Compito di Calcolo delle Probabilità

Docente: Luigi Accardi

20–2–2015

Tempo concesso per lo svolgimento: 90 Minuti.

Gli esami orali dell'Esame "Calcolo delle probabilità" cominceranno venerdì 20–2–2015 alle ore 15,45 nella medesima Aula.

Problema 1 Equivalenza tra strategie protettive basate su opzioni put e assicurazioni.
Sia dato un portafoglio

$$\{S_0 \ , \ S_1^{\pm} \ , \ p\} \qquad ; \qquad S_1^- \ < \ S_0 \ < \ S_1^+ \tag{1}$$

a cui corrisponde il rischio:

$$\{S_1^+ - S_0 \ , \ S_0 - S_1^- \ , \ p\}$$

A compra il portafoglio al tempo 0 pagandolo S_0 e vuole limitare le perdite sottoscrivendo una opzione put sullo stesso portafoglio.
Con strike price K e prezzo π, la funzione di guadagno di A rispetto alla operazione globale, cioé acquisto del portafoglio e sua protezione mediante opzione put, é:

$$G_A(+) = (S_1^+ - S_0) - \pi$$
$$G_A(-) = -(S_0 - S_1^-) + K - \pi$$

Sulla stessa operazione globale, la funzione di guadagno di B é

$$G_B(+) = \pi$$

$$G_B(-) = -K + \pi + S_1^-$$

1) Discutere le condizioni di coerenza economica.
2) Stabilire sotto quali condizioni esiste un contratto assicurativo, sul portafoglio dato, equivalente al contratto di opzione put descritto sopra.

Soluzione

0.1 Condizioni di coerenza economica

Valgono le seguenti condizioni di coerenza economica:

$$\pi < K \tag{2}$$

Infatti, senza questa condizione, la perdita virtuale di A dopo il contratto sarebbe maggiore di quella prima del contratto e il suo guadagno virtuale – minore. É chiaro che un tale contratto é economicamente incoerente. Senza la condizione

$$S_1^+ - S_0 > \pi$$

si avrebbe perdita certa per A. Senza la condizione

$$K < (S_0 - S_1^-) + \pi$$

si avrebbe guadagno certo per A.

Senza la condizione

$$\pi + S_1^- < K$$

si avrebbe guadagno certo per B.

Un guadagno certo sia per A che per B si ha se e solo se

$$\pi + S_1^- \geq K > (S_0 - S_1^-) + \pi$$

che é possibile se e solo se

$$S_1^- > (S_0 - S_1^-) \;\Leftrightarrow\; S_1^- > S_0/2$$

0.2 Equivalenza di contratti

Le funzioni di guadagno in un contratto assicurativo privo di costi per l'assicuratore sono:

$$G_A^{(a)}(+) = (1 - p_a)G_+ = (1 - p_a)(S_1^+ - S_0)$$

$$G_A^{(a)}(-) = -f_a G_- - p_a G_+ = -f_a(S_0 - S_1^-) - p_a(S_1^+ - S_0)$$

$$G_B^{(a)}(+) = p_a G_+ = p_a(S_1^+ - S_0)$$

$$G_B^{(a)}(-) = -(1-f_a)G_- + p_a G_+ = -(1-f_a)(S_0 - S_1^-) + p_a(S_1^+ - S_0)$$

Un contratto assicurativo su un portafoglio é equivalente a una opzione put sullo stesso portafoglio se e solo se, denotando $G_X^{(a)}$ $(X = A, B)$, le funzioni guadagno relative al contratto di assicurazione e G_X quelle relative al contratto di opzione, si ha:

$$G_A(\pm) = G_A^{(a)}(\pm) \qquad ; \qquad G_B(\pm) = G_B^{(a)}(\pm)$$

Uguagliando le funzioni guadagno di A nei due contratti si trova

$$G_A^{(a)}(+) = G_A(+) \Leftrightarrow$$

$$(1-p_a)(S_1^+ - S_0) = (S_1^+ - S_0) - \pi \Leftrightarrow p_a(S_1^+ - S_0) = \pi$$

$$\Leftrightarrow p_a = \frac{\pi}{S_1^+ - S_0} \tag{3}$$

Usando questo risultato si trova:

$$G_A^{(a)}(-) = G_A(-) \Leftrightarrow -f_a(S_0 - S_1^-) - p_a(S_1^+ - S_0) = -(S_0 - S_1^-) - \pi + K$$

$$\Leftrightarrow -f_a(S_0 - S_1^-) - \frac{\pi}{S_1^+ - S_0}(S_1^+ - S_0) = -(S_0 - S_1^-) - \pi + K$$

$$\Leftrightarrow -f_a(S_0 - S_1^-) = -(S_0 - S_1^-) + K$$

$$\Leftrightarrow f_a = 1 - \frac{K}{S_0 - S_1^-} \tag{4}$$

La condizione di ammissibilitá economica richiede che

$$f_a + p_a \frac{S_1^+ - S_0}{S_0 - S_1^-} < 1$$

Nel caso in questione ció equivale a

$$1 - \frac{K}{S_0 - S_1^-} + \frac{\pi}{S_1^+ - S_0}\frac{S_1^+ - S_0}{S_0 - S_1^-} = 1 - \frac{K}{S_0 - S_1^-} + \frac{\pi}{S_0 - S_1^-} < 1$$

$$\Leftrightarrow \pi < K$$

che é automaticamente soddisfatta a causa della condisione di coerenza economica (2).

Uguagliando le funzioni guadagno di B si trova

$$G_B(+) = G_B^{(a)}(+) \Leftrightarrow \pi = p_a(S_1^+ - S_0)$$

che equivale alla (3).

$$G_B(-) = -K + \pi + S_1^-$$

$$G_B(-) = G_B^{(a)}(-) \Leftrightarrow -K + \pi + S_1^- = -(1 - f_a)(S_0 - S_1^-) + p_a(S_1^+ - S_1^-) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -K + \pi + S_1^- = -(1 - f_a)(S_0 - S_1^-) + \frac{\pi}{S_1^+ - S_0}(S_1^+ - S_1^-) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -K + S_1^- = -(1 - f_a)(S_0 - S_1^-) = -S_0 + S_1^- + f_a(S_0 - S_1^-) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -K = -S_0 + f_a(S_0 - S_1^-) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_0 - K = f_a(S_0 - S_1^-) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_a = \frac{S_0 - K}{S_0 - S_1^-}$$

che é compatibile con (4) se e solo se

$$\frac{S_0 - K}{S_0 - S_1^-} = 1 - \frac{K}{S_0 - S_1^-}$$

$$\Leftrightarrow S_0 - K = S_0 - S_1^- - K$$

$$\Leftrightarrow 0 = S_1^-$$

che contraddice l'ipotesi (1).