Prezzi del rischio: Assicurazioni e opzioni

Anno 2018
Versione del 8–05–2018

Docente: Luigi Accardi

Indice

1 Introduzione: il prezzo del rischio **2**

2 Il caso e la sua quantificazione **3**

3 Rischi economici **5**
3.1 Eventi casuali 5
3.2 Schemi di rischio (dicotomico) 7
3.3 Varie tipologie di rischio 8

4 Rischi d'uso **9**
4.1 Guadagno medio e guadagno atteso 10
4.2 Varianza e rischio 14

5 Scommesse **15**
5.1 Scommesse leali 15
5.2 Posta di una scommessa 17
5.3 Rischio di puro azzardo 18
5.4 Scommesse multiple: Lotterie senza costi 19
5.5 Lotterie con costi 19
5.6 Scommesse asimmetriche 20
5.7 Scommesse e tasso d'interesse 22

6 Schemi di rischio associati ad investimenti **23**
6.1 Arbitraggio e misure neutre al rischio 24
6.2 Differenze tra investimenti e giochi d'azzardo 25
6.3 Dilemma dell'avversione al rischio e limiti dei criteri basati solo sul guadagno atteso 26
6.4 Indice di rischio percentuale e guadagno atteso positivo . . . 27
6.5 L'indice di rischio percentuale di un investimento 32

6.6 Sensibilitá del guadagno atteso alla probabilitá 32
6.7 * Paragone tra guadagni attesi 34
6.8 * Paragone dei guadagni attesi di due rischi con uguale probabilitá 35
6.9 * Paragone tra gli indici di rischio percentuale di due rischi con uguale probabilitá 36
6.10 * Relazioni tra guadagno atteso e indice di rischio percentuale 37
6.11 * Rischi catastrofici: posizione del problema 38
6.12 Tipologie di contratti economici 39

7 Contratti assicurativi 41
7.1 Schema matematico del contratto di assicurazione 42
7.2 Il Teorema della conservazione del guadagno 43
7.3 Il guadagno atteso dell'assicurato (A) 44
7.4 Il guadagno atteso dell'assicuratore (B) 45
7.5 Condizioni di coerenza economica 46
7.6 Condizioni di lealtá in contratti assicurativi 47

8 Assicurazioni di rischi d'uso 51
8.1 La funzione guadagno dell'assicurato (A) in un rischio d'uso . 51

9 Contratti assicurativi standard 55
9.1 Condizioni di coerenza economica per contratti standard . . . 56
9.2 Variazione dell'indice di rischio percentuale dopo un contratto assicurativo standard 60
9.3 Il guadagno di A dopo il contratto. 64
9.4 Il Guadagno di B dopo il contratto 65

10 Contratti ragionevoli in media 66
10.0.1 Contratti ragionevoli in media con premio pre–assegnato 71
10.0.2 Interpretazione economica delle condizioni del Teorema 14 72
10.0.3 Contratti ragionevoli in media con franchigia pre–assegnata 73
10.0.4 Interpretazione economica delle condizioni del Teorema 15 76

11 Condizioni di coerenza economica per contratti ragionevoli in media (RM) 77

12 Contratti assicurativi equi in rischio (ER) 78

13 Contratti assicurativi equi in media 86
13.1 Contratti equi in media con premio o franchigia pre–asseganti 88
13.2 Guadagni attesi dopo un contratto equo in media 98
13.3 Contratti equi e ragionevoli in media 99
13.4 Contratti assicurativi universalmente equi in media 99

14 Opzioni 103
14.1 Modelli matematici di opzioni call europee 103
14.2 Le condizioni di coerenza economica 106
14.3 La scommessa soggiacente a un'opzione 108
14.4 Il postulato di Black e Scholes e l'ipotesi di non arbitraggio . . 112

15 Inequivalenza tra opzioni e assicurazioni 114

16 Nuovo approccio alla determinazione del prezzo dell'opzione 116

17 Problemi del 16-05-2018 116

18 Problemi su opzioni e assicurazioni 117

19 Problemi risolti 123

Sono escluse dal programma tutte le sezioni contrassegnate da un asterisco (*) e tutte le sezioni dalla 17 fino alla fine.

