

**Esame del corso:** *Teoria del rischio*

**Docente:** Luigi Accardi

**10–9–2014**

Tempo concesso per lo svolgimento: 90 Minuti.

Per la sufficienza basta rispondere alle prime due domande o almeno impostarle in modo ragionevole.

**Attenzione!**

Le domande sono diverse da quelle del compito di luglio.

Quindi la soluzione in rete può essere usata limitatamente.

**Gli esami orali dell'Esame *Teoria del rischio* cominceranno Mercoledì 10–9–2014 alle ore 14,30 nella stessa aula dello scritto.**

**Problema 1** Per definizione un contratto assicurativo, relativo al rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , con capitali investiti  $C_A$ ,  $C_B$  è detto **equo in rischio percentuale** se l'indice di rischio percentuale per unità di capitale investito è lo stesso per  $A$  e per  $B$ ). In simboli:

$$\frac{\rho_A}{C_A} = \frac{\rho_B}{C_B} \quad (1)$$

1) Date le funzioni guadagno di  $A$  e di  $B$

$$G_A(+) = (1 - p_a)G_+ \quad (2)$$

$$G_A(-) = -f_a G_- - p_a G_+ \quad (3)$$

$$G_B(+) = p_a G_+ - C_B > 0 \quad (4)$$

$$G_B(-) = -G_-(1 - f_a - p_a G_+/G_-) - C_B < 0 \quad (5)$$

determinare la condizione di equità in rischio percentuale.

2) Supponendo date tutte le altre variabili, determinare per quali valori di  $C_B$  può esistere un contratto  $(f_a, p_a)$ , equo in rischio percentuale.

3) Per i valori di  $C_B$  che soddisfano la condizione (2), determinare il vincolo imposto dalla condizione di compatibilità su  $p_a$ .

**Soluzione, Domanda (1).**

Date le funzioni guadagno (2), (3), (4), (5), la condizione di equità in rischio percentuale (1) é equivalente a:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_A}{C_A} = \frac{\rho_B}{C_B} &\Leftrightarrow \frac{G_-(f_a + p_a G_+/G_-)}{(1 - p_a)G_+ C_A} = \frac{G_-(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) + C_B}{(p_a G_+ - C_B)C_B} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (p_a - C_B/G_+)C_B(f_a + p_a G_+/G_-) = \\ &= (1 - p_a)C_A - (1 - p_a)C_A(f_a + p_a G_+/G_-) + (1 - p_a)C_A C_B/G_- \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (p_a C_B - C_B^2/G_+ + (1 - p_a)C_A) \left( f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} \right) = (1 - p_a)C_A(1 + C_B/G_-) \end{aligned}$$

Concludiamo che le coppie  $(f_a, p_a)$ , che soddisfano la condizione di equità in rischio sono caratterizzate dalla condizione:

$$(-C_B^2/G_+ + p_a C_B + (1 - p_a)C_A)(f_a + p_a G_+/G_-) = (1 - p_a)C_A(1 + C_B/G_-) \quad (6)$$

e ciò risponde alla domanda (1).

**Domanda (2).**

Osservare che il membro destro della (6) é strettamente positivo.

Quindi una condizione necessaria per l'esistenza di contratti equi in rischio percentuale é che risulti

$$-C_B^2/G_+ + p_a C_B + (1 - p_a)C_A > 0 \quad (7)$$

L'equazione di 2-o grado nella incognita  $C_B$ :

$$\begin{aligned} -C_B^2/G_+ + p_a C_B + (1 - p_a)C_A = 0 &\Leftrightarrow C_B^2 - p_a G_+ C_B - (1 - p_a)G_+ C_A = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( C_B - \frac{p_a G_+}{2} \right)^2 = \frac{p_a^2 G_+^2}{4} + G_+ C_A (1 - p_a) \end{aligned} \quad (8)$$

ha due radici reali poiché

$$\frac{1}{4}p_a^2 G_+^2 + G_+ C_A (1 - p_a) > 0$$

quindi le due soluzioni dell'equazione sono:

$$C_B = \frac{1}{2}p_a G_+ \pm \sqrt{\frac{p_a^2 G_+^2}{4} + G_+ C_A (1 - p_a)} = \frac{1}{2}p_a G_+ \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4C_A(1 - p_a)}{p_a^2 G_+}} \right)$$

Tuttavia, dato che

$$\frac{4C_A(1-p_a)}{p_a^2 G_+} > 0$$

la radice con segno  $-$  conduce sempre a una soluzione negativa, che va scartata perché  $C_B > 0$ . D'altra parte, detta

$$C_B^+ := \frac{1}{2}p_a G_+ \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4C_A(1-p_a)}{p_a^2 G_+}} \right)$$

la radice positiva dell'equazione (8), per  $C_B > C_B^+$ , il membro sinistro di (7) diventa negativo poiché la parabola ha concavità *a cappello* ( $\cap$ ). Concludiamo che gli unici valori di  $C_B$  per i quali può esistere un contratto  $(f_a, p_a)$ , equo in rischio percentuale, è che risulti

$$C_B \in [0, C_B^+) = \left[ 0, \frac{1}{2}p_a G_+ \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4C_A(1-p_a)}{p_a^2 G_+}} \right) \right) \quad (9)$$

e ciò risponde alla domanda (2).

