Esame del corso: *Teoria del rischio*

Docente: Luigi Accardi

10–9–2014

Tempo concesso per lo svolgimento: 90 Minuti.
Per la sufficienza basta rispondere alle prime due domande o almeno impostarle in modo ragionevole.

Attenzione!
Le domande sono diverse da quelle del compito di luglio.
Quindi la soluzione in rete puó essere usata limitatamente.

Gli esami orali dell'Esame *Teoria del rischio* **cominceranno Mercoledì 10–9–2014 alle ore 14,30 nella stessa aula dello scritto**.

Problema 1 Per definizione un contratto assicurativo, relativo al rischio $\{G_+, G_-, p\}$, con capitali investiti C_A , C_B è detto **equo in rischio percentuale** se l'indice di rischio percentuale per unitá di capitale investito é lo stesso per A e per B). In simboli:

$$\frac{\rho_A}{C_A} = \frac{\rho_B}{C_B} \tag{1}$$

1) Date le funzioni guadagno di A e di B

$$G_A(+) = (1 - p_a)G_+ \tag{2}$$

$$G_A(-) = -f_a G_- - p_a G_+ \tag{3}$$

$$G_B(+) = p_a G_+ - C_B \ > \ 0 \tag{4}$$

$$G_B(-) = -G_-(1 - f_a - p_a G_+/G_-) - C_B \ < \ 0 \tag{5}$$

determinare la condizione di equità in rischio percentuale.

2) Supponendo date tutte le altre variabili, determinare per quali valori di C_B puó esistere un contratto (f_a, p_a), equo in rischio percentuale.

3) Per i valori di C_B che soddisfano la condizione (2), determinare il vincolo imposto dalla condizione di compatibilitá su p_a.

Soluzione, **Domanda (1)**.
Date le funzioni guadagno (2), (3), (4), (5), la condizione di equità in rischio percentuale (1) é equivalente a:

$$\frac{\rho_A}{C_A} = \frac{\rho_B}{C_B} \Leftrightarrow \frac{G_-(f_a + p_a G_+/G_-)}{(1-p_a)G_+C_A} = \frac{G_-(1-(f_a+p_aG_+/G_-))+C_B}{(p_aG_+ - C_B)C_B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p_a - C_B/G_+)C_B(f_a + p_aG_+/G_-) =$$

$$= (1-p_a)C_A - (1-p_a)C_A(f_a+p_aG_+/G_-) + (1-p_a)C_AC_B/G_- \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(p_aC_B - C_B^2/G_+ + (1-p_a)C_A\right)\left(f_a + p_a\frac{G_+}{G_-}\right) = (1-p_a)C_A(1+C_B/G_-)$$

Concludiamo che le coppie (f_a, p_a), che soddisfano la condizione di equità in rischio sono caratterizzate dalla condizione:

$$(-C_B^2/G_+ + p_aC_B + (1-p_a)C_A)(f_a + p_aG_+/G_-) = (1-p_a)C_A(1+C_B/G_-) \quad (6)$$

e ció risponde alla domanda (1).

Domanda (2).
Osservare che il membro destro della (6) é strettamente positivo.
Quindi una condizione necessaria per l'esistenza di contratti equi in rischio percentuale é che risulti

$$-C_B^2/G_+ + p_aC_B + (1-p_a)C_A > 0 \quad (7)$$

L'equazione di 2–o grado nella incognita C_B:

$$-C_B^2/G_+ + p_aC_B + (1-p_a)C_A = 0 \Leftrightarrow C_B^2 - p_aG_+C_B - (1-p_a)G_+C_A = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(C_B - \frac{p_aG_+}{2}\right)^2 = \frac{p_a^2G_+^2}{4} + G_+C_A(1-p_a) \quad (8)$$

ha due radici reali poiché

$$\frac{1}{4}p_a^2G_+^2 + G_+C_A(1-p_a) > 0$$

quindi le due soluzioni dell'equazione sono:

$$C_B = \frac{1}{2}p_aG_+ \pm \sqrt{\frac{p_a^2G_+^2}{4} + G_+C_A(1-p_a)} = \frac{1}{2}p_aG_+\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4C_A(1-p_a)}{p_a^2G_+}}\right)$$

Tuttavia, dato che

$$\frac{4C_A(1-p_a)}{p_a^2 G_+} > 0$$

la radice con segno $-$ conduce sempre a una soluzione negativa, che va scartata perché $C_B > 0$. D'altra parte, detta

$$C_B^+ := \frac{1}{2} p_a G_+ \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4C_A(1-p_a)}{p_a^2 G_+}} \right)$$

la radice positiva dell'equazione (8), per $C_B > C_B^+$, il membro sinistro di (7) diventa negativo poiché la parabola ha concavitá *a cappello* ($\cap$). Concludiamo che gli unici valori di C_B per i quali puó esistere un contratto (f_a, p_a), equo in rischio percentuale, é che risulti

$$C_B \in \; [0 \; , \; C_B^+) = \left[0 \; , \; \frac{1}{2} p_a G_+ \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4C_A(1-p_a)}{p_a^2 G_+}} \right) \right) \tag{9}$$

e ció risponde alla domanda (2).