1 Introduzione: il prezzo del rischio

Fino a pochi anni fá il rischio era visto come qualcosa da esorcizzare.
Oggi é una merce: si compra, si vende, si scambia, si affitta e si sub–affitta.
Si pone quindi il problema di definire il prezzo di questa merce.
Come per ogni altra merce, anche per il rischio, il prezzo é una categoria astratta, che non ha un significato assoluto, disgiunto da un preciso contesto. Essendo impossibile parlare di prezzo del rischio in termini obiettivi, la cosa migliore che si puó fare é accettare l'idea che il prezzo sia una convenzione, che nasce un accordo tra piú parti, e cercare di stabilire alcuni criteri che permettano di impostare su basi razionali tale accordo.
Come si vedrá di tali criteri ne esistono molti (potenzialmente una infinitá). Tra questi particolarmente interessanti sono *quelli che non dipendono dalla probabilitá* che spesso, nei rischi economici, é difficile da definire.
L'esistenza di una molteplicitá di criteri sottolinea come questi non siano da intendersi come regole da applicare meccanicamente, ma come ausili al decisore che servono a porre in luce diversi aspetti del problema.
Piú precisamente il presente studio é il tentativo di dare una forma matematica al seguente problema:
Un soggetto A vuole condividere con un soggetto B un rischio economico economicamente valutabile, cioé una prospettiva di un guadagno G_+ con probabilitá p oppure di una perdita G_- con probabilitá $1-p$.
A tal fine é disposto a cedere a B una frazione $p_a G_+$ ($p_a \in (0,1)$) del potenziale guadagno (il prezzo del rischio) e, in corrispettivo, chiede a B di coprire, in caso di insuccesso, una frazione della perdita $(1-f_a)G_-$ ($f_a \in [0,1)$).
Definire la coppia (p_a, f_a) equivale a definire un contratto. Con quali criteri definire un tale contratto?
Questo é uno schema molto idealizzato, ma un semplice calcolo, basato sull'attesa condizionata, mostra che il piú complesso e realistico rischio puó essere ricondotto a questo schema. In questo caso G_+ (risp. G_-) rappresenta il guadagno atteso (risp. perdita attesa) condizionato all'ipotesi di guadagno (risp. perdita). Nella pratica questa operazione di **condizionamento** é implicitamente eseguita dal decisore che, non potendo esaminare individualmente tutte le possibilitá, potenzialmente infinite, tenta di rispondere a domande del tipo: *se perdo, quanto é ragionevole attendersi come perdita?* o simmetricamente *se guadagno, quanto é ragionevole attendersi come guadagno?*.
Conviene partire dallo studio delle *condizioni minimali*, che possono essere

considerate come l'analogo economico delle *condizioni necessarie* in matematica. E' certamente possibile introdurre condizioni piú sofisticate, ma queste condizioni minimali dovrebbero poter costituire una base sulla quale conseguire un accordo universalmente condiviso.
Lo schema astratto di rischio delineato sopra include i giochi d'azzardo, le assicurazioni, gli investimenti, le opzioni, ... e molte altre realtá di interesse economico.
La prima parte del lavoro é dedicata a una distinzione matematica tra giochi d'azzardo e investimenti. Si introduce un indice numerico (indice di rischio percentuale) che discrimina tra i due. L'idea intuitiva é che un gioco d'azzardo é leale se il valore atteso del guadagno é zero, mentre un requisito minimale per un investimento é che almeno il guadagno sperato sia positivo.
Poi, e questa é la parte principale del testo, si introducono vari tipi di contratti assicurativi, determinati da differenti criteri minimali (ragionevolezza in media, equitá in media, equitá in rischio, ...). Intuitivamente un contratto é *tanto migliore* quanto maggiore é il numero di criteri minimali che esso soddisfa.
Infine si studia la relazione tra contratti assicurativi e opzioni. Il risultato principale ottenuto (v. il Teorema 26 della sezione 15) é che lo schema attuale del prezzo di una opzione non puó essere ricondotto ad una assicurazione essendo matematicamente equivalente a un gioco di puro azzardo.
La nostra conclusione é che, se si vuole che il prezzo di una opzione soddisfi i requisiti minimali che distinguono un investimento da un gioco d'azzardo, allora occorre cambiare l'attuale meccanismo di prezzi e adottare schemi del tipo di quelli proposti nel presente lavoro, che generalizzano quelli dei contratti assicurativi.

2 Il caso e la sua quantificazione

Un *evento* é una possibilitá, cioé qualcosa che puó accadere o no.
Spesso non é possibile prevedere se un dato evento accadrá o no.
In presenza di un tale difetto di conoscenza si parla di *evento aleatorio, o casuale, o incerto.*
Spesso si suppone che l'informazione disponibile, relativamente a una certa famiglia di eventi in un certo orizzonte temporale, sia fissata una volta per tutte e che, data tale informazione, sia possibile quantificare l'incertezza di un dato evento attribuendo ad esso un numero, compreso tra 0 e 1, e chia-

mato *la probabilitá di tale evento.*
La probabilitá é quindi un modo di quantificare le possibilitá: io so che un piano finanziario ha "buone" possibilitá di guadagnare: ma quanto buone? Per esempio: cosa significa se un consulente dice: "questo piano ha il 70% di probabilitá di guadagnare"?
Su domande di questo genere esiste una cospicua letteratura dalla quale si puó concludere che le probabilitá sono fortemente intrise di valutazini soggettive e che ogni tentativo di eliminare completamente tali valutazioni é destinato all'insuccesso. Possiamo sintetizzare queste conclusioni nella frase: *in economia le probabilitá basiche non si misurano o si calcolano, ma si stimano.*
Nei problemi di interesse reale rarissimamente é possibile determinare esattamente il valore di una probabilitá: il meglio che in genere si riesce a fare é di determinare un certo intervallo di confidenza relativo alle probabilitá in questione. Pertanto, per le applicazioni, é importante poter stimare le variazioni indotte sulle nostre previsioni da una variazione della stima delle probabilitá in esse coinvolte.
In conseguenza di ció