di *mixed estimation* è di Theil e Golberger (1961). Per un approfondimento del tema si veda anche Scowcroft e Sefton (2003).

³⁴ He e Litterman (2002) dimostrano invece che questo modello può essere interpretato come un caso particolare di *shrinkage*.

³⁵ La possibile natura di questa prima fonte di informazioni verrà analizzata successivamente.

circa l'andamento del mercato. La *view* - identificata con v - è una variabile *random* la cui funzione di distribuzione condizionata è:

$$(5.49) \quad v|r \sim N(\mu, \omega)$$

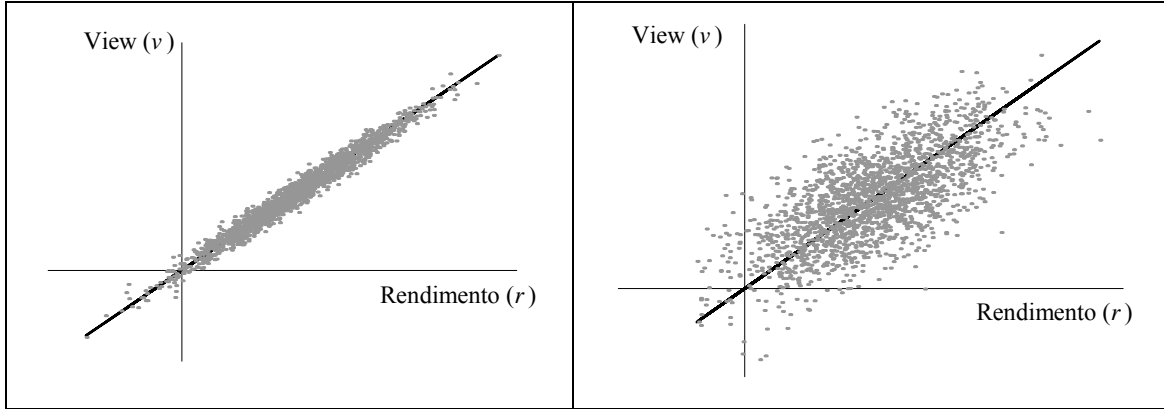
La *view* è *unbiased* (il valore medio coincide con il valore *true* ignoto), ma imprecisa (se assumiamo $\omega > 0$). Come suggerisce Meucci (2005), la variabile v può essere interpretata come una “perturbazione” del risultato conseguito con la distribuzione iniziale [$r \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{s})$]: al crescere della fiducia nei confronti della *view*, l'*asset manager* crede che il rendimento *true* del mercato si avvicini a quest'ultima, differendo maggiormente dal rendimento stimato mediante la distribuzione iniziale. In pratica, al crescere della fiducia della opinione (ovvero al ridursi del valore di ω) aumenta la capacità di v di influenzare la *posterior distribution* dei rendimenti del mercato, allontanando quest'ultima dalla forma:

$$(5.50) \quad r \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{s})$$

La Figura 5.16 mostra la relazione esistente tra *view* e rendimenti. Nel caso in cui vi sia elevata fiducia nella *view*, l'*asset manager* ipotizza che v rappresenti un'ottima *proxy* del valore futuro assunto da r ; infatti, ad ogni valore di v corrisponde un *range* ridotto di possibili valori del rendimento del mercato. In una situazione di questo tipo, la *posterior distribution* risulterà influenzata marginalmente dalla distribuzione iniziale ed avrà valore atteso prossimo a v , con bassa dispersione. Di contro in presenza di bassa fiducia nella *view*, l'*asset manager* ipotizza che la *view* abbia scarsa capacità di prevedere il valore futuro assunto da r ; conseguentemente, ad ogni valore di v corrisponde un ampio intervallo di valori del rendimento. La *posterior distribution* risulterà influenzata prevalentemente dalla distribuzione iniziale, con la *view* che assume un ruolo marginale.

Figura 5.16: Relazione tra rendimenti di mercato e *view* in presenza di diversi livelli di fiducia di quest'ultima

Elevata confidenza nella <i>view</i>	Bassa confidenza nella <i>view</i>
--------------------------------------	------------------------------------



Il teorema di Bayes ci offre l'opportunità di combinare le espressioni $f(v|r)$ e $f(r)$ così da ottenere la *posterior distribution* dei rendimenti del mercato:

$$(5.51) \quad f(r|v) = N(\mu_{mixed}, s_{mixed})$$

dove:

$$\mu_{mixed} = (\tilde{s}^{-1} + \omega^{-1})^{-1} \times (\tilde{s}^{-1} \cdot \tilde{\mu} + \omega^{-1} \cdot v);$$

$$s_{mixed} = (\tilde{s}^{-1} + \omega)^{-1}.$$

A conferma della natura bayesiana del modello, il rendimento atteso si ottiene come media ponderata tra $\tilde{\mu}$ e v . Per facilitare la comprensione proponiamo un esempio numerico.

Ipotizziamo che un gestore, “attingendo” da una prima fonte di informazioni assuma che la distribuzione dei rendimenti annuali del mercato azionario Europa sia la seguente:

$$r \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{s}) = N(7\%, 19\%^2)$$

Egli, tuttavia, sulla base della sua esperienza prevede che nel prossimo anno il rendimento del mercato sarà pari al $v=3\%$; inoltre, fiducioso della sua *view* attribuisce a ω un valore basso pari a 0,0196 (ovvero $14\%^2$).

Applicando la *mixed estimation*, il gestore ottiene il valore atteso e la deviazione standard dei rendimenti:

$$\mu_{mixed} = (\tilde{s}^{-1} + \omega^{-1})^{-1} \times (\tilde{s}^{-1} \cdot \tilde{\mu} + \omega^{-1} \cdot v) = 4,41\% ;$$

$$\sigma_{mixed} = \sqrt{s_{mixed}} = \sqrt{(\tilde{s}^{-1} + \omega)^{-1}} = 11,27\% .$$

Pertanto, la *posterior distribution* dei rendimenti del mercato è la seguente:

$$f(r|v) = N(\mu_{mixed}, s_{mixed}) = N(4,41\%; 11,27\%)$$

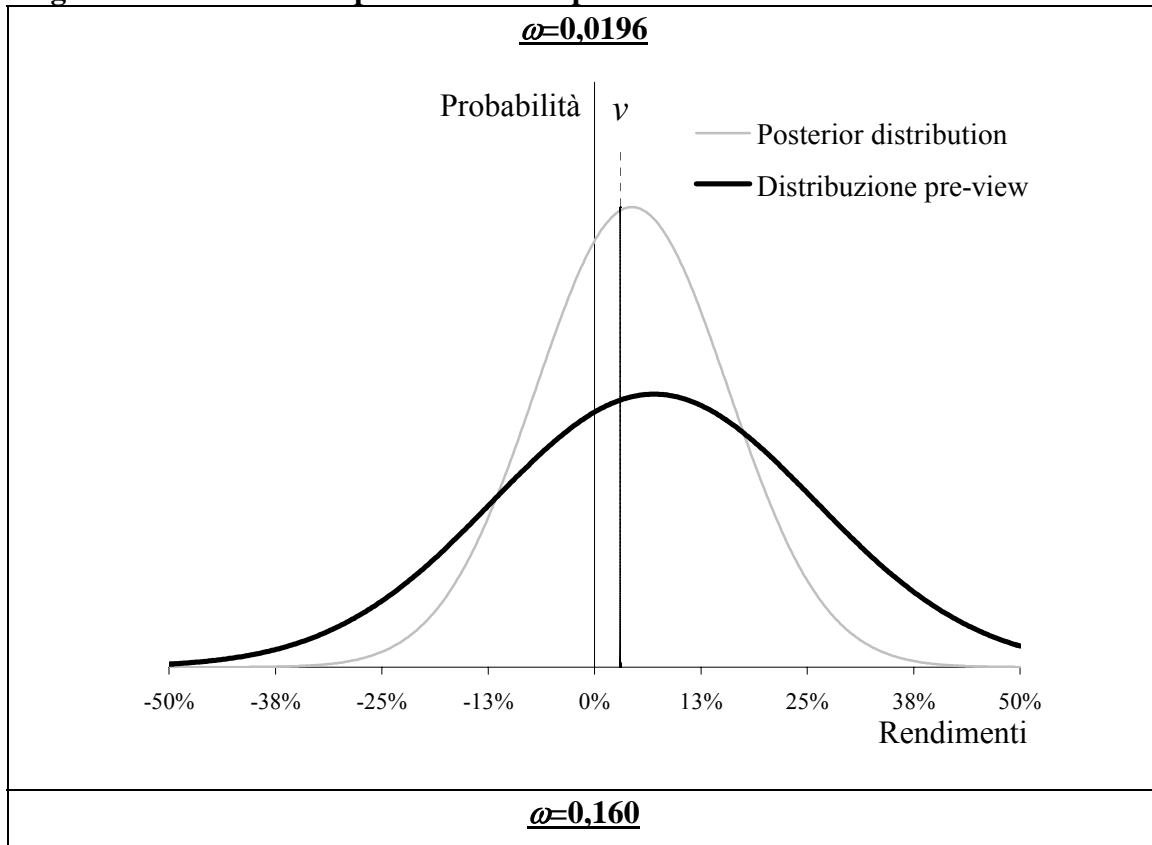
Nell'ipotesi in cui la *view* fosse giudicata meno affidabile ed al parametro Ω si attribuisse un valore pari a 0,160 (ovvero 40%²), il risultato sarebbe stato significativamente diverso:

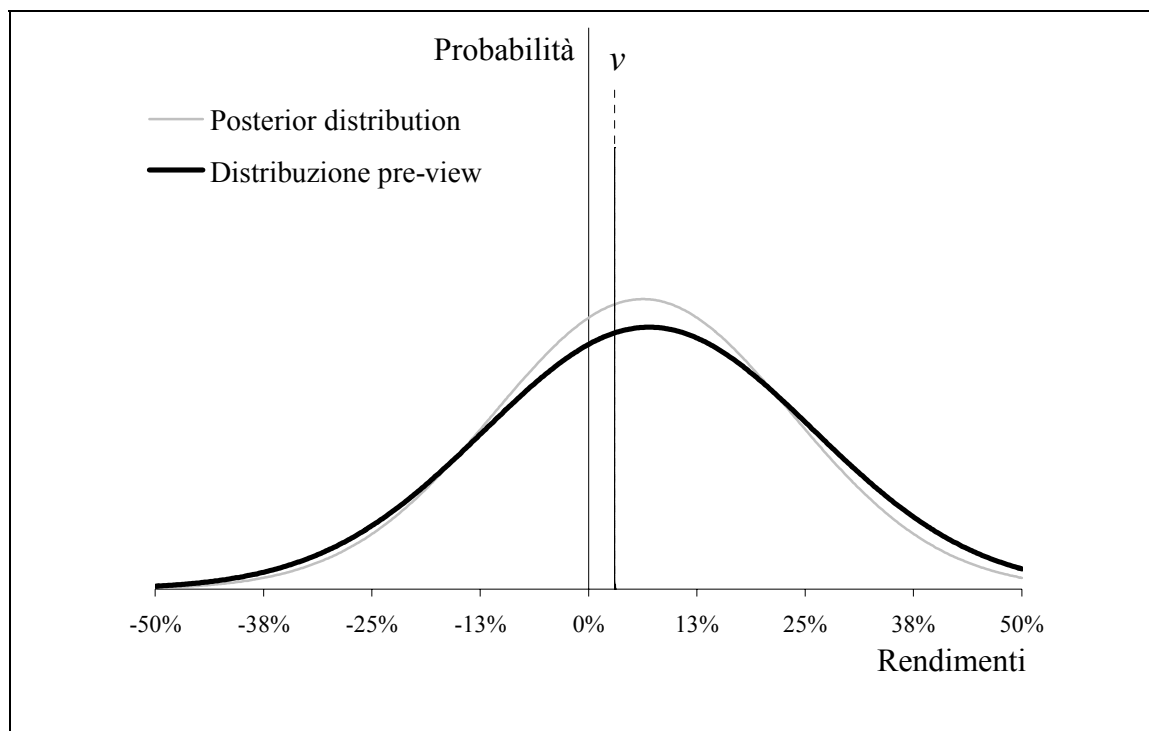
$$\mu_{mixed} = (\tilde{s}^{-1} + \omega^{-1})^{-1} \times (\tilde{s}^{-1} \cdot \tilde{\mu} + \omega^{-1} \cdot v) = 6,26\% ;$$

$$\sigma_{mixed} = \sqrt{(\tilde{s}^{-1} + \omega^{-1})^{-1}} = 17,16\% .$$

In questo secondo caso la *posterior distribution* assumerebbe una forma molto prossima alla distribuzione iniziale [$f(r) = N(\tilde{\mu}, \tilde{s})$]. La Figura 5.17 permette di apprezzare graficamente il diverso livello di “perturbazione” che, nei due diversi scenari, la *view* produce sulla distribuzione dei rendimenti.

Figura 5.17: L'effetto “perturbazione” prodotto dalla *view*





Giunti a questo punto, non rimane che analizzare il metodo della *stima mista* proposta da Black e Litterman.

5.4.1 Le analytics del modello

L'interesse che la metodologia B-L ha suscitato in ambito accademico ed operativo è ravvisabile nella rapida e prolifica produzione di lavori sul tema: Black e Litterman (1990, 1992), Bevan e Winkelmann (1998), He e Litterman (1999, 2002), Lee (2000), Satchell e Scowcroft (2000), Drobetz (2001), Christodoulakis (2002), Fusai e Meucci (2003), Litterman e Quantitative Resources Group di Goldman Sachs (2003), Idzorek (2004), Meucci (2005, 2006), Fabozzi et al. (2006, 2007), Jones et al. (2007). Attingendo da questa corposa letteratura, proponiamo una trattazione della struttura statistica del modello.