Domanda (3).
Se C_B soddisfa la condizione (9), l'equazione (6) equivale a

$$f_a + p_a G_+/G_- = \frac{(C_A - p_a C_A)(1 + C_B/G_-)}{-C_B^2/G_+ + p_a C_B + (1-p_a)C_A} \tag{10}$$

e la condizione di compatibilitá richiede che

$$\frac{(1-p_a)C_A(1 + C_B/G_-)}{-C_B^2/G_+ + p_a C_B + (1-p_a)C_A} < 1 \tag{11}$$

Poiché, a causa della condizione (9), il denominatore della (11) é sempre positivo, la (11) equivale a:

$$(C_A - p_a C_A)(1 + C_B/G_-) < -C_B^2/G_+ + p_a C_B + C_A(1-p_a)$$

$$\Leftrightarrow C_A + C_A C_B/G_- - p_a C_A - p_a C_A C_B/G_- < -C_B^2/G_+ + p_a C_B + C_A - p_a C_A$$

$$\Leftrightarrow C_A C_B/G_- - p_a C_A C_B/G_- < p_a C_B - C_B^2/G_+$$

$$\Leftrightarrow C_A/G_- - p_a C_A/G_- = (1-p_a)C_A/G_- < p_a - C_B/G_+$$

$$\Leftrightarrow C_B/G_+ < p_a - (1-p_a)C_A/G_- = p_a - C_A/G_- + p_a C_A/G_-$$

$$\Leftrightarrow C_B/G_+ < p_a(1+C_A/G_-) - C_A/G_- \Leftrightarrow C_B/G_+ + C_A/G_- < p_a(1+C_A/G_-)$$

$$\Leftrightarrow p_a > \frac{C_B/G_+ + C_A/G_-}{1+C_A/G_-}$$

e questa disuguaglianza é possibile se e solo se

$$C_B/G_+ < 1 \;\Leftrightarrow\; C_B < G_+ \tag{12}$$

Noi sappiamo che C_B soddisfa la condizione (9). Quindi la condizione (12) é sempre soddisfatta se

$$\frac{1}{2}p_a G_+ \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4C_A(1-p_a)}{p_a^2 G_+}}\right) \leq G_+ \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1 + \frac{4C_A(1-p_a)}{p_a^2 G_+}} \leq \frac{2}{p_a}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{4C_A(1-p_a)}{p_a^2 G_+}} \leq \frac{2}{p_a} - 1 \tag{13}$$

Una condizione necessaria per la validitá di questa disuguaglianza é che risulti

$$\Leftrightarrow \frac{2}{p_a} - 1 > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{p_a} > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{p_a} > 1$$

che é sempre soddisfatta dato che $p_a \in (0,1)$. Ció posto, la (13) equivale a:

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{4C_A(1-p_a)}{p_a^2 G_+} \leq (\frac{2}{p_a} - 1)^2 = 1 + \frac{4}{p_a^2} - \frac{4}{p_a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_A(1-p_a)}{p_a^2 G_+} \leq \frac{1}{p_a^2} - \frac{1}{p_a} \Leftrightarrow \frac{C_A(1-p_a)}{G_+} \leq 1 - p_a$$

$$\Leftrightarrow C_A > G_+ \tag{14}$$

Viceversa, se questa condizione non é soddisfatta, ció significa che

$$\frac{1}{2}p_a G_+ \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4C_A(1-p_a)}{p_a^2 G_+}}\right) > G_+$$

e quindi la (12) restringe l'intervallo di ammissibilitá per C_B a:

$$C_B \in (0, G_+) \tag{15}$$

Conclusione
(i) Se C_B soddisfa la condizione (9) e

$$C_A \leq G_+ \tag{16}$$

allora automaticamente $C_B \leq G_+$ e il vincolo imposto dalla condizione di compatibilitá su p_a é

$$p_a \in \left(\frac{C_B/G_+ + C_A/G_-}{1 + C_A/G_-}, 1 \right)$$

(ii) Se C_B soddisfa la condizione (9) e

$$C_A > G_+ \tag{18}$$

allora la condizione di compatibilitá su p_a resta la (17) mentre l'intervallo di ammissibilitá per C_B si restringe a (15).
Ció risponde alla domanda (3).

Osservazione
La condizione (18) é economicamente realistica poiché G_+ rappresenta il guadagno netto, mentre C_A rappresenta l'investimento lordo.