Compito di Calcolo delle Probabilità

Docente: Luigi Accardi

4–7–2014

Tempo concesso per lo svolgimento: 90 Minuti.
Per la sufficienza basta rispondere alle prime due domande.
Gli esami orali dell'Esame "Calcolo delle probabilità" cominceranno Martedì 4–7–2014 alle ore 15,00 in Aula P11.

Problema 1 *Ricordare che per definizione un contratto con capitali investiti C_A , C_B è detto equo in rischio se*

$$\frac{r_A}{C_A} = \frac{r_B}{C_B} \tag{1}$$

cioè se il rapporto tra i rischi è inversamente proporzionale al rapporto tra i capitali investiti.
1) Come varia la condizione di equità in rischio se la funzione guadagno di A resta la stessa e la funzione guadagno di B diventa

$$G_B(+) = p_a G_+ - C_B \tag{2}$$

$$G_B(-) = -G_-(1 - f_a - p_a G_+/G_-) - C_B \tag{3}$$

2) Commentare economicamente il risultato.
3) Come varia la condizione di equità in rischio percentuale nelle stesse condizioni del problema (1)?

Soluzione, **Domanda (1)**.
Tenuto conto di (3) e del fatto che

$$G_A(-) = -(f_a G_- + p_a G_+) \tag{4}$$

la condizione di equità in rischio (1) é equivalente a:

$$\frac{(1-p)G_-(f_a + p_a G_+/G_-)}{(1-p)\left(G_-(1-(f_a + p_a G_+/G_-)) + C_B\right)} = \frac{G_-(f_a + p_a G_+/G_-)}{G_-(1-(f_a + p_a G_+/G_-)) + C_B} = \frac{C_A}{C_B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_a + p_a G_+/G_-}{1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-} = \frac{C_A}{C_B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_B(f_a + p_a G_+/G_-) = C_A - C_A(f_a + p_a G_+/G_-) + C_A C_B/G_- \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (C_A + C_B)(f_a + p_a G_+/G_-) = C_A(1 + C_B/G_-) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f_a + p_a G_+/G_- = \frac{C_A}{C_A + C_B}\left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \tag{5}$$

Concludiamo che le coppie (f_a, p_a), che soddisfano la condizione di equità in rischio sono caratterizzate dalla condizione:

Per una tale coppia, la condizione di ammissibilitá economica

$$f_a + p_a G_+/G_- < 1$$

é quindi che risulti

$$\frac{C_A}{C_A + C_B}\left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) < 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{C_B}{G_-} < 1 + \frac{C_B}{C_A}$$

Equivalently:

$$C_A < G_- \tag{6}$$

In conclusione:
Contratti equi in rischio che risolvono il problema esistono se e solo se la condizione (6). Se tale condizione é soddisfatta, tali contratti sono caratterizzati dalla condizione (5).

Domanda (2).
L'interpretazione economica della condizione (6) é di tipo 'rischio catastrofico'.

L'interpretazione economica della condizione (5) parte dall'osservazione che il membro sinistro rappresenta la perdita potenziale di A dopo il contratto. Calcolando la derivata, rispetto alla variabile C_B del membro destro, si trova:

$$\partial_{C_B} \frac{C_A}{C_A + C_B}\left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) = -\frac{C_A}{(C_A + C_B)^2}\left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) + \frac{C_A}{C_A + C_B}\frac{1}{G_-}$$
$$= \frac{C_A}{(C_A + C_B)^2}\left(\frac{C_A + C_B}{G_-} - 1 - \frac{C_B}{G_-}\right) = \frac{C_A}{(C_A + C_B)^2}\left(\frac{C_A}{G_-} - 1\right) \ < \ 0$$

cioé il membro destro di (5) é funzione decrescente del capitale investito da B.

Ció significa che, se il rischio deve essere suddiviso equamente tra A e B, allora a paritá di tutti gli altri parametri, se il capitale investito da B (quindi il suo rischio, data la (3)) aumenta, allora il rischio di A diminuisce.

Per arrivare a questa conclusione non é necessario fare la derivata rispetto a C_B: basta tener conto del teorema della conservazione del rischio nei contratti assicurativi.

Anche questa conclusione é molto ragionevole economicamente.

Domanda (3).
La risposta viene lasciata come esercizio agli studenti volenterosi.