Ipotizziamo che i rendimenti delle *asset class* si distribuiscano come una normale multivariata:

$$(5.52) \quad r \sim N(\mu, \Sigma)$$

Coerentemente con la sua natura bayesiana, il modello B-L fa uso di due set informativi indipendenti che contribuiranno ad identificare la *posterior distribution* dei rendimenti. Lo scopo è quello di addivenire ad una distribuzione finale, combinando i

rendimenti di equilibrio (prima fonte informativa) e le *view* degli *asset manager* (seconda fonte informativa).

L'intuizione alla base del modello è data dall'assunto che gli *asset manager*, in assenza di previsioni sui mercati, dovrebbero costruire portafogli di equilibrio (o *market neutral*), ovvero portafogli che, non incorporando scommesse di alcun tipo, sono fedeli alla capitalizzazione di borsa dei mercati. Questo principio, già discusso nel paragrafo 4.2 dedicato alle ottimizzazioni vincolate, è perfettamente condivisibile, poiché in linea con l'operatività dei gestori di portafoglio.

Sulla base di questo presupposto, assumiamo che il primo set informativo sia costituito:

- dal vettore colonna dei rendimenti attesi (Π) dei mercati;
- dalla matrice delle covarianze (Σ);

che processati in una ottimizzazione alla Markowitz restituiscono un portafoglio efficiente *neutrale*. In altri termini, piuttosto che utilizzare le medie, le deviazioni standard e le correlazioni campionarie, il modello si affida a misure di rendimento atteso, rischio e correlazione che, in assenza di *view* in grado di modificarne il valore, restituirebbero un portafoglio dalla composizione *market neutral*. La prima fonte informativa è quindi identificabile nella distribuzione di *equilibrio* dei rendimenti:

$$(5.53) \quad r \sim N(\Pi, \Sigma)$$

Occorre verificare come sia possibile stimare i parametri Π e Σ . A tale scopo, è necessario ricorrere ad una ottimizzazione media-varianza nella quale *input* ed *output* sono rovesciati.

Dati:

M = vettore colonna dei rendimenti;

C = matrice delle covarianze;

λ = coefficiente di avversione al rischio dell'investitore;

W = vettore colonna dei pesi delle *asset class*;

la soluzione di questa ottimizzazione non vincolata³⁶:

$$(5.54) \quad \underset{W}{\text{Max}} \left(W^T \cdot M - \frac{1}{2} \lambda \cdot W^T \cdot C \cdot W \right)$$

³⁶ Si noti l'assenza di qualsiasi vincolo, compreso quello relativo alla somma dei pesi pari a 1.

è la seguente $W = \frac{C^{-1}}{\lambda} \cdot M$

Effettuando alcuni semplici passaggi algebrici si giunge al seguente risultato:

$$(5.55) \quad M = (\lambda C) \cdot W$$

Quindi, conoscendo la matrice delle covarianze (C), il parametro di avversione al rischio (λ) e la composizione di un portafoglio (W), è possibile determinare i rendimenti (M) che utilizzati in una ottimizzazione media-varianza restituirebbero un portafoglio efficiente con composizione W . Poiché questo processo ribalta la logica dell'ottimizzazione classica (i pesi diventano un *input* e i rendimenti l'*output*), esso viene comunemente definito *reverse optimization*.

Tornando al modello B-L, questo *modus operandi* può essere applicato per determinare la nostra distribuzione multivariata di equilibrio. Se ipotizziamo che la matrice delle covarianze Σ sia nota e che il portafoglio *market neutral* (assimilabile al portafoglio di mercato del *Capital Asset Pricing Model*) abbia una composizione identificata dal vettore colonna W_{MN} , allora il vettore Π dei rendimenti di equilibrio può essere così calcolato:

$$(5.56) \quad \Pi = (\lambda \Sigma) \cdot W_{MN}$$

Per la stima del coefficiente di avversione al rischio si ricorre frequentemente alla formula:

$$(5.57) \quad \lambda = \frac{E(R)_{MN} - r_f}{\sigma_{MN}^2}$$

dove:

$E(R)_{MN}$ = Rendimento atteso del portafoglio *market neutral*;

r_f = Rendimento *risk-free*;

σ_{MN}^2 = Varianza del portafoglio *market neutral*.

Tuttavia, nel caso in cui λ venga così calcolato, l'espressione $(\lambda \Sigma) \cdot W_{MN}$ stima gli *excess return* (i premi al rischio) di equilibrio; ai fini della stima dei rendimenti di equilibrio occorre quindi applicare questa formula:

$$(5.58) \quad \Pi = r_f \cdot I + (\lambda \Sigma) \cdot W_{MN}$$

dove I è un vettore colonna di valori unitari di dimensione equivalente al numero degli

asset.

È dimostrabile³⁷ che stimando il λ in questo modo, i valori Π conseguiti con la *reverse optimization* coincidono con quelli conseguiti utilizzando lo *Security Market Line* del CAPM di Sharpe, Lintner e Mossin³⁸.

La prima fonte informativa del modello B-L è sintetizzabile nella distribuzione dei rendimenti $r \sim N(\Pi, \Sigma)$, dove, noto λ :

- la matrice delle covarianze è ipotizzata nota;
- il vettore dei rendimenti attesi è calcolato ricorrendo alla *reverse optimization*.

L'assunto è che i rendimenti attesi μ dei mercati siano variabili aleatorie distribuite normalmente, centrate attorno ai valori di equilibrio Π :

$$(5.59) \quad \mu = \Pi + \varepsilon^{(I)}$$

³⁷ Nel *framework* del CAPM, i rendimenti attesi di equilibrio dei *risky asset* sono determinati nel modo seguente:

$$E(R)_i = r_f + [E(R)_{MN} - r_f] \cdot \frac{Cov(r_{MN}; r_i)}{\sigma_{MN}^2} = r_f + [E(R)_{MN} - r_f] \cdot \beta_i$$

dove:

$E(R)_i$ = Rendimenti atteso della attività i.esima;

$E(R)_{MN}$ = Rendimento atteso del portafoglio di mercato;

r_f = Rendimento dell'attività *risk-free*;

$Cov(r_{MN}; r_i)$ = Covarianza tra i rendimenti del portafoglio di mercato e dell'attività i.esima;

β_i = Beta della attività i.esima;

σ_{MN}^2 = Varianza del portafoglio di mercato.

Ipotizzando di utilizzare questa formula per calcolare i rendimenti attesi di equilibrio di più *asset class*, l'insieme delle *Security Market Line* può essere espresso in forma matriciale:

$$\Pi = r_f \cdot I + \frac{[E(R)_{MN} - r_f]}{\sigma_{MN}^2} \cdot COV = r_f \cdot I + \lambda \cdot COV$$

Dove:

Π = Vettore colonna dei rendimenti attesi delle *asset class*;

COV = Vettore colonna delle covarianze tra i rendimenti del portafoglio di mercato e di ciascuna delle *asset class*; l'i.esimo elemento di questo vettore è la covarianza tra il portafoglio di mercato e l'i.esima *asse class*.

I = Vettore colonna di valori unitari di dimensione equivalente al vettore Π .

Poiché la matrice COV è pari al prodotto tra la matrice delle covarianze dei rendimenti degli *asset* (Σ) e il vettore colonna (W_{MN}) che identifica i pesi del portafoglio di mercato:

$$COV = \Sigma \cdot W_{MN}$$

l'espressione matriciale che identifica i rendimenti attesi di equilibrio può essere scritta nel seguente modo:

$$\Pi = r_f \cdot I + \lambda \cdot \Sigma \cdot W_{MN}$$

Questa è la formula che si ottiene applicando la *reverse optimization*.

³⁸ Cfr. Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966).

dove $\varepsilon^{(I)}$ è un vettore colonna di dimensione (N) equivalente al numero delle *asset class*, che esprime gli errori dei rendimenti di equilibrio. $\varepsilon^{(I)}$ si distribuisce come una normale multivariata con media nulla (i rendimenti di equilibrio Π sono *unbiased*) e matrice delle covarianze $\tau\Sigma$:

$$(5.60) \quad \varepsilon^{(I)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{(I)} \\ \varepsilon_2^{(I)} \\ \vdots \\ \varepsilon_N^{(I)} \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ; \tau\Sigma \right)$$

Alternativamente, potremmo scrivere:

$$(5.61) \quad \mu \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$$

In letteratura non vi è uniformità circa il valore da attribuire allo scalare τ . Vale tuttavia una considerazione generale: poiché l'incertezza dei rendimenti medi è inferiore dell'incertezza dei rendimenti, τ dovrebbe essere minore di uno, in modo tale che $\tau\Sigma$ assuma valori numerici inferiori di Σ . È frequente attribuire a questo scalare un valore compreso tra 0,01 e 0,05³⁹. Inoltre, nell'ipotesi in cui la matrice delle covarianze (Σ) sia estrapolata da un campione di osservazioni storiche di ampiezza T , è possibile attribuire a τ un valore pari a $1/T$. Operando in questo modo, applichiamo ai rendimenti attesi di equilibrio le proprietà delle medie campionarie⁴⁰. Ad ogni modo, τ rimane una variabile soggettiva: maggiore è la fiducia nei confronti della condizione di equilibrio del mercato, minore deve essere il valore attribuito a questo scalare.

Mutuando il linguaggio bayesiano, l'espressione $\mu = \Pi + \varepsilon^{(I)}$ rappresenta la *prior information*⁴¹. Il fatto che Π e Σ siano scelti in modo da restituire un investimento

³⁹ Cfr. Lee (2000).

⁴⁰ Infatti, se i rendimenti attesi delle *asset class* seguono una distribuzione normale multivariata con parametri ignoti μ e Σ :

$$r \sim N(\mu, \Sigma)$$

le medie campionarie delle *asset class* (rappresentate dal vettore $\hat{\mu}$) estratte da un campione di ampiezza T sono anch'esse distribuite normalmente con parametri ignoti μ e Σ/T :

$$\hat{\mu} \sim N\left(\mu, \frac{\Sigma}{T}\right)$$

⁴¹ In realtà non vi è unanimità di consensi circa la natura del *prior information*: He e Litterman (1999, 2002) - al pari di quanto affermato in questo lavoro - identificano il *prior* nei rendimenti di equilibrio; di contro per Lee (2000) e Meucci (2005) il *prior* è dato dalle *view*. Entrambe queste opzioni sembra coerenti con un *framework* bayesiano. Infatti, a favore della prima ipotesi vi è l'assunto che la *view* potrebbe essere estrapolata da serie storiche campionarie, le cui dimensioni ne influenzano il grado di

neutrale dimostra che, a differenza degli stimatori di *shrinkage*, qui il *prior* non viene scelto in funzione della sola necessità di minimizzare l'errore di stima, ma anche della volontà di partire da un portafoglio *neutrale* dalla composizione ragionevole. Da ciò deriva una significativa riduzione della probabilità di conseguire portafogli giudicati *unreasonable*⁴².

Il passaggio successivo riguarda l'introduzione della seconda fonte informativa, identificabile nella produzione delle *view*. Il contributo di queste ultime è colto efficacemente da Drobetz (2001): «*The Black-Litterman model gravitates toward a neutral, i.e. market capitalization weighted, portfolio that tilts in the direction of assets favoured in the views expressed by the investor. The extent of deviation from equilibrium depends on the degree of confidence the investor has in each view*». Parafrasando le parole di Drobetz, il compito delle *view* è quello di attribuire all'*asset manager* (o all'investitore) la possibilità di allontanare il portafoglio dalla composizione neutrale, in modo da allinearlo alle opinioni relative al futuro comportamento dei mercati. Questo modello non nasce dunque dall'assunto che i mercati siano in costante equilibrio; piuttosto, partendo da uno stato di equilibrio, attribuisce agli analisti l'opportunità di discostarsene in presenza di opinioni contrastanti ma affidabili: «*We need not assume that markets are always in equilibrium to find an equilibrium approach useful. Rather, we view the world as a complex, highly random system in which there is a constant barrage of new data and shocks to existing valuations that as often as not knock the system away from equilibrium. However, although we anticipate that these shocks constantly create deviations from equilibrium in financial market [...]* we also assume that these deviations represent opportunities» (Litterman, B. e

fiducia. Di contro, la tesi di Lee e Meucci trova conferma nel fatto che il *prior* dovrebbe assumere una natura *soggettiva* (mentre i rendimenti di equilibrio sono, almeno in teoria, oggettivi) e coincidere quindi con le *view*. Chi scrive è concorde con He e Litterman; questa posizione nasce dal seguente ragionamento: il *prior* bayesiano ha il compito di ridurre l'*errore di stima*, favorendo, in una logica media-varianza, la costruzione di portafogli meno esposti al problema. Analizzando la questione da quest'ottica, è la distribuzione iniziale di equilibrio che contribuisce a migliorare le previsioni economiche dei gestori, non l'opposto. Del resto le sole *view* condurrebbero a portafogli concentrati (con le conseguenze negative a noi note), mentre le sole distribuzioni di equilibrio condurrebbero a portafogli diversificati. In tal senso, sono le *view* a dover essere supportate dai dati di equilibrio, ed è quindi più corretto identificare il *prior* negli input *market neutral*.

⁴² La possibilità di conseguire soluzioni irragionevoli, perché concentrate o poco fedeli alle capitalizzazioni di borsa, è ravvisabile solo nell'ipotesi in cui la seconda fonte informativa (le *view*) produca una elevata "perturbazione", in grado di mutare sensibilmente la distribuzione di equilibrio. Il tema è approfondito nel paragrafo 5.4.2.

Quantitative Resources Group di Goldman Sachs, 2003). Questa capacità di incorporare nel modello le *economic view* dei gestori rappresenta la proprietà operativamente più interessante del modello in esame⁴³. Il modello B-L è molto flessibile e non obbliga l'*asset manager* ad esprimere delle *view* sulla totalità delle *asset class*. Inoltre, come già anticipato, le *view* potranno essere di tipo relativo e/o assoluto.

