Compito di Calcolo delle Probabilità

Docente: Luigi Accardi

12–6–2014

Tempo concesso per lo svolgimento: 90 Minuti.
Per la sufficienza basta rispondere alla prima domanda.
Gli esami orali dell'Esame "Calcolo delle probabilità" cominceranno Martedì 12–6–2014 alle ore 15,00 in Aula P1.

Problema 1 *Consideriamo una opzione definita dai parametri:*

$$S_0 = 700 \qquad KE$$

$$S_1^+ = 2.500 \qquad KE$$

$$S_1^- = 100 \qquad KE$$

$$K = 1.000 \qquad KE$$

Determinare l'intervallo di probabilità di crescita del portafoglio $S \equiv \{S_0, S_1^+, S_1^-\}$ *e l'intervallo di franchigia per cui il guadagno atteso sia di* A *che di* B*, in un contratto assicurativo equo in rischio per il rischio a parità di capitale investito associato al suddetto portafoglio, risulti strettamente maggiore del guadagno atteso ottenuto con la prescrizione di Black e Scholes. Nei casi in cui l'insieme di tali probabilità non é vuoto, paragonare i prezzi del contratto assicurativo con il prezzo definito dalla prescrizione di Black e Scholes.*

Soluzione

Il rischio associato al portafoglio iniziale é

$$\{G_+, G_-, p\} = \{S_1^+ - S_0, S_0 - S_1^-, p\} = \{1.800, 600, p\}$$

Un contratto (f_a, p_a) relativo a tale rischio é equo in rischio a parità di capitale investito se e solo se

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = \frac{1}{2} \tag{1}$$

Con i dati del presente problema, questa condizione diventa

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = f_a + p_a \frac{1.800}{600} = f_a + 3p_a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3p_a = \frac{1}{2} - f_a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_a = \frac{1}{6} - \frac{f_a}{3} \tag{2}$$

Quindi una condizione necessaria su f_a è che risulti

$$\frac{1}{6} - \frac{f_a}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - f_a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > f_a \Leftrightarrow f_a \in [0, 1/2) \tag{3}$$

Se questa condizione è soddisfatta il prezzo è

$$p_a G_+ = (\frac{1}{6} - \frac{f_a}{3})1.800 = (\frac{1}{2} - f_a)600 \tag{4}$$

Infine il contratto, essendo equo in rischio, è automaticamente ammissibile.

Paragone dei prezzi

Il prezzo di BS, in Euro, é

$$\pi = \frac{(S_0 - S_1^-)(S_1^+ - K)}{S_1^+ - S_1^-} = \frac{(7-1)(25-10)}{25-1}(100) = \frac{6(15)}{24}(100) = \frac{(15)}{4} = 3,75(100) = 375$$

Il prezzo di un contratto a franchigia nulla sarebbe, secondo la (**??**):

$$p_a G_+ = (\frac{1}{2} - f_a)600 = \frac{600}{2} = 300 < 375$$

Condizioni sui guadagni attesi

La condizione sui guadagni attesi implica in particolare che il contratto sia ragionevole in media. Condizione affinché ciò accada é che risulti

$$1 \geq \rho = \left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{G_-}{G_+} = \left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 \geq \frac{1}{p} - 1 \Leftrightarrow 4 \geq \frac{1}{p} \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{4} \tag{5}$$

Quindi

$$p \in [1/4, 1) \tag{6}$$

La funzione guadagno di A dopo il contratto, tenuto conto della (**??**), è

$$G_A(+) = (1-p_a)G_+ \qquad ; \qquad G_A(-) = -G_-(f_a + p_a G_+/G_-)$$

Quindi, tenuto conto delle (**??**), (**??**) e (**??**), il guadagno atteso di A è maggiore del guadagno atteso di Black e Scholes, che è nullo, se e solo se

$$\left(\frac{1}{p}-1\right)\frac{G_-}{G_+}\frac{f_a + p_a G_+/G_-}{1-p_a} = \left(\frac{1}{p}-1\right)\frac{1}{3}\frac{1/2}{1-1/6+f_a/3} < 1$$

$$\Leftrightarrow = \left(\frac{1}{p}-1\right)\frac{1}{3}\frac{1/2}{5/6+f_a/3} < 1$$

Poiché $5/6 + f_a/3 > 0$ questa equivale a

$$\left(\frac{1}{p}-1\right)\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\frac{1}{p} - \frac{1}{6} < 5/6+f_a/3 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\frac{1}{p} < 1+f_a/3 \Leftrightarrow \frac{1}{p} < 6+2f_a = 2(3+f_a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p > \frac{1}{2}\frac{1}{3+f_a} \tag{7}$$

Il membro destro della (**??**) é decrescente come funzione di $f_a \in [0, 1/2)$. Quindi il suo massimo é raggiunto nel punto $f_a = 0$. In questo punto la disuguaglianza diventa

$$p > \frac{1}{6}$$

che è identicamente soddisfatta poichè, per la condizione necessaria, $p \geq 1/4$.

Se vale la (**??**) il guadagno atteso di B è:

$$\langle G_B \rangle = p p_a G_+ - (1-p)(G_- - (f_a G_- + p_a G_+)) =$$

$$= p(\frac{1}{6} - \frac{f_a}{3})G_+ - (1-p)G_-(1-1/2)$$

Questo é maggiore di zero se e solo se

$$\frac{p}{3}\left(\frac{1}{2}-f_a\right) > \frac{1}{2}(1-p)\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{p}{2} - p f_a > \frac{1}{2} - \frac{p}{2} \Leftrightarrow p\,(1-f_a) > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow p > \frac{1}{2}\frac{1}{1-f_a}$$

Il membro destro di questa disuguaglianza, per $f_a \in [0, 1/2)$ è crescente e, per $f_a \to 1/2$, tende a $1/4$.
Quindi anche in questo caso le condizioni $p \in [1/4, 1)$ e $f_a \in [0, 1/2)$ implicano

$$\langle G_B \rangle > 0$$

Riassumendo: con il contratto assicurativo il guadagno atteso, sia di A che di B é strettamente maggiore di quello che si otterrebbe con il prezzo di BS.

Paragone dei prezzi

Il prezzo di Black e Scholes per il portafoglio dato é

$$\pi_{BS} = p_{BS}(S_1^+ - K) = \frac{1}{4} \cdot 1500 = 375 \tag{8}$$

Poichè dalla (**??**) segue che

$$p_a G_+ = (\frac{1}{2} -)(600) < \frac{1}{2}(600) = 300 < 375 = \pi_{BS}$$

si conclude che ogni contratto (f_a, p_a), equo in rischio e a franchigia nulla ha un prezzo minore di quello di Black e Scholes.