Compito di Calcolo delle Probabilità

Docente: Luigi Accardi

17–2–2014

Tempo concesso per lo svolgimento: 90 Minuti.
Gli esami orali dell'Esame "Calcolo delle probabilità" cominceranno Lunedì 17–2–2014 alle ore 15,30 in Aula P9 .

Problema 1 Consideriamo una opzione definita dai parametri:

$$S_0 = 300 \quad \text{KE}$$

$$S_1^+ = 2000 \quad \text{KE}$$

$$S_1^- = 250 \quad \text{KE}$$

$$K = 1200 \quad \text{KE}$$

Definiamo la classe dei contratti equi in rischio percentuale con capitali investiti C_A, C_B mediante l'identitá:

$$\frac{\rho_A}{C_A} = \frac{\rho_B}{C_B} \tag{1}$$

dove, come al solito, ρ_A e ρ_B denotano gli indici di rischio percentuale di A e di B dopo il contratto.
Problema (1a)
Determinare se esiste un contratto assicurativo a franchigia nulla e equo in rischio percentuale con capitali investiti

$$C_A = 4C_B \tag{2}$$

per il rischio associato al portafoglio $S \equiv \{S_0, S_1^+, S_1^-\}$.
Problema (1b)
Se la riposta al Problema (1a) é affermativa, determinare se esiste un intervallo di probabilitá in cui il contratto che risolve il Problema (1a) é anche ragionevole in media.
Commentare il significato economico della soluzione.

Per la sufficienza é sufficiente risolvere bene il Problema (1a). Per avere un voto alto é necessario almeno impostare bene anche il Problema (1b).

Soluzione Si ha

$$G_+ := S_1^+ - S_0 = 2000 - 300 = 1700$$

$$G_- := S_0 - S_1^- = 300 - 250 = 50$$

Quindi lo schema di rischio associato al portafoglio $S \equiv \{S_0, S_1^+, S_1^-, p\}$ è

$$\{S_1^+ - S_0, S_0 - S_1^-, p\} = \{1700, 50, p\} \tag{3}$$

Equo in rischio percentuale
Per definizione il contratto (f_a, p_a) è ERP con capitali investiti C_A, C_B se

$$\frac{\rho_A}{C_A} = \frac{\rho_B}{C_B} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{f_a G_- + p_a G_+}{C_A(1-p_a)G_+} = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-(1-(f_a + p_a G_+/G_-))}{C_B p_a G_+} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho \frac{f_a + p_a G_+/G_-}{(1-p_a)C_A} = \rho \frac{1-(f_a + p_a G_+/G_-)}{p_a C_B} \Leftrightarrow \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_a + p_a G_+/G_-}{(1-p_a)C_A} = \frac{1-(f_a + p_a G_+/G_-)}{p_a C_B} \Leftrightarrow$$

Per l'ipotesi (2) si ha:

$$\frac{\rho_A}{C_A} = \frac{\rho_B}{C_B} \Leftrightarrow \frac{f_a + p_a G_+/G_-}{(1-p_a)C_A} = \frac{1-(f_a + p_a G_+/G_-)}{p_a C_A/4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_a + p_a G_+/G_-}{(1-p_a)} = \frac{1-(f_a + p_a G_+/G_-)}{p_a/4} = \frac{4 - 4f_a - 4p_a G_+/G_-}{p_a} \Leftrightarrow$$

D'altra parte

$$G_+/G_- = 1700/50 = 34 \tag{5}$$

Quindi

$$\frac{\rho_A}{C_A} = \frac{\rho_B}{C_B} \Leftrightarrow \frac{f_a + 34p_a}{(1-p_a)} = \frac{4 - 4f_a - 136p_a}{p_a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_a f_a + 34p_a^2 = 4 - 4f_a - 136p_a - 4p_a + 4p_a f_a + 136p_a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = 4 - 4f_a - 140p_a + 3p_a f_a + 102p_a^2$$

L'ipotesi di franchigia nulla implica che

$$\frac{\rho_A}{C_A} = \frac{\rho_B}{C_B} \Leftrightarrow 0 = 4 - 140p_a + 102p_a^2 \Leftrightarrow 0 = 2 - 70p_a + 51p_a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\sqrt{51}p_a - \frac{35}{\sqrt{51}})^2 - \frac{1225}{51} + 2 \Leftrightarrow \frac{1225}{51} - 2 = \frac{1123}{51} = (\sqrt{51}p_a - \frac{35}{\sqrt{51}})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pm\frac{\sqrt{1123}}{\sqrt{51}} = \sqrt{51}p_a - \frac{35}{\sqrt{51}} \Leftrightarrow \pm\sqrt{1123} = 51p_a - 35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 35 \pm 33,5 = \begin{cases} 35 + 33,5 = 68,5 = 51p_a \\ 35 - 33,5 = 1,5 = 51p_a \end{cases} \Leftrightarrow$$