Da un punto di vista analitico le *view* vengono espresse utilizzando la seguente forma matriciale:

$$(5.62) \quad P \cdot \mu = Q + \varepsilon^{(II)}$$

- a. P è una matrice di dimensione $K \times N$, dove ciascuna delle K righe identifica una specifica *view* ed N indica la numerosità delle *asset class*. Il compito di P è quello di identificare i mercati coinvolti nelle *view*.
- b. μ è un vettore colonna di dimensione N che identifica i rendimenti attesi delle *asset class*. La produttoria tra P e μ permette di identificare la natura delle variabili aleatorie sulle quali si focalizzano la opinioni dei gestori.
- c. Q è un vettore colonna di dimensione K che identifica le *view*, ovvero i rendimenti che ci si attende dalle combinazioni dei mercati identificate dalla produttoria tra P e μ .
- d. $\varepsilon^{(II)}$ è un vettore colonna di dimensione K che esprime gli errori delle *view*. Il vettore degli errori si distribuisce come una normale con media nulla (le *view* sono *unbiased*) e matrice delle covarianze Ω .

Alternativamente possiamo scrivere:

$$(5.63) \quad P \cdot \mu \sim N(Q; \Omega)$$

Allo scopo di chiarire la natura di queste matrici, facciamo ricorso ad un esempio numerico. Ipotizziamo che un *asset manager* consideri 6 mercati ed esprima le seguenti opinioni:

1. *Il terzo mercato renderà il 10%;*
2. *Il secondo mercato renderà il 4% in più del sesto mercato;*
3. *Il 50% del secondo mercato più il 50% del quinto mercato renderanno più del primo mercato di un importo pari al 2%.*

⁴³ Va sottolineato che l'approccio di Black-Litterman non rappresenta l'unico tentativo di incorporare le *view* economiche partendo da un modello di equilibrio. A tal proposito si rimanda ai lavori di Kandel e Stambaugh (1996), Connor (1997), Pastor (2000), Pastor e Stambaugh (2000, 2002) e Avramov (2004).

La generica formula $P \cdot \mu = Q + \varepsilon^{(II)}$ assume la seguente forma⁴⁴:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E(R)_{Mkt1} \\ E(R)_{Mkt2} \\ E(R)_{Mkt3} \\ E(R)_{Mkt4} \\ E(R)_{Mkt5} \\ E(R)_{Mkt6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\% \\ 4\% \\ 2\% \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{(II)} \\ \varepsilon_2^{(II)} \\ \varepsilon_3^{(II)} \end{bmatrix}$$

dove

$$\varepsilon^{(II)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{(II)} \\ \varepsilon_2^{(II)} \\ \varepsilon_3^{(II)} \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \Omega \right)$$

Sviluppando il prodotto matriciale nel primo addendo, arriviamo ad un risultato che permette di apprezzare la natura delle variabili aleatorie sulle quali si focalizzano le *view*:

$$\begin{bmatrix} E(R)_{Mkt1} \\ E(R)_{Mkt2} - E(R)_{Mkt6} \\ 0,5 \cdot E(R)_{Mkt2} + 0,5 \cdot E(R)_{Mkt5} - E(R)_{Mkt1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\% \\ 4\% \\ 2\% \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{(II)} \\ \varepsilon_2^{(II)} \\ \varepsilon_3^{(II)} \end{bmatrix}$$

Ancor prima di affrontare il tema della combinazione delle due fonti informative (distribuzione di equilibrio e opinioni), occorre analizzare la forma della matrice Ω , il cui compito è quello di definire il grado di fiducia delle *view*. È usuale costruire una matrice diagonale, ovvero caratterizzata da valori esterni alla diagonale principale pari a zero⁴⁵:

$$(5.64) \quad \Omega = \begin{bmatrix} \varpi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varpi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varpi_n \end{bmatrix}$$

Questa configurazione implica l'indipendenza tra le *view*, e ha il pregio di facilitare il compito del gestore, dispensandolo dall'onere di stimare le correlazioni tra le proprie

⁴⁴ In riferimento alla matrice P , si noti come tutte le *asset class* non contemplate nelle *view* assumono peso nullo.

⁴⁵ L'assunzione di una matrice Ω diagonale non è obbligatoria. Sulla trattazione del problema in ipotesi di matrice non diagonale si rimanda al lavoro di He e Litterman (2002).

opinioni. I valori ϖ presenti lungo la diagonale principale esprimono l'errore di previsione e la loro stima rappresenta forse l'aspetto più complesso e dibattuto del modello B-L. Se le *view* venissero estrapolate da un modello di previsione quantitativo, la stima di ϖ risulterebbe facilitata, poiché in tal caso sarebbe possibile utilizzare l'errore del modello, ovvero la varianza del rendimento atteso non spiegata dal modello stesso:

$$(5.65) \quad \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \cdot (1 - R_1^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \cdot (1 - R_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_K^2 \cdot (1 - R_K^2) \end{bmatrix}$$

dove R^2 identifica la porzione di varianza del rendimento atteso spiegata dal modello.

In assenza di un modello di stima, vi è pur sempre la possibilità di trasformare una opinione da qualitativa in quantitativa. Ad esempio, qualora un analista abbia pronosticato - per un mercato o una combinazione di più mercati - un rendimento atteso v , egli può essere esortato ad identificare l'intervallo $[\alpha_1; \alpha_2]$ tale per cui la probabilità che il rendimento atteso si collochi al suo interno sia pari al $k\%$. Queste informazioni, insieme alle proprietà di una distribuzione normale, permettono di identificare la varianza implicita del rendimento atteso:

$$(5.66) \quad \sigma^2 \text{ tale per cui : } \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} n(x; v; \sigma^2) dx = k\%$$

Ad esempio ipotizziamo che un *asset manager* ritenga che il mercato giapponese conseguirà un rendimento del 5% e che vi sia una probabilità del 95% che il rendimento atteso si collochi all'interno dell'intervallo $[0\%; 10\%]$. Sfruttando le proprietà della gaussiana possiamo quantificare la varianza utilizzabile per configurare la matrice Ω :

$$\begin{aligned} \sigma^2 \text{ tale per cui : } \int_0^{0,1} n(x; 5\%; \sigma^2) dx &= 95\% \\ \sigma^2 &= 3,04\%^2 = 0,000924 \end{aligned}$$

Molti dei lavori proposti in letteratura calcolano i valori ϖ , utilizzando direttamente la matrice delle covarianze già utilizzata per la stima della *prior distribution*. Il modo più semplice per calcolare i valori della diagonale principale di Ω è quello proposto da

He e Litterman (2002): «*The confidence level on a view is calibrated so that the ratio between the parameters ϖ and τ is equal to the variance of the portfolio in the view*».

Seguendo questa procedura, la matrice Ω assume la seguente forma:

$$(5.67) \quad \Omega = \begin{bmatrix} p_1 \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_1^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_2^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_K \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_K^T \end{bmatrix}$$

Dove p_1, p_2, \dots, p_K rappresentano le righe della matrice P .

Questa soluzione semplificata ha il limite di stimare Ω senza che l'*asset manager* esprima il grado di fiducia riposta nelle opinioni. Il suo utilizzo presuppone l'ipotesi che la fiducia nelle *view* sia equivalente alla fiducia nella condizione di equilibrio dei mercati.

Allo scopo di rimuovere questa limitazione, è possibile ricorrere ad una soluzione alternativa:

$$(5.68) \quad \Omega = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{c_1} - 1\right) \cdot p_1 \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_1^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{c_2} - 1\right) \cdot p_2 \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_2^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{c_K} - 1\right) \cdot p_K \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_K^T \end{bmatrix}$$

c_1, c_2, \dots, c_K sono scalari il cui compito è quello di esprimere la fiducia che l'*asset manager* ripone nelle k generiche *view*. I parametri c possono assumere valori all'interno dell'intervallo (0; 100%), estremi esclusi; la logica di attribuzione dei valori è la seguente:

- se l'*asset manager* ripone una bassa confidenza nella opinione, lo scalare c assume valori prossimi a zero. La distribuzione di probabilità della *view* sarà caratterizzata da elevata dispersione, a causa della quale i rendimenti finali saranno scarsamente influenzati dalla *view*;
- se l'*asset manager* ripone una elevata confidenza nell'opinione, lo scalare c assume valori prossimi al 100%. La distribuzione di probabilità della *view* sarà caratterizzata da bassa dispersione, e i rendimenti finali dipenderanno prevalentemente dalla *view*.

In sintesi, al crescere di c aumenta la confidenza nella opinione, così come la sua

capacità di influenzare la distribuzione finale (la *posterior distribution*) dei rendimenti attesi. Una notazione particolare merita il caso in cui c assuma un valore pari al 50%; in questo caso la varianza della view diventa:

$$(5.69) \quad \left(\frac{1}{0,5} - 1 \right) \cdot p_i \cdot (\Sigma \cdot \tau) \cdot p_i^T = (2 - 1) \cdot p_i \cdot (\Sigma \cdot \tau) \cdot p_i^T = p_i \cdot (\Sigma \cdot \tau) \cdot p_i^T$$

Si torna così alla versione semplificata, nella quale i rendimenti di equilibrio e le *view* contribuiscono equamente alla determinazione della distribuzione finale dei rendimenti. Come si potrà verificare negli esempi numerici proposti nel successivo paragrafo, attribuendo a c valori elevati si producono rendimenti attesi finali che, discostandosi significativamente da quelli di equilibrio, conducono a portafogli ottimali anch'essi notevolmente difformi dalla posizione *market neutral*. Per tale ragione ed in virtù della concreta difficoltà di produrre *view* attendibili, si suggerisce di attribuire a c valori non eccessivi.

A questo punto non rimane che affrontare il tema della stima della *posterior distribution*. A tal proposito Black e Litterman (1992) scrivono: «*The expected excess return, $E[R]$, is unobservable. It is assumed to have a probability distribution that is proportional to a product of two normal distribution. The first distribution represents equilibrium. [...] The second distribution represents the investor's views*». Difatti, la *prior information* e le opinioni dei gestori ci restituiscono due distinte espressioni:

$$(5.70) \quad \mu = \Pi + \varepsilon^{(I)}$$

$$(5.71) \quad P \cdot \mu = Q + \varepsilon^{(II)}$$

Entrambe hanno l'ambizione di stimare la distribuzione dei rendimenti attesi delle *asset class*⁴⁶ pescando rispettivamente da una condizione di *market equilibrium* e dalle capacità previsionali individuali. Ipotizzando che queste fonti informative siano indipendenti tra loro, ovvero assumendo la non correlazione tra $\varepsilon^{(I)}$ e $\varepsilon^{(II)}$:

$$(5.72) \quad \begin{bmatrix} \varepsilon^{(I)} \\ \varepsilon^{(II)} \end{bmatrix} \sim N \left(0; \begin{bmatrix} \tau \Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \right)$$

il risultato finale - ovvero i rendimenti attesi definiti *alla Black-Litterman* (Π_{BL}) - si

⁴⁶ La prima espressione riguarda la totalità dei mercati, la seconda anche semplicemente un sottoinsieme.

ottiene nel modo seguente⁴⁷:

$$(5.73) \quad \Pi_{BL} = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P \right]^{-1} \times \left[(\tau \Sigma)^{-1} \cdot \Pi + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot Q \right]$$

Mutuando Idzorek (2004), nella Figura 5.18 viene sintetizzato graficamente l'intero modello Black-Litterman. Disponiamo così del vettore dei rendimenti attesi Π_{BL} utilizzabile come *input* in una ottimizzazione media-varianza.

Figura 5.18: Rappresentazione sintetica del modello Black-Litterman

⁴⁷ Per la dimostrazione si rimanda a Theil e Golberger (1961). È possibile calcolare anche la matrice delle covarianze dei rendimenti attesi:

$$\Sigma_{BL} = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P \right]^{-1}$$

Questo risultato fu proposto da Satchell e Scowcroft (2000), mentre Black e Litterman, nel loro lavoro del 1992, non lo segnarono. Tuttavia, la “dimenticanza” degli autori non appare significativa, poiché Σ_{BL} , rappresentando la matrice delle covarianze dei rendimenti attesi (anziché dei rendimenti), non può essere utilizzata come *input* nelle ottimizzazioni media-varianza. Tuttavia questo risultato non è privo di valore, poiché in taluni casi è possibile riconvertire la matrice delle covarianze dei rendimenti attesi nella matrice delle covarianze dei rendimenti. Ad esempio, applicando le proprietà delle medie campionarie, la matrice Σ delle covarianze delle medie estratta da un campione di ampiezza T , può essere trasformata nella matrice delle covarianze dei rendimenti, moltiplicando tra loro Σ e T .

Infine, nell'ipotesi in cui le view siano ipotizzate certe (la diagonale principale della matrice Ω presenta tutti valori nulli), i rendimenti alla Black-Litterman si ottengono risolvendo la seguente ottimizzazione vincolata (Cfr. Black e Litterman, 1992 e Lee, 2000):

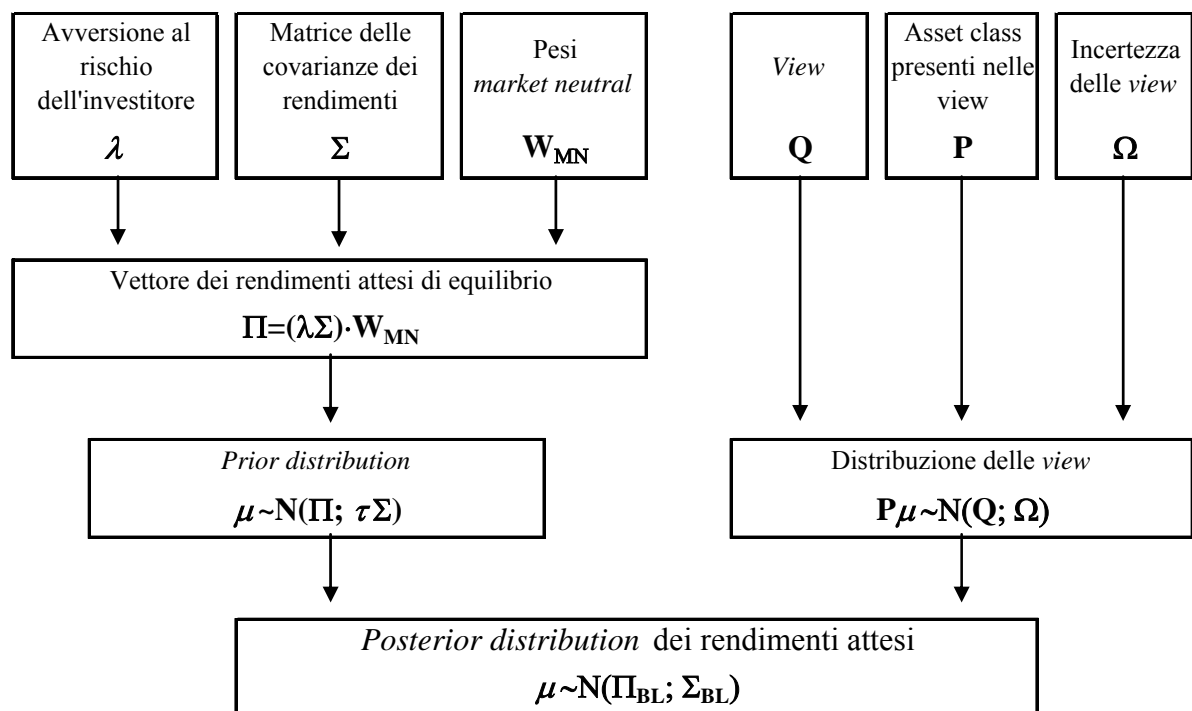
$$\min_{\Pi_{BL}} (\Pi - \Pi_{BL})^T \cdot \tau \Sigma^{-1} \cdot (\Pi - \Pi_{BL})$$

Vincolo :

$$P \cdot \Pi_{BL} = Q$$

La funzione minimizzanda rappresenta la distanza di Mahalanobis (cfr. il paragrafo 5.4.2); il vincolo impone che i rendimenti finali alla Black-Litterman siano perfettamente fedeli alle view espresse. Il risultato finale è in tal caso il seguente:

$$\Pi_{BL} = \Pi + (\tau \Sigma) \cdot P^T \cdot (P \cdot \tau \Sigma \cdot P^T)^{-1} \cdot (Q - P \cdot \Pi)$$



Fonte: Idzorek (2004)

5.4.2 Applicazione pratica

Il ricorso ad un esempio numerico sarà utile al fine di chiarire le caratteristiche del modello, nonché apprezzarne la coerenza con il *modus operandi* degli *asset manager*. A tal fine, l'esercizio numerico riproduce il comportamento di un gestore alle prese con un problema di *asset allocation*.

Un gestore di un fondo bilanciato, nel tentativo di soddisfare le esigenze di un investitore-tipo, costruisce un portafoglio combinando più mercati. Gli *asset* che egli considera potenzialmente interessanti sono 8, ed a ciascuno di essi viene associato un indice di mercato (Tabella 5.6).

Tabella 5.6: Mercati e Benchmark selezionati

 Mercati 	Indici di Mercato
Monetario area Euro	I. Mkt. 1 = JPM Euro Cash 3M - Tot Return Ind
Obbligazionario Area Euro	I. Mkt. 2 = CGBI WGBI EMU All Mats. - Tot Return Ind
Obbligazionario Internazionale	I. Mkt. 3 = CGBI WGBI BD All Mats - Tot Return Ind
Azionario Europa	I. Mkt. 4 = MSCI Europe - Gross Index
Azionario Nord America	I. Mkt. 5 = MSCI North America - Gross Index
Azionario Giappone	I. Mkt. 6 = MSCI Japan - Gross Index
Azionario Pacifico con esclusione del Giappone	I. Mkt. 7 = MSCI Pacific free ex Japan - Gross Index
Azionario Paesi Emergenti	I. Mkt. 8 = MSCI EM (Emerging Markets) - Gross Index

Egli ipotizza che i rendimenti delle *asset class* si distribuiscano come una normale multivariata:

$$(5.74) \quad r \sim N(\mu, \Sigma)$$

Ai fini della stima dei rendimenti attesi, ci si affida al modello B-L che, coerentemente con la sua natura bayesiana, combina due set informativi indipendenti: il primo prevalentemente oggettivo⁴⁸, il secondo soggettivo. Ai fini della stima dei rendimenti attesi di equilibrio (Π) occorre disporre:

- della composizione del portafoglio *market neutral* (W_{MN});
- della matrice delle covarianze (Σ);
- del parametro di avversione al rischio dell'investitore (λ).

In primis, il gestore deve identificare il portafoglio-benchmark privo di scommesse, ovvero coerente con le capitalizzazioni di borsa dei mercati. Da un punto di vista teorico questo portafoglio dovrebbe coincidere con il *market portfolio* del Capital Asset Pricing Model. Tuttavia, in termini squisitamente operativi questa non rappresenta una soluzione efficace: infatti, il portafoglio di mercato potrebbe avere una composizione incoerente con l'avversione al rischio; ad esempio, esso potrebbe presentare una percentuale di *risky asset* non in linea con gli obiettivi perseguiti dall'investitore⁴⁹. Per questa ragione, è operativamente più corretto selezionare un portafoglio che sia sì *market neutral*, ma anche coerente con la tolleranza al rischio dell'investitore-tipo⁵⁰. Il

⁴⁸ Sarebbe errato affermare che la stima della *posterior distribution* sia totalmente oggettiva, poiché la determinazione della matrice delle covarianze è di tipo soggettivo. Ad esempio, qualora si ricorra alla logica campionaria, occorrerebbe definire (soggettivamente) l'ampiezza del campione.

⁴⁹ Il problema sarebbe eliminato se il *market portfolio* venisse combinato con l'attività *risk-free*. Ma nella pratica i gestori non ricorrono a questa soluzione.

⁵⁰ Sulla costruzione di portafogli *market neutral* caratterizzati da livelli diversi di rischio, si veda il paragrafo 4.2.1.

portafoglio selezionato è il seguente⁵¹:

$$W_{MN} = \begin{bmatrix} w_{\text{Mon.rio Area Euro}} \\ w_{\text{Obbl.rio Area Euro}} \\ w_{\text{Obbl.rio Internazionale}} \\ w_{\text{Az.rio Europa}} \\ w_{\text{Az.rio Nord America}} \\ w_{\text{Az.rio Giappone}} \\ w_{\text{Az.rio Pac. ex Giappone}} \\ w_{\text{Az.rio Emerg. Market}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,40\% \\ 61,60\% \\ 4,50\% \\ 7,96\% \\ 12,21\% \\ 2,30\% \\ 0,97\% \\ 2,07\% \end{bmatrix}$$

La matrice delle covarianze (Σ) - che il modello assume esatta - viene estrapolata da un campione storico di rendimenti (espressi in euro) di ampiezza T=19 anni relativo al periodo Gennaio 1988 - Dicembre 2006 (Tabella 5.7)..

Tabella 5.7: La matrice delle covarianze (Σ)

	I. Mkt. 1	I. Mkt. 2	I. Mkt. 3	I. Mkt. 4	I. Mkt. 5	I. Mkt. 6	I. Mkt. 7	I. Mkt. 8
I. Mkt. 1	0,0009	0,00044	0,0007	-0,00068	0,00022	-0,00222	0,00073	0,00128
I. Mkt. 2	0,00044	0,00267	0,0024	-0,00015	0,00064	-0,00439	0,00187	-0,00288
I. Mkt. 3	0,0007	0,0024	0,00695	0,00903	0,01137	0,00842	0,01396	0,01373
I. Mkt. 4	-0,00068	-0,00015	0,00903	0,03948	0,03824	0,03765	0,03792	0,04713
I. Mkt. 5	0,00022	0,00064	0,01137	0,03824	0,04607	0,03478	0,0304	0,04386
I. Mkt. 6	-0,00222	-0,00439	0,00842	0,03765	0,03478	0,09444	0,06984	0,09136
I. Mkt. 7	0,00073	0,00187	0,01396	0,03792	0,0304	0,06984	0,09455	0,10289
I. Mkt. 8	0,00128	-0,00288	0,01373	0,04713	0,04386	0,09136	0,10289	0,14207

Per la stima del parametro di avversione al rischio seguiamo una logica di determinazione facilmente replicabile, basata sull'uso della espressione più diffusa:

$$(5.75) \quad \lambda = \frac{E(R)_{MN} - r_f}{\sigma_{MN}^2}$$

Il tasso *risk-free* è pari al 4%. Disponendo della composizione del portafoglio di equilibrio e della matrice delle covarianze, possiamo calcolare il denominatore, ossia la varianza del portafoglio di equilibrio:

$$(5.76) \quad \sigma_{MN}^2 = W_{MN}^T \cdot \Sigma \cdot W_{MN} = 0,00416$$

Per il calcolo del rendimento atteso del portafoglio *market neutral*, ipotizziamo che

⁵¹ Ad esempio, la sua natura *market neutral* impone di attribuire ai mercati azionari un peso proporzionale alle loro capitalizzazioni di borsa.

il fondo bilanciato si rivolga ad un investitore-tipo il quale, sensibile alla manifestazione degli eventi estremi negativi, sia disponibile ad assumere un rischio tale per cui la probabilità che il portafoglio riporti un risultato peggiore del -5% (*threshold*) sia pari al 5% (*shortfall probability*). Sfruttando le proprietà delle distribuzioni gaussiane, disponiamo di tutti gli input necessari per stimare il valore di $E(R)_{MN}$ per cui la *shortfall probability* sia esattamente quella desiderata:

$$(5.77) \quad E(R)_{MN} \text{ tale per cui : } \int_{-\infty}^{E(R)_{MN} - 1,645 \cdot \sigma_{MN}^2} n(x; E(R)_{MN}; \sigma_{MN}^2) = 5\%$$

La soluzione dell'equazione è $E(R)_{MN} = 5,606\%$. Il coefficiente di avversione al rischio è:

$$\lambda = \frac{5,606\% - 4\%}{0,00416} = 3,863$$

A questo punto possiamo procedere al calcolo dei rendimenti di equilibrio:

$$\Pi = r_f \cdot I + (\lambda \Sigma) \cdot W_{MN} = \begin{bmatrix} E(R)_{\text{Mon.rio Area Euro}} \\ E(R)_{\text{Obbl.rio Area Euro}} \\ E(R)_{\text{Obbl.rio Internazionale}} \\ E(R)_{\text{Az.rio Europa}} \\ E(R)_{\text{Az.rio Nord America}} \\ E(R)_{\text{Az.rio Giappone}} \\ E(R)_{\text{Az.rio Pac. ex Giappone}} \\ E(R)_{\text{Az.rio Emerg. Market}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,129\% \\ 4,661\% \\ 5,766\% \\ 7,969\% \\ 8,477\% \\ 7,656\% \\ 9,104\% \\ 9,442\% \end{bmatrix}$$

La prima fase del modello si chiude con la determinazione del parametro τ grazie al quale trasformare la matrice delle covarianze dei rendimenti in quella dei rendimenti attesi. Applicando ai rendimenti di equilibrio le proprietà delle medie campionarie, stimiamo il parametro in oggetto ricorrendo alla dimensione T del campione utilizzato per estrapolare Σ :

$$(5.78) \quad \tau = \frac{1}{T} = \frac{1}{19} = 0,0526$$

La *prior distribution* è:

$$\mu \sim N(\Pi; \tau\Sigma) = N \left(\begin{bmatrix} 4,129\% \\ 4,661\% \\ 5,766\% \\ 7,969\% \\ 8,477\% \\ 7,656\% \\ 9,104\% \\ 9,442\% \end{bmatrix}; 0,0526 \cdot \begin{bmatrix} 0,0009 & 0,0004 & 0,0007 & -0,0007 & 0,0002 & -0,002 & 0,0007 & 0,0013 \\ 0,0004 & 0,0027 & 0,0024 & -0,0001 & 0,0006 & -0,004 & 0,0019 & -0,0029 \\ 0,0007 & 0,0024 & 0,0069 & 0,0090 & 0,0114 & 0,0084 & 0,0140 & 0,0137 \\ -0,0007 & -0,0001 & 0,0090 & 0,0395 & 0,0382 & 0,0377 & 0,0379 & 0,0471 \\ 0,0002 & 0,0006 & 0,0114 & 0,0382 & 0,0461 & 0,0348 & 0,0304 & 0,0439 \\ -0,002 & -0,004 & 0,0084 & 0,0377 & 0,0348 & 0,0944 & 0,0698 & 0,0914 \\ 0,0007 & 0,0019 & 0,0140 & 0,0379 & 0,0304 & 0,0698 & 0,0946 & 0,1029 \\ 0,0013 & -0,0029 & 0,0137 & 0,0471 & 0,0439 & 0,0914 & 0,1029 & 0,1421 \end{bmatrix} \right)$$

Il passaggio successivo consiste nella produzione delle *view*. A tale scopo occorre stimare le seguenti variabili:

- P ;
- Q ;
- Ω ;

note le quali sarà possibile determinare la distribuzione delle *view*:

$$(5.79) \quad P \cdot \mu \sim N(Q; \Omega)$$

Ipotizziamo che il Comitato di Investimento della *mutual fund company* esprima le seguenti opinioni:

1. *Il Mercato Monetario Euro renderà più del Mercato Obbligazionario Euro di un importo pari all'1% (in equilibrio: -0,532%);*
2. *Il Mercato Azionario Europa renderà più del Mercato Azionario Nord America di un importo pari al 2% (in equilibrio: -0,508%);*
3. *Il Mercato Azionario Emerging Market renderà il 3,5% in più (in equilibrio: +1,786%) del Mercato Azionario Giappone.*

Il confronto tra le *view* e la condizione di equilibrio permette di apprezzare come il Comitato di Investimento abbia delle opinioni sensibilmente diverse dalla posizione *market neutral*. In particolare viene suggerita:

- una riduzione della *duration* del portafoglio obbligazionario domestico, riconducibile ad un incremento del monetario ai danni dell'obbligazionario Area Euro;
- una riallocazione del peso dei mercati azionari, favorevole ai comparti Europa e Paesi Emergenti.

L'entità di questi fenomeni è proporzionale al grado di fiducia che accompagna queste opinioni. Ipotizziamo che il Comitato attribuisca al parametro c delle 3 *view* un

valore pari all'8%⁵², corrispondente ad un livello moderato di fiducia. Procediamo alla stima dei parametri P, Q e Ω ⁵³:

$$P = \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1\% \\ 2\% \\ 3,5\% \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{c_1} - 1\right) \cdot p_1 \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_1^T & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{c_2} - 1\right) \cdot p_2 \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_2^T & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{c_3} - 1\right) \cdot p_3 \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_3^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,00163 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00549 & 0 \\ 0 & 0 & 0,03255 \end{bmatrix}$$

A titolo esemplificativo, si mostra il prodotto matriciale per il calcolo della varianza della prima opinione:

$$\Omega(1,1) = \left(\frac{1}{c_1} - 1\right) \cdot p_1 \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_1^T = \left(\frac{1}{0,08} - 1\right) \cdot \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\tau \Sigma) \cdot \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,00163$$

A questo punto disponiamo di tutti gli ingredienti per stimare i rendimenti attesi alla Black-Litterman:

$$(5.80) \quad \Pi_{BL} = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P \right]^{-1} \times \left[(\tau \Sigma)^{-1} \cdot \Pi + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot Q \right]$$

Analiticamente:

⁵² Ai fini del risultato finale si attribuisce un peso dell'8% alle view e del 92% ai rendimenti di equilibrio.

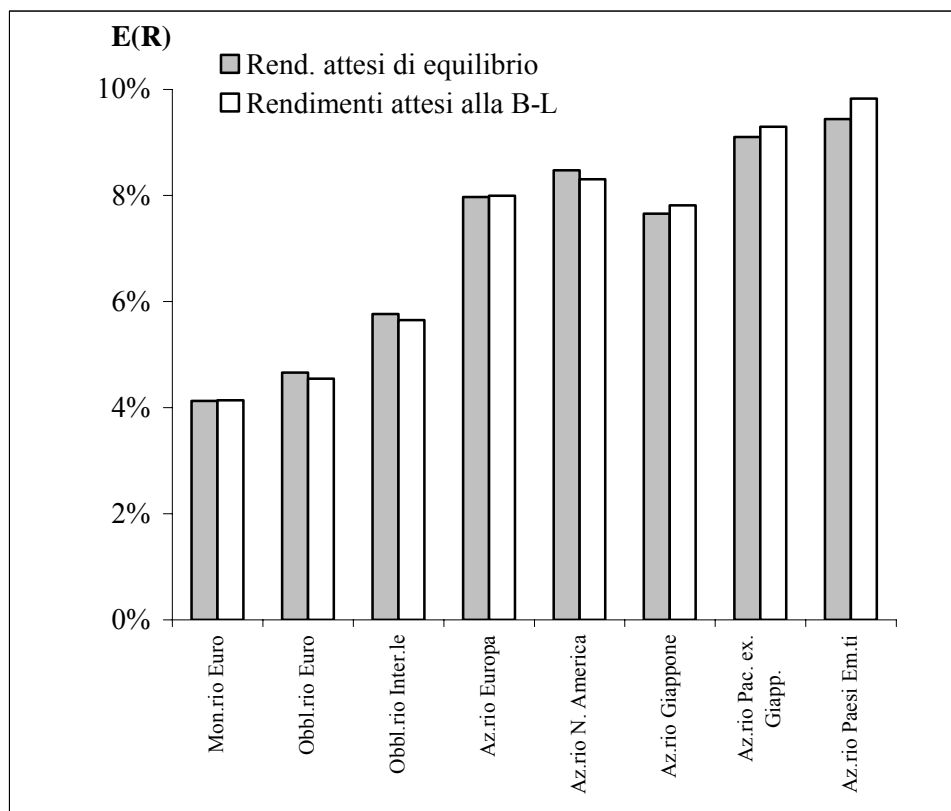
⁵³ La terza (Obbligazionario Internazionale) e la settima (Azionario Pacifico ex Giappone) *asset class* hanno sempre peso nullo, perché esse non sono mai oggetto di previsione nelle tre opinioni.

$$\begin{aligned}
\Pi_{BL} = & \left[\begin{aligned} & 0,0526 \cdot \begin{bmatrix} 0,0009 & 0,0004 & 0,0007 & -0,0007 & 0,0002 & -0,002 & 0,0007 & 0,0013 \\ 0,0004 & 0,0027 & 0,0024 & -0,0001 & 0,0006 & -0,004 & 0,0019 & -0,0029 \\ 0,0007 & 0,0024 & 0,0069 & 0,0090 & 0,0114 & 0,0084 & 0,0140 & 0,0137 \\ -0,0007 & -0,0001 & 0,0090 & 0,0395 & 0,0382 & 0,0377 & 0,0379 & 0,0471 \\ 0,0002 & 0,0006 & 0,0114 & 0,0382 & 0,0461 & 0,0348 & 0,0304 & 0,0439 \\ -0,002 & -0,004 & 0,0084 & 0,0377 & 0,0348 & 0,0944 & 0,0698 & 0,0914 \\ 0,0007 & 0,0019 & 0,0140 & 0,0379 & 0,0304 & 0,0698 & 0,0946 & 0,1029 \\ 0,0013 & -0,0029 & 0,0137 & 0,0471 & 0,0439 & 0,0914 & 0,1029 & 0,1421 \end{bmatrix}^{-1} \\ & + \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,00163 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00549 & 0 \\ 0 & 0 & 0,03255 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right]^{-1} \times \\
& \times \left[\begin{aligned} & 0,0526 \cdot \begin{bmatrix} 0,0009 & 0,0004 & 0,0007 & -0,0007 & 0,0002 & -0,002 & 0,0007 & 0,0013 \\ 0,0004 & 0,0027 & 0,0024 & -0,0001 & 0,0006 & -0,004 & 0,0019 & -0,0029 \\ 0,0007 & 0,0024 & 0,0069 & 0,0090 & 0,0114 & 0,0084 & 0,0140 & 0,0137 \\ -0,0007 & -0,0001 & 0,0090 & 0,0395 & 0,0382 & 0,0377 & 0,0379 & 0,0471 \\ 0,0002 & 0,0006 & 0,0114 & 0,0382 & 0,0461 & 0,0348 & 0,0304 & 0,0439 \\ -0,002 & -0,004 & 0,0084 & 0,0377 & 0,0348 & 0,0944 & 0,0698 & 0,0914 \\ 0,0007 & 0,0019 & 0,0140 & 0,0379 & 0,0304 & 0,0698 & 0,0946 & 0,1029 \\ 0,0013 & -0,0029 & 0,0137 & 0,0471 & 0,0439 & 0,0914 & 0,1029 & 0,1421 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4,129\% \\ 4,661\% \\ 5,766\% \\ 7,969\% \\ 8,477\% \\ 7,656\% \\ 9,104\% \\ 9,442\% \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,00163 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00549 & 0 \\ 0 & 0 & 0,03255 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1\% \\ 2\% \\ 3,5\% \end{bmatrix} \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\Pi_{BL} = \begin{bmatrix} 4,14\% \\ 4,55\% \\ 5,65\% \\ 7,99\% \\ 8,31\% \\ 7,81\% \\ 9,30\% \\ 9,83\% \end{bmatrix}$$

La Figura 5.19 propone un confronto tra i rendimenti di equilibrio e quelli alla Black-Litterman.

Figura 5.19: Π versus Π_{BL}



In presenza di covarianze (correlazioni) non nulle tra i mercati inclusi ed esclusi dalle opinioni, mutano anche i rendimenti attesi delle *asset class* non coinvolte nelle *view*. Ad esempio, l'Obbligazionario Internazionale vede ridursi il suo rendimento atteso, trascinato verso il basso dalla correlazione positiva con l'Obbligazionario Area Euro. Dunque qualora un gestore non volesse produrre effetti “a cascata” tra le *asset class*, egli dovrebbe azzerare le covarianze corrispondenti. Focalizzandosi sui soli mercati considerati nelle opinioni, la Tabella 5.8 mostra il differenziale di rendimento atteso riconducibile a:

- la condizione di equilibrio (*prior distribution*);
- le opinioni del Comitato di Investimento;
- la soluzione finale (*posterior distribution*).

I dati numerici confermano la tendenza dei rendimenti attesi alla B-L ad

allontanarsi dai dati di equilibrio, per convergere verso le *view* degli analisti. Naturalmente, avendo espresso una fiducia c moderata, l'effetto non è pronunciato. Se $c \rightarrow 100\%$ i risultati sarebbero di gran lunga differenti, poiché i rendimenti finali risulterebbero influenzati esclusivamente dalle *view*.

Tabella 5.8: L'effetto di variazione del rendimento atteso prodotto sulle asset class contemplate nelle *view*

	Equilibrio	View	Black-Litterman
$E(R)_{\text{MonEuro}} - E(R)_{\text{ObblEuro}}$	-0,532%	1,000%	-0,407%
$E(R)_{\text{AZEuropa}} - E(R)_{\text{AZN.Amer.}}$	-0,508%	2,000%	-0,311%
$E(R)_{\text{AZEm.Mkt}} - E(R)_{\text{AZGiapp.}}$	1,786%	3,500%	2,014%

A questo punto possiamo “lanciare” l'ottimizzazione media-varianza⁵⁴:

$$\begin{aligned}
 & \underset{w_{BL}}{\text{Max}} (W_{BL}^T \cdot \Pi_{BL}) \\
 & \text{vincoli:} \\
 (5.81) \quad & \sum_{i=1}^8 w_i = 1 \\
 & w_i \geq 0 \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \dots, 8. \\
 & \lambda = \frac{W_{BL}^T \cdot \Pi_{BL} - r_f}{W_{BL}^T \cdot \Sigma \cdot W_{BL}} = 3,863
 \end{aligned}$$

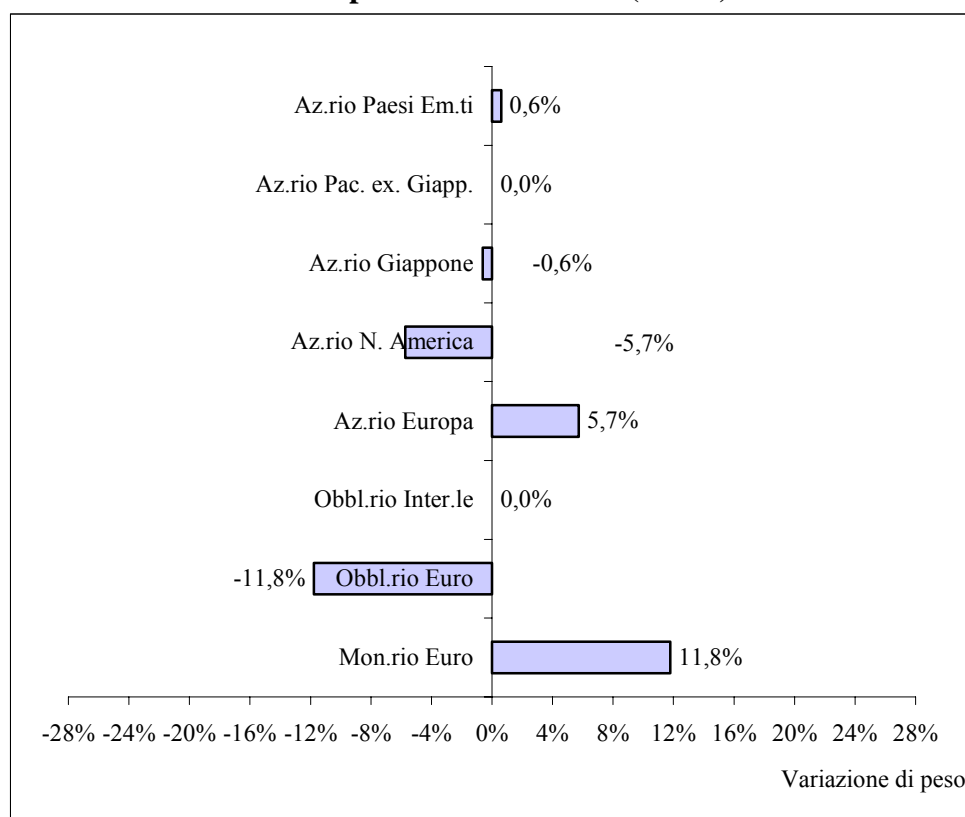
La soluzione al problema è:

$$w_{BL} = \begin{bmatrix} w_{\text{Monetario Area Euro}} \\ w_{\text{Obbligazionario Area Euro}} \\ w_{\text{Obbligazionario Internazionale}} \\ w_{\text{Azionario Europa}} \\ w_{\text{Azionario Nord America}} \\ w_{\text{Azionario Giappone}} \\ w_{\text{Azionario Pac. ex Giappone}} \\ w_{\text{Azionario Emerg. Market}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,18\% \\ 49,82\% \\ 4,50\% \\ 13,69\% \\ 6,48\% \\ 1,67\% \\ 0,97\% \\ 2,69\% \end{bmatrix}$$

⁵⁴ Si noti che a differenza di quanto fatto in precedenza, i rendimenti alla B-L non vengono utilizzati per “creare” l'intero set dei portafogli efficienti. L'ottimizzazione media-varianza viene infatti impostata per stimare quell'unico portafoglio coerente con l'avversione al rischio dell'investitore. Questa soluzione è motivata dal fatto che i rendimenti alla Black-Litterman sono stimati sulla base di un preciso valore del parametro λ ed è quindi teoricamente corretto (e operativamente più efficace) effettuare l'ottimizzazione in modo che anche il nuovo portafoglio sia caratterizzato dallo stesso valore di λ .

Al fine di rendere più immediato l'effetto prodotto dalle *view*, la Figura 5.20 mostra la variazione di peso che gli 8 mercati subiscono utilizzando nella ottimizzazione i rendimenti alla B-L, anziché i rendimenti *market neutral*. L'effetto di variazione conferma pienamente le aspettative del Comitato di Investimento: i tre mercati (Monetario Area euro, Azionario Europa, Azionario Paesi emergenti) sui quali era maturata una *view* positiva vedono accrescere il loro peso ai danni delle *asset class* (Obbligazionario Area euro, Azionario Nord America, Azionario Giappone) sulle quali gravava una opinione negativa. L'effetto di *switch* dei pesi non è pronunciato, riflettendo così la fiducia moderata nei confronti delle opinioni.

Figura 5.20: Le variazioni dei pesi delle asset class ($c=8\%$).



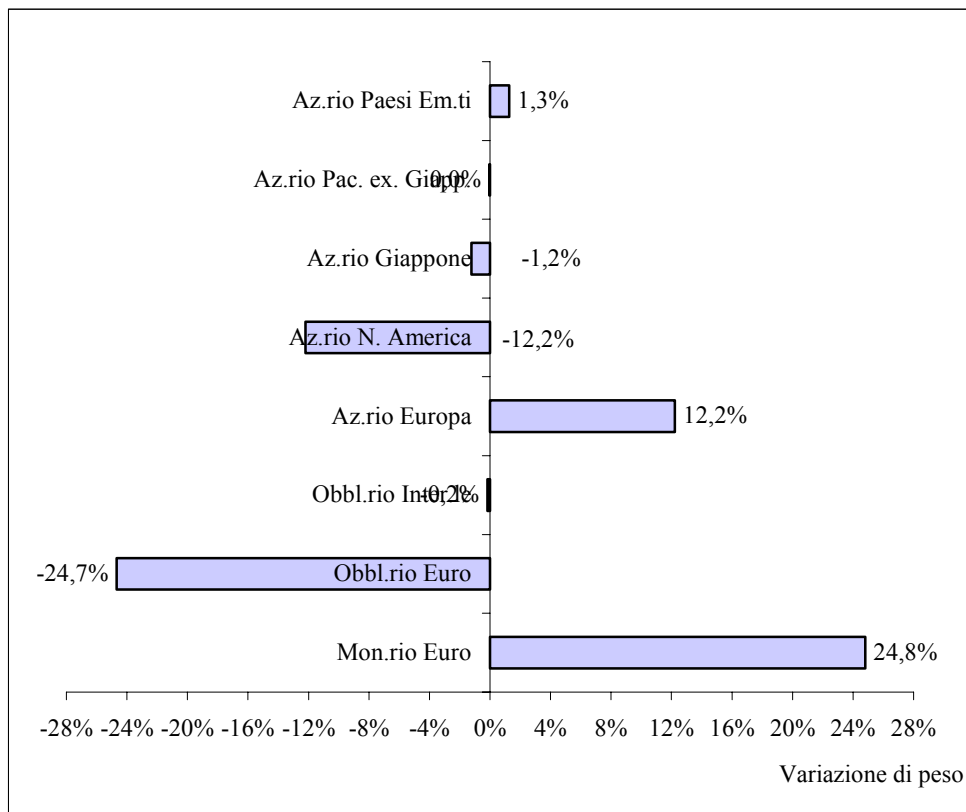
Qualora gli analisti innalzassero la confidenza dal 8% al 17%, i rendimenti B-L:

$$\Pi_{BL} = \begin{bmatrix} 4,15\% \\ 4,42\% \\ 5,52\% \\ 8,02\% \\ 8,11\% \\ 7,99\% \\ 9,51\% \\ 10,24\% \end{bmatrix}$$

si allontanerebbero ulteriormente dalla condizione di equilibrio, favorendo così la costruzione di un portafoglio ottimale maggiormente influenzato dalle opinioni degli analisti (Figura 5.21):

$$W_{BL} = \begin{bmatrix} w_{\text{Mon.rio Area Euro}} \\ w_{\text{Obbl.rio Area Euro}} \\ w_{\text{Obbl.rio Internazionale}} \\ w_{\text{Az.rio Europa}} \\ w_{\text{Az.rio Nord America}} \\ w_{\text{Az.rio Giappone}} \\ w_{\text{Az.rio Pac. ex Giappone}} \\ w_{\text{Az.rio Emerg. Market}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33,21\% \\ 36,93\% \\ 4,33\% \\ 20,18\% \\ 0,01\% \\ 1,07\% \\ 0,93\% \\ 3,34\% \end{bmatrix}$$

Figura 5.21: Le variazioni dei pesi delle asset class ($c=17\%$).



Se le *view* si rivelassero esatte questo portafoglio renderebbe sensibilmente più del portafoglio *market neutral*. Nell'ipotesi estrema (e puramente teorica) di un Comitato d'investimento che, esprimendo una fiducia pari all'99%, si comporta da "chiaroveggente", le opinioni rappresenterebbero l'unica vera fonte informativa in grado di influenzare il risultato finale. I rendimenti alla B-L e la composizione del portafoglio efficiente sarebbero i seguenti:

$$\Pi_{BL} = \begin{bmatrix} 4,17\% \\ 3,19\% \\ 4,19\% \\ 8,10\% \\ 6,13\% \\ 9,67\% \\ 10,85\% \\ 13,16\% \end{bmatrix}$$

$$W_{BL} = \begin{bmatrix} w_{\text{Mon.rio Area Euro}} \\ w_{\text{Obbl.rio Area Euro}} \\ w_{\text{Obbl.rio Internazionale}} \\ w_{\text{Az.rio Europa}} \\ w_{\text{Az.rio Nord America}} \\ w_{\text{Az.rio Giappone}} \\ w_{\text{Az.rio Pac. ex Giappone}} \\ w_{\text{Az.rio Emerg. Market}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73,12\% \\ 0\% \\ 0\% \\ 14,85\% \\ 0\% \\ 1,66\% \\ 0,62\% \\ 9,75\% \end{bmatrix}$$

Come è lecito attendersi, il portafoglio risulta essere concentrato sulle *asset class* privilegiate nelle scommesse del Comitato, palesando così i fenomeni di irragionevolezza e bassa diversificazione che rappresentano la causa principale della scarsa applicazione pratica dell'approccio di Markowitz. Tuttavia, grazie al modello B-L, l'*asset manager* non subisce passivamente questi problemi, ma ha l'opportunità di evitarli non attribuendo eccessiva fiducia alle proprie opinioni. Al tempo stesso, però, non si priva il gestore del diritto, pericoloso ma legittimo, di stravolgere la composizione *market neutral* nel tentativo di apportare un elevato valore aggiunto all'investitore. È tuttavia palese che per quanto c possa teoricamente assumere valori all'interno dell'intervallo $(0; 1)$, estremi esclusi, l'elevata sensibilità della composizione dei portafogli alla Markowitz alla variazione degli *input* fa sì che, al fine di non conseguire composizioni eccessivamente concentrate, si debba attribuire al parametro c valori decisamente inferiori al massimo teorico.

Al lettore attento non sarà sfuggita la somiglianza tra il risultato finale conseguito con questa metodologia e quello ottenibile applicando i vincoli *infra-gruppo*⁵⁵; in entrambi i casi, infatti, l'*asset manager* partendo da una posizione neutrale, se ne discosta (in un caso imponendo gli *upper* e *lower bound* *infra-gruppo*, nell'altro fissando il parametro c) in modo proporzionale alla fiducia riposta nelle stime personali.

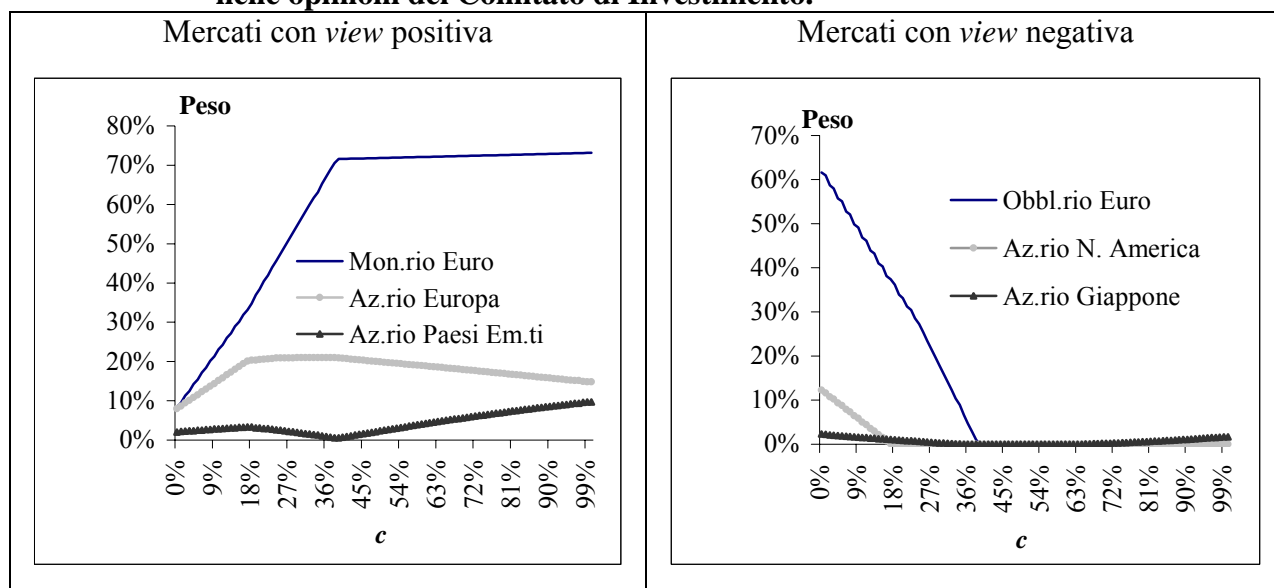
La Figura 5.22 mostra l'impatto che l'aumento di c produce sui pesi dei mercati coinvolti nelle *view*: al crescere della confidenza le soluzioni convergono verso *corner portfolio* che stravolgono totalmente la composizione di equilibrio. La tendenza ad allontanarsi dalla soluzione di partenza sarà tanto maggiore quanto maggiore è l'incoerenza delle *view* rispetto ai rendimenti *market neutral*. Nell'esempio numerico, quando c assume valori intorno al 35% si verifica già una elevatissima concentrazione

⁵⁵ Cfr. il paragrafo 4.2.1.

nei mercati con previsione ottimistica. Allo scopo di prevenire il manifestarsi di composizioni estreme, potrebbe essere utile conoscere anticipatamente:

- in che misura le *view* contrastino con i rendimenti attesi *prior*;
- quali siano le *view* meno coerenti.

Figura 5.22: Evoluzione dei pesi delle asset class al crescere del livello di fiducia nelle opinioni del Comitato di Investimento.



La soluzione a questo problema è proposta da Fusai e Meucci (2003) e Meucci (2005), che ricorrono al concetto di *z-score* di una variabile aleatoria. Lo *z-score* rappresenta la distanza di un valore x “sospetto” di una variabile aleatoria X rispetto al suo valore atteso μ , rapportato alla deviazione standard (σ) di X :

$$(5.82) \quad \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Una specifica realizzazione dello *z-score* viene indicata in questo modo:

$$(5.83) \quad \frac{x - \mu}{\sigma}$$

In un contesto multivariato - dove x e μ diventano vettori colonna e σ viene sostituito dalla matrice delle covarianze C - lo *z-score* diventa la distanza di Mahalanobis:

$$(5.84) \quad m^2 = (x - \mu)^T C^{-1} (x - \mu)$$

Sotto l'ipotesi di normalità, la distanza di Mahalanobis si distribuisce come una chi-

quadro con un numero N di gradi di libertà pari al numero delle variabili aleatorie:

$$(5.85) \quad M^2 = (X - \mu)^T C^{-1} (X - \mu) \sim \chi_N^2$$

Tornando al contesto finanziario, possiamo applicare questo indicatore alla variabile aleatoria X “rendimento atteso”, utilizzando gli *expected return* alla Black-Litterman (Π_{BL}) come variabili “sospette” e quelli di equilibrio (Π) come valori attesi; la dispersione dei rendimenti attesi è rappresentata dalla matrice $\tau\Sigma$:

$$(5.86) \quad m_{view}^2 = (\Pi_{BL} - \Pi)^T (\tau\Sigma)^{-1} (\Pi_{BL} - \Pi)$$

La forma analitica suggerisce che se l'indice m_{view}^2 assume valori ridotti, allora i rendimenti finali non si discostano significativamente dai rendimenti di equilibrio; vi è dunque coerenza tra *view* e rendimenti *market neutral*. Allo scopo di rendere ancora più trasparente il grado di coerenza che sussiste tra le *view* e la condizione iniziale di equilibrio, Fusai e Meucci (2003) ricorrono ad un indice (C_{view}) in grado di misurare quale sia la probabilità che la variabile aleatoria M^2 possa assumere valori superiori rispetto alla realizzazione m_{view}^2 :

$$(5.87) \quad C_{view} = \Pr(M^2 \geq m_{view}^2) = 1 - F_N^{ChiQ}(m_{view}^2)$$

dove: $F_N^{ChiQ}(m_{view}^2)$ identifica la funzione di densità di probabilità cumulata di una chi-quadro con N gradi di libertà.

Al crescere di C_{view} , aumenta la coerenza delle *view* nei confronti dei rendimenti attesi di equilibrio. Come caso estremo, quando Π_{BL} e Π coincidono, la realizzazione m_{view}^2 della distanza di Mahalanobis si azzerà e l'indicatore assume il suo valore massimo, rappresentativo della perfetta coerenza tra rendimenti di equilibrio e opinioni:

$$(5.88) \quad C_{view} = \Pr(M^2 \geq 0) = 1 - F_N^{ChiQ}(0) = 100\%$$

C_{view} è dunque un indicatore utile allo scopo di sintetizzare in un valore numerico - compreso tra zero e uno - la capacità delle *view* di influenzare i risultati della stima mista. Meucci (2005) suggerisce di fissare una soglia minima dell'indicatore⁵⁶, sotto la quale il gestore dovrebbe modificare le *view* allo scopo di reintegrare un livello accettabile di coerenza. Piuttosto che modificare uniformemente o casualmente le

⁵⁶ Meucci (2005) non spiega in che modo definire il *threshold*; l'utilizzatore dovrà affidarsi alla sua esperienza.

opinioni, Fusai e Meucci (2003) suggeriscono di ricorrere alla stima della sensibilità dell'indice C_{view} al variare delle *view*:

$$(5.89) \quad S = \frac{\partial C_{view}}{\partial view} = -2f_N^{ChiQ}(m_{view}^2) \cdot [P \cdot (\tau\Sigma) \cdot P^T]^{-1} \cdot P \cdot (\Pi_{BL} - \Pi)$$

dove: $f_N^{ChiQ}(m_{view}^2)$ identifica la funzione di densità di probabilità di una chi-quadro con N gradi di libertà.

Il risultato S di questa produttoria è un vettore colonna con un numero di righe pari al numero di *view* espresse: l'opinione che si discosta maggiormente dai rendimenti di equilibrio (la cui variazione produce quindi un impatto più elevato sul valore dell'indice C_{view}) è quella che corrisponde al valore assoluto più elevato del vettore S . Allo scopo di ridurre l'incoerenza il gestore dovrà agire su questa *view* nel modo seguente:

- se il valore di S è positivo, la *view* dovrà essere incrementata;
- se il valore di S è negativo, la *view* dovrà essere ridotta.

Proponiamo una'applicazione pratica di questa procedura. Riprendendo l'ultimo esempio numerico nel quale gli analisti utilizzavano una confidenza del 99%, la distanza di Mahalanobis è:

$$m_{view}^2 = \left(\begin{bmatrix} 4,17\% \\ 3,19\% \\ 4,19\% \\ 8,10\% \\ 6,13\% \\ 9,67\% \\ 10,85\% \\ 13,16\% \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4,129\% \\ 4,661\% \\ 5,766\% \\ 7,969\% \\ 8,477\% \\ 7,656\% \\ 9,104\% \\ 9,442\% \end{bmatrix} \right)^T (\tau\Sigma)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 4,17\% \\ 3,19\% \\ 4,19\% \\ 8,10\% \\ 6,13\% \\ 9,67\% \\ 10,85\% \\ 13,16\% \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4,129\% \\ 4,661\% \\ 5,766\% \\ 7,969\% \\ 8,477\% \\ 7,656\% \\ 9,104\% \\ 9,442\% \end{bmatrix} \right) = 2,988$$

Calcoliamo il coefficiente C_{view} :

$$C_{view} = \Pr(M^2 \geq 2,936) = 1 - F_N^{ChiQ}(2,936) = 93,51\%$$

Se ipotizziamo che la soglia minima sia stata fissata in corrispondenza di un valore pari al 97,5%, subentra la necessità di ridurre la distanza di Mahalanobis tra i rendimenti attesi. Allo scopo di definire quale delle *view* modificare, stimiamo il vettore S , capace di misurare la sensibilità di C_{view} al variare delle opinioni:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\partial C_{view}}{\partial view} = -2f_N^{ChiQ} \left(m_{view}^2 \right) \cdot \left[P \cdot (\tau \Sigma) \cdot P^T \right]^{-1} \cdot P \cdot (\Pi_{BL} - \Pi) \\
&= -2f_N^{ChiQ} (2,936) \cdot \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}^T \cdot \tau \Sigma \cdot \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 4,17\% \\ 3,19\% \\ 4,19\% \\ 8,10\% \\ 6,13\% \\ 9,67\% \\ 10,85\% \\ 13,16\% \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4,129\% \\ 4,661\% \\ 5,766\% \\ 7,969\% \\ 8,477\% \\ 7,656\% \\ 9,104\% \\ 9,442\% \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -13,35 \\ -6,57 \\ -0,21 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

L'opinione da muovere è la prima (*il Mercato Monetario Euro renderà l'1% in più del Mercato Obbligazionario Euro*), poiché questa è caratterizzata dalla più ampia capacità di influenzare il valore C_{view} . L'importo dell'1% deve essere ridotto, perché il corrispondente importo nel vettore S è negativo (-13,35). Se la *view* passasse dall'1% allo 0,5%, la distanza di Mahalonabis scenderebbe a 2,097 e, conseguentemente, l'indicatore C_{view} salirebbe al 97,79%, collocandosi al di sopra della soglia minima accettabile.

Questa procedura di controllo della coerenza può rappresentare un prezioso strumento per il Comitato di Investimento. Tuttavia, va rimarcato che il livello di coerenza che interessa al gestore non è tanto quello tra rendimenti di equilibrio e *view*, ma piuttosto quello tra composizione del portafoglio di equilibrio e portafoglio finale alla Black-Litterman. Di conseguenza l'*asset manager* che fa uso di questo strumento di controllo e rispetta la soglia minima C_{view} , non è immune dal rischio che, a causa dell'instabilità dei portafogli alla variazione degli input⁵⁷, il portafoglio ottimale risulti eccessivamente concentrato.

A conclusione del paragrafo, proponiamo un ultimo esempio numerico che ha il compito di confermare la capacità del modello di replicare i comportamenti degli *asset manager* all'interno di un *framework* quantitativo. Ipotizziamo che il Comitato di

⁵⁷ Cfr. il paragrafo 3.4.

Investimento abbia maturato delle aspettative differenti⁵⁸:

- fenomeno del *flight-to-quality* e conseguente riduzione dei tassi di interesse nell'Area Euro;
- ipotesi di *bear market* con generalizzato ribasso dei mercati azionari.

Queste posizioni sottendono, rispetto al portafoglio di equilibrio, una riduzione della componente azionaria ed un incremento della *duration* nel comparto *fixed income* dell'Area UME.

Le *view* espresse sono le seguenti:

1. *Il Mercato Obbligazionario Euro sovraperformerà il Mercato Monetario Euro del 2%;*
2. *Il Mercato Obbligazionario Euro sovraperformerà il Mercato Azionario Globale del 5%.*

Pur a fronte di una combinazione di opinioni piuttosto complessa (la seconda *view* coinvolge congiuntamente un mercato obbligazionario e 5 mercati azionari), l'implementazione del modello di Black-Litterman non presenta particolari difficoltà. La scelta del livello di confidenza da affiancare alle *view* può essere organizzata in modo tale che il valore attribuito allo scalare c sia proporzionale al livello di consenso che le previsioni raccolgono tra gli esponenti del Comitato di Investimento; ad esempio, una posizione unanime a favore di una *view* dovrebbe presagire l'attribuzione di un livello di fiducia elevato. Il valore di c può essere legato anche alla capacità del Comitato di Investimenti di produrre delle opinioni esatte; il grado di fiducia sarebbe così destinato a salire o a scendere nel tempo a seconda della *performance* prodotta dai gestori. Nell'esempio, ipotizziamo che i livelli di fiducia delle due opinioni siano differenziati:

- $c_1 = 6\%$;
- $c_2 = 9\%$.

La stima della seconda riga della matrice P , che identifica le *asset class* coinvolte nelle *view*, si presenta complessa in virtù delle numerosità dei mercati coinvolti. Nello specifico, occorre identificare con esattezza i pesi negativi da attribuire ai 5 mercati azionari. Poiché la *view* non discrimina tra i singoli mercati *equity*, limitandosi a evidenziare una generalizzata discesa dei corsi azionari, il peso negativo attribuito nella

⁵⁸ La *prior distribution* resta invece immutata.

opinione ai singoli mercati azionari deve essere proporzionale al loro peso all'interno del portafoglio di equilibrio:

$$\text{Peso Az.rio Europa} = -\frac{7,96\%}{\sum \% \text{ Az.rio in portafoglio}} = -31,20\%$$

$$\text{Peso Az.rio Nord America} = -\frac{12,21\%}{\sum \% \text{ Az.rio in portafoglio}} = -47,90\%$$

$$\text{Peso Az.rio Giappone} = -\frac{2,30\%}{\sum \% \text{ Az.rio in portafoglio}} = -9,00\%$$

$$\text{Peso Az.rio Pacifico ex Giappone} = -\frac{0,97\%}{\sum \% \text{ Az.rio in portafoglio}} = -3,80\%$$

$$\text{Peso Az.rio Emerging Market} = -\frac{2,07\%}{\sum \% \text{ Az.rio in portafoglio}} = -8,10\%$$

Procediamo alla stima delle matrici P, Q e Ω .

$$P = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -0,312 & -0,479 & -0,09 & -0,038 & -0,081 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2\% \\ 5\% \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{c_1} - 1\right) \cdot p_1 \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_1^T & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{c_2} - 1\right) \cdot p_2 \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_2^T \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,002217 & 0 \\ 0 & 0,024632 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Disponendo degli input necessari, stimiamo i rendimenti attesi alla Black-Litterman:

$$\Pi_{BL} = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P \right]^{-1} \times \left[(\tau \Sigma)^{-1} \cdot \Pi + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot Q \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 4,12\% \\ 4,78\% \\ 5,68\% \\ 7,33\% \\ 7,80\% \\ 6,73\% \\ 8,43\% \\ 8,27\% \end{bmatrix}$$

Utilizzando questo vettore come input di una ottimizzazione media-varianza di questo tipo:

$$\begin{aligned} & \underset{w_{BL}}{\text{Max}} (W_{BL}^T \cdot \Pi_{BL}) \\ & \text{vincoli:} \\ (5.90) \quad & \sum_{i=1}^8 w_i = 1 \\ & w_i \geq 0 \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \dots, 8. \\ & \lambda = \frac{W_{BL}^T \cdot \Pi_{BL} - r_f}{W_{BL}^T \cdot \Sigma \cdot W_{BL}} = 3,863 \end{aligned}$$

otteniamo il portafoglio ottimale:

$$W_{BL} = \begin{bmatrix} w_{\text{Mon.rio Area Euro}} \\ w_{\text{Obbl.rio Area Euro}} \\ w_{\text{Obbl.rio Internazionale}} \\ w_{\text{Az.rio Europa}} \\ w_{\text{Az.rio Nord America}} \\ w_{\text{Az.rio Giappone}} \\ w_{\text{Az.rio Pac. ex Giappone}} \\ w_{\text{Az.rio Emerg. Market}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,07\% \\ 74,26\% \\ 4,50\% \\ 6,52\% \\ 10,21\% \\ 1,91\% \\ 0,81\% \\ 1,72\% \end{bmatrix}$$

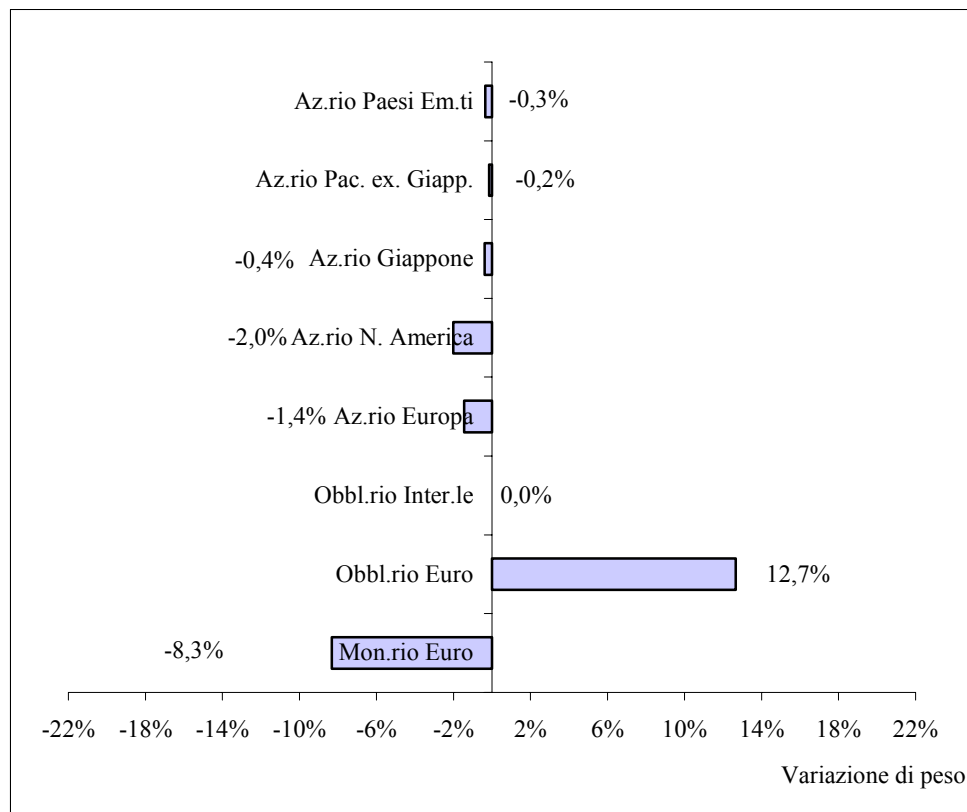
Anche in questo caso il risultato finale è coerente con le opinioni espresse dal Comitato di Investimento (Figura 5.23):

- la componente Monetario Area Euro si è ridotta (dall'8,4% allo 0,07%) a favore dell'Obbligazionario Area Euro (che passa dal 61,6% al 74,26%);
- la componente azionaria subisce una generalizzata riduzione, passando dal 25,5% al 21,17%; in assenza di opinioni sui singoli mercati, il peso percentuale dei cinque

asset azionari all'interno della componente *equity* non subisce variazioni, rimanendo *market neutral*;

- l'Obbligazionario Internazionale, ignorato nelle *view*, mantiene il suo peso neutrale.

Figura 5.23: Le variazioni dei pesi delle asset class in presenza di una view complessa.



Il Modello B-L giunge ad una composizione di portafoglio che è una replica fedele di quella che il Comitato di Investimento - in assenza di un modello matematico - avrebbe prodotto modificando manualmente i pesi del portafoglio neutrale di partenza. L'approccio descritto si dimostra quindi capace di replicare matematicamente l'operatività dei gestori, fugando i rischi di instabilità e di natura *unreasonable* dei portafogli e al tempo stesso assicurando i vantaggi (e la tranquillità) propri di un modello ben codificato e rigoroso da un punto di vista metodologico.

5.5 Combinare modelli euristici e bayesiani

Nel corso del presente lavoro, modelli euristici e modelli bayesiani sono stati introdotti come soluzioni utili al fine di alleviare i problemi che limitano l'utilizzo pratico della ottimizzazione media-varianza. Pur non mancando i lavori che le mettono in diretta competizione,⁵⁹ sarebbe un errore interpretare queste metodologie alla stregua di soluzioni alternative. A conferma di ciò, proponiamo un esempio di utilizzo combinato del *resampling*TM e del modello di Black-Litterman. La simulazione che segue rappresenta solo uno dei possibili accostamenti tra modelli bayesiani ed euristici.

L'applicazione del modello Black-Litterman restituisce come risultato finale la distribuzione normale dei rendimenti attesi:

$$\begin{aligned} \mu &\sim N(\Pi_{BL}; \Sigma_{BL}) \\ \text{dove:} \\ (5.91) \quad \Pi_{BL} &= \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P \right]^{-1} \times \left[(\tau \Sigma)^{-1} \cdot \Pi + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot Q \right] \\ \Sigma_{BL} &= \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P \right]^{-1} \end{aligned}$$

Piuttosto che “lanciare” una ottimizzazione media-varianza sulla base dei parametri Π_{BL} e Σ (matrice delle covarianze dei rendimenti), è possibile utilizzare il *resampling*TM al fine di identificare il portafoglio ricampionato caratterizzato da un livello di avversione al rischio coerente con quello utilizzato per la stima dei rendimenti *market neutral*. Procediamo con l'esempio numerico.

Utilizzando i dati numerici del paragrafo 5.4.2, ipotizziamo che il gestore di un fondo bilanciato, nel tentativo di soddisfare le esigenze di un investitore-tipo con parametro di avversione al rischio λ pari a 3,863, costruisce un portafoglio combinando gli 8 mercati della Tabella 5.6.

L'ipotesi sottostante è la distribuzione normale multivariata dei rendimenti delle *asset class*:

$$(5.92) \quad r \sim N(\mu, \Sigma)$$

Per la stima dei rendimenti attesi, piuttosto che ricorrere alla *classical rule*, ci si affida al modello B-L. La composizione del portafoglio *market neutral* (W_{MN}) è la seguente:

⁵⁹ Tra questi, si cita il lavoro di Markowitz e Usmen (2003), dove gli autori elaborano una serie di test nei quali la *resampled efficiency* si rivela superiore alla logica bayesiana.

$$W_{MN} = \begin{bmatrix} w_{\text{Mon.rio Area Euro}} \\ w_{\text{Obbl.rio Area Euro}} \\ w_{\text{Obbl.rio Internazionale}} \\ w_{\text{Az.rio Europa}} \\ w_{\text{Az.rio Nord America}} \\ w_{\text{Az.rio Giappone}} \\ w_{\text{Az.rio Pac. ex Giappone}} \\ w_{\text{Az.rio Emerg. Market}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,40\% \\ 61,60\% \\ 4,50\% \\ 7,96\% \\ 12,21\% \\ 2,30\% \\ 0,97\% \\ 2,07\% \end{bmatrix}$$

La matrice delle covarianze (Σ) dei rendimenti è quella riportata nella Tabella 5.7. Noti Π_{MN} , Σ e λ , ed ipotizzando ancora un tasso *risk-free* del 4%, possiamo procedere al calcolo dei rendimenti di equilibrio:

$$\Pi = r_f \cdot I + (\lambda \Sigma) \cdot W_{MN} = \begin{bmatrix} E(R)_{\text{Mon.rio Area Euro}} \\ E(R)_{\text{Obbl.rio Area Euro}} \\ E(R)_{\text{Obbl.rio Internazionale}} \\ E(R)_{\text{Az.rio Europa}} \\ E(R)_{\text{Az.rio Nord America}} \\ E(R)_{\text{Az.rio Giappone}} \\ E(R)_{\text{Az.rio Pac. ex Giappone}} \\ E(R)_{\text{Az.rio Emerg. Market}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,129\% \\ 4,661\% \\ 5,766\% \\ 7,969\% \\ 8,477\% \\ 7,656\% \\ 9,104\% \\ 9,442\% \end{bmatrix}$$

Attribuito a τ un valore pari a 0,0526, è possibile identificare la distribuzione *prior*:

$$\mu \sim N(\Pi; \tau \Sigma) = N \left(\begin{bmatrix} 4,129\% \\ 4,661\% \\ 5,766\% \\ 7,969\% \\ 8,477\% \\ 7,656\% \\ 9,104\% \\ 9,442\% \end{bmatrix}; 0,0526 \cdot \begin{bmatrix} 0,0009 & 0,0004 & 0,0007 & -0,0007 & 0,0002 & -0,002 & 0,0007 & 0,0013 \\ 0,0004 & 0,0027 & 0,0024 & -0,0001 & 0,0006 & -0,004 & 0,0019 & -0,0029 \\ 0,0007 & 0,0024 & 0,0069 & 0,0090 & 0,0114 & 0,0084 & 0,0140 & 0,0137 \\ -0,0007 & -0,0001 & 0,0090 & 0,0395 & 0,0382 & 0,0377 & 0,0379 & 0,0471 \\ 0,0002 & 0,0006 & 0,0114 & 0,0382 & 0,0461 & 0,0348 & 0,0304 & 0,0439 \\ -0,002 & -0,004 & 0,0084 & 0,0377 & 0,0348 & 0,0944 & 0,0698 & 0,0914 \\ 0,0007 & 0,0019 & 0,0140 & 0,0379 & 0,0304 & 0,0698 & 0,0946 & 0,1029 \\ 0,0013 & -0,0029 & 0,0137 & 0,0471 & 0,0439 & 0,0914 & 0,1029 & 0,1421 \end{bmatrix} \right)$$

Si passa adesso alla definizione delle *view*:

1. Il Mercato Monetario Euro renderà l'1% in più del Mercato Obbligazionario Euro;
2. Il Mercato Azionario Europa renderà il 2% in più del Mercato Azionario Nord America;
3. Il Mercato Azionario Emerging Market renderà il 3,5% in più del Mercato Azionario Giappone.

Le matrici P e Q sono:

$$P = \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1\% \\ 2\% \\ 3,5\% \end{bmatrix}$$

Ipotizziamo che il Comitato di Investimento attribuisca alle 3 *view* una fiducia c pari al 8%, la matrice Ω rappresentativa della fiducia delle opinioni è la seguente:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{c_1} - 1\right) \cdot p_1 \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_1^T & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{c_2} - 1\right) \cdot p_2 \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_2^T & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{c_3} - 1\right) \cdot p_3 \cdot (\tau \Sigma) \cdot p_3^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,00163 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00549 & 0 \\ 0 & 0 & 0,03255 \end{bmatrix}$$

A questo punto disponiamo di tutti gli ingredienti necessari per stimare i rendimenti attesi e la matrice delle covarianze alla Black-Litterman:

$$\Pi_{BL} = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot P \right]^{-1} \times \left[(\tau \Sigma)^{-1} \cdot \Pi + P^T \cdot \Omega^{-1} \cdot Q \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 4,14\% \\ 4,55\% \\ 5,65\% \\ 7,99\% \\ 8,31\% \\ 7,81\% \\ 9,30\% \\ 9,83\% \end{bmatrix}$$

Processando una ottimizzazione media-varianza di questo tipo:

$$\begin{aligned}
& \underset{W_{BL}}{Max} (W_{BL}^T \cdot \Pi_{BL}) \\
& \text{vincoli :} \\
(5.93) \quad & \sum_{i=1}^8 w_i = 1 \\
& w_i \geq 0 \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \dots, 8. \\
& \lambda = \frac{W_{BL}^T \cdot \Pi_{BL} - r_f}{W_{BL}^T \cdot \Sigma \cdot W_{BL}} = 3,863
\end{aligned}$$

Il gestore otterrebbe il seguente risultato:

$$W_{BL} = \begin{bmatrix} w_{\text{Mon.rio Area Euro}} \\ w_{\text{Obbl.rio Area Euro}} \\ w_{\text{Obbl.rio Internazionale}} \\ w_{\text{Az.rio Europa}} \\ w_{\text{Az.rio Nord America}} \\ w_{\text{Az.rio Giappone}} \\ w_{\text{Az.rio Pac. ex Giappone}} \\ w_{\text{Az.rio Emerg. Market}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,18\% \\ 49,82\% \\ 4,50\% \\ 13,69\% \\ 6,48\% \\ 1,67\% \\ 0,97\% \\ 2,69\% \end{bmatrix}$$

Tuttavia, egli decide di sfruttare le proprietà del *resampling*TM. A tale scopo vengono sviluppate le fasi seguenti:

1. Sulla base delle variabili di *input* Π_{BL} e Σ , si simula - mediante l'utilizzo della tecnica Monte Carlo - una serie di T rendimenti per ciascuna *asset class* (ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti).
2. Date le serie simulate, si provvede al calcolo di un nuovo set di *input* (Π_{sim} e Σ_{sim}).
3. Gli input così ottenuti vengono utilizzati al fine di “lanciare” una ottimizzazione alla Markowitz che restituisce un nuovo insieme di 1.000 portafogli efficienti.
4. Sulla base della composizione di questi portafogli e degli input originari (Π_{BL} e Σ) si costruisce una frontiera che identifica le combinazioni “rischio-rendimento” che i portafogli conseguiti utilizzando i dati simulati avrebbero conseguito in presenza del set di *input* originario.
5. La procedura viene ripetuta per H volte (nell'esempio numerico 500 volte), in modo da ottenere altrettante frontiere simulate.
6. I portafogli che compongono ciascuna frontiera simulata vengono ordinati in base al loro rendimento atteso. La composizione media dei *k.esimi* portafogli delle H

- frontiere, identifica la composizione del *k.esimo* punto della frontiera ricampionata.
7. Replicando la fase 6 per tutti i punti componenti le frontiere, si ottiene la composizione di tutti i portafogli della frontiera ricampionata.
 8. Sulla base degli input originari e della composizione dei portafogli ricampionati, è possibile determinare le combinazioni $[\sigma, E(R)]$ dei portafogli componenti quest'ultima.
 9. L'iter si chiude con l'identificazione del portafoglio che ha un coefficiente di avversione al rischio il più possibile vicino a quello dell'investitore-tipo $(\lambda=3,863)^{60}$.

Allo scopo di procedere alla stima del portafoglio, occorre tuttavia definire la dimensione del parametro T identificativo della lunghezza delle serie di rendimenti simulate nella tecnica Monte Carlo. Come noto, questo indicatore dipende dal grado di fiducia che noi riponiamo nelle stime. Coerentemente con il processo utilizzato per la stima delle matrici delle covarianze dei rendimenti attesi riconducibili alla informazione *prior* ($\tau\Sigma$) ed alle *view* (Ω), tale parametro deve assumere una dimensione pari a:

$$(5.94) \quad T = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0,0526} = 19$$

In tal modo, infatti, le serie di rendimenti simulate di ampiezza 19 esprimono la medesima incertezza implicita delle matrici delle covarianze $\tau\Sigma$ e Ω . La Tabella 5.9 offre un confronto tra la composizione dei portafogli ottenuti:

1. con la logica *market neutral*
2. applicando il modello di Black-Litterman e l'ottimizzazione di Markowitz;
3. applicando il modello B-L e la procedura del ricampionamento.

Tabella 5.9: Un confronto tra portafogli conseguiti applicando diverse metodologie

⁶⁰ La procedura seguita impedisce di ottenere un portafoglio il cui parametro di avversione al rischio sia pari a quello desiderato. Tuttavia, la costruzione di una frontiera ricampionata composta da ben 1.000 portafogli permette di identificare una soluzione con grado di avversione al rischio molto prossima a quella desiderata.

	Market Neutral	B-L + Ottimizzazione Classica	B-L + ResamplingTM
Mon.rio Euro	8,400%	20,184%	44,856%
Obbl.rio Euro	61,600%	49,816%	30,840%
Obbl.rio Inter.le	4,500%	4,500%	5,657%
Az.rio Europa	7,956%	13,690%	5,857%
Az.rio N. America	12,215%	6,481%	4,154%
Az.rio Giappone	2,295%	1,673%	3,902%
Az.rio Pac. ex. Giapp.	0,969%	0,969%	1,913%
Az.rio Paesi Em.ti	2,066%	2,687%	2,821%

La combinazione tra la logica bayesiana ed il modello euristico porta alla identificazione di una soluzione la cui composizione è senza dubbio ragionevole. Tuttavia, il confronto tra la strategia di equilibrio e le restanti due soluzioni rivela che solo l'applicazione dell'ottimizzazione classica di Markowitz permette di giungere ad un portafoglio perfettamente in linea con le opinioni dei gestori. Infatti, la soluzione che incorpora l'uso del ricampionamento porta ad alcuni risultati che il Comitato di Investimento potrebbe rifiutare perché poco coerenti con le opinioni:

- l'Azionario Giappone cresce più di quanto faccia l'Azionario Paesi Emergenti;
- l'Azionario Europa vede ridurre il suo peso in portafoglio;
- i mercati non contemplati nelle *view* (Obbligazionario Internazionale e Azionario Pacifico ex Giappone) crescono in modo sensibile.

Il rischio che si cela dietro questa combinazione euristico-bayesiana è quello di produrre un fenomeno di “ipercorrettismo”: il *resampling*, infatti, può produrre un eccessivo arricchimento (*over-diversification*) dei portafogli, ottenuto ai danni della coerenza con le *view*. La probabile conseguenza è quella di giungere ad un portafoglio che “offuschi” il ruolo delle opinioni. Per questa ragione chi scrive ritiene che un uso corretto del modello di Black-Litterman e la conseguente definizione di livelli di fiducia delle *view* prudenti possano garantire la costruzione di portafogli fedeli al *modus operandi* dei gestori, senza la necessità di ricorrere al *resamplingTM*.