### Domanda (3).

Se  $C_B$  soddisfa la condizione (9), l'equazione (6) equivale a

$$f_a + p_a G_+ / G_- = \frac{(C_A - p_a C_A)(1 + C_B / G_-)}{-C_B^2 / G_+ + p_a C_B + (1 - p_a) C_A} \quad (10)$$

e la condizione di compatibilità richiede che

$$\frac{(1 - p_a) C_A (1 + C_B / G_-)}{-C_B^2 / G_+ + p_a C_B + (1 - p_a) C_A} < 1 \quad (11)$$

Poiché, a causa della condizione (9), il denominatore della (11) è sempre positivo, la (11) equivale a:

$$\begin{aligned} & (C_A - p_a C_A)(1 + C_B / G_-) < -C_B^2 / G_+ + p_a C_B + C_A(1 - p_a) \\ \Leftrightarrow & C_A + C_A C_B / G_- - p_a C_A - p_a C_A C_B / G_- < -C_B^2 / G_+ + p_a C_B + C_A - p_a C_A \\ \Leftrightarrow & C_A C_B / G_- - p_a C_A C_B / G_- < p_a C_B - C_B^2 / G_+ \\ \Leftrightarrow & C_A / G_- - p_a C_A / G_- = (1 - p_a) C_A / G_- < p_a - C_B / G_+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow C_B/G_+ < p_a - (1 - p_a)C_A/G_- = p_a - C_A/G_- + p_a C_A/G_- \\
&\Leftrightarrow C_B/G_+ < p_a(1 + C_A/G_-) - C_A/G_- \Leftrightarrow C_B/G_+ + C_A/G_- < p_a(1 + C_A/G_-) \\
&\Leftrightarrow p_a > \frac{C_B/G_+ + C_A/G_-}{1 + C_A/G_-}
\end{aligned}$$

e questa disuguaglianza é possibile se e solo se

$$C_B/G_+ < 1 \Leftrightarrow C_B < G_+ \quad (12)$$

Noi sappiamo che  $C_B$  soddisfa la condizione (9). Quindi la condizione (12) é sempre soddisfatta se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}p_a G_+ \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4C_A(1 - p_a)}{p_a^2 G_+}} \right) &\leq G_+ \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1 + \frac{4C_A(1 - p_a)}{p_a^2 G_+}} \leq \frac{2}{p_a} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{4C_A(1 - p_a)}{p_a^2 G_+}} \leq \frac{2}{p_a} - 1 \quad (13)
\end{aligned}$$

Una condizione necessaria per la validit  di questa disuguaglianza é che risulti

$$\Leftrightarrow \frac{2}{p_a} - 1 > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{p_a} > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{p_a} > 1$$

che é sempre soddisfatta dato che  $p_a \in (0, 1)$ . Ci  posto, la (13) equivale a:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 1 + \frac{4C_A(1 - p_a)}{p_a^2 G_+} \leq \left( \frac{2}{p_a} - 1 \right)^2 = 1 + \frac{4}{p_a^2} - \frac{4}{p_a} \\
&\Leftrightarrow \frac{C_A(1 - p_a)}{p_a^2 G_+} \leq \frac{1}{p_a^2} - \frac{1}{p_a} \Leftrightarrow \frac{C_A(1 - p_a)}{G_+} \leq 1 - p_a \\
&\Leftrightarrow C_A > G_+ \quad (14)
\end{aligned}$$

Viceversa, se questa condizione non é soddisfatta, ci  significa che

$$\frac{1}{2}p_a G_+ \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4C_A(1 - p_a)}{p_a^2 G_+}} \right) > G_+$$

e quindi la (12) restringe l'intervallo di ammissibilit  per  $C_B$  a:

$$C_B \in (0, G_+) \quad (15)$$

### Conclusione

(i) Se  $C_B$  soddisfa la condizione (9) e

$$C_A \leq G_+ \quad (16)$$

allora automaticamente  $C_B \leq G_+$  e il vincolo imposto dalla condizione di compatibilità su  $p_a$  é

$$p_a \in \left( \frac{C_B/G_+ + C_A/G_-}{1 + C_A/G_-}, 1 \right)$$

(ii) Se  $C_B$  soddisfa la condizione (9) e

$$C_A > G_+ \quad (18)$$

allora la condizione di compatibilità su  $p_a$  resta la (17) mentre l'intervallo di ammissibilità per  $C_B$  si restringe a (15).

Ciò risponde alla domanda (3).

### Osservazione

La condizione (18) é economicamente realistica poiché  $G_+$  rappresenta il guadagno netto, mentre  $C_A$  rappresenta l'investimento lordo.