La prima soluzione non é ammissibile poiché implica

$$p_a \sim \frac{68,5}{51} > 1$$

La seconda soluzione implica

$$p_a = \frac{1,5}{51} = \frac{1}{34} \sim 0,029$$

Quindi il contratto equo in rischio percentuale e a franchigia nulla é univocamente determinato da:

$$(0, p_a) \sim (0\ ,\ 0,029) \tag{6}$$

Resta da verificare la condizione di ammissibilità cioé

$$f_a + p_a G_+/G_- < 1$$

che, per i contratti a franchigia nulla, si riduce a

$$p_a G_+/G_- = 34p_a < 1 \Leftrightarrow p_a < \frac{1}{34} \sim 0,0294$$

che contraddice la condizione (6) secondo la quale

$$p_a < \frac{1}{34}$$

Conclusione: l'unico contratto con le proprietá richieste dal problema non soddisfa la condizione di ammissibilità economica, quindi il problema non ammette soluzione.

Come esercizio discutiamo anche il caso di ragionevolezza in media anche se questo non é essenziale ai fini del compito.

Ragionevolezza in media.

Sappiamo che una condizione necessaria per l'esistenza di un contratto ragionevole in media associato al rischio (3) è che risulti

$$\rho = (\frac{1}{p} - 1)G_-/G_+ < 1$$

Nel nostro caso la (5) implica che $G_+/G_- = 34$. Quindi la condizione necessaria $\rho < 1$ diventa:

$$\rho = (\frac{1}{p} - 1)\frac{1}{34} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{p} - 1 < 34 \Leftrightarrow \frac{1}{p} < 1 + 34 = 35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p > \frac{1}{35} \Leftrightarrow p \in (0,028\ ,\ 1) \tag{7}$$

Se tale condizione è soddisfatta, le soluzioni del problema vanno cercate tra i contratti ragionevoli in media, che sono caratterizzati dalla condizione:

$$(1 - (f_a + p_a G_+/G_-))\rho \le p_a \le 1 - (f_a + p_a G_+/G_-)\rho \tag{8}$$

La condizione di franchigia nulla e la (5) riducono la (8) a

$$(1 - 34p_a)\rho \le p_a \le 1 - 34p_a\rho$$

La prima delle disuguaglianze (8) equivale a

$$\rho - 34p_a\rho \le p_a \Leftrightarrow \rho \le p_a(1 + 34\rho) \Leftrightarrow \frac{\rho}{1 + 34\rho} \le p_a$$

La seconda delle disuguaglianze (8) equivale a

$$p_a \le 1 - p_a G_+/G_-\rho \Leftrightarrow p_a(1 + 34\rho) \le 1 \Leftrightarrow p_a \le \frac{1}{1 + 34\rho}$$

La condizione di compatibilità tra le disuguaglianze é identicamente soddisfatta poiché equivale a:

$$\frac{\rho}{1 + 34\rho} \le \frac{1}{1 + 34\rho} \Leftrightarrow \rho < 1$$

Quindi i contratti ragionevoli in media con franchigia nulla sono caratterizzati dalla condizione

$$p_a \in (\frac{\rho}{1 + 34\rho}, \frac{1}{1 + 34\rho}) \tag{9}$$

Occorre quindi verificare che il contratto (6) soddisfa la (9), cioé che

$$0,029 \in (\frac{\rho}{1+34\rho}, \frac{1}{1+34\rho}) \tag{10}$$

Si ha

$$\frac{\rho}{1+34\rho} < 0,029 \Leftrightarrow \rho < 0,029+(0,029)34\rho \Leftrightarrow \rho < 0,029+(0,029)34\rho = 0,029+9,86\rho$$

$$\Leftrightarrow (1-9,86)\rho = -8,86\rho < 0,029$$

Inoltre

$$0,029 < \frac{1}{1+34\rho} \Leftrightarrow 0,029+(0,029)34\rho = 0,029+9,86\rho < 1 \Leftrightarrow 9,86\rho < 1-0,029 = 0,971$$

$$\Leftrightarrow 9,86\rho = 9,86(\frac{1}{p}-1)\frac{1}{34} = 9,86(\frac{1}{p}-1)0,029 = 0,28(\frac{1}{p}-1) < 0,971 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p}-1 < 3,467 \Leftrightarrow \frac{1}{p} < 4,467 \Leftrightarrow p > \frac{1}{4,467} \sim 0,223$$

Poiché $0,223 > 0,028$ dalla (7) segue che, un contratto con le proprietá richieste esiste se e solo se

$$p \in (0,223\ ,\ 1) \tag{11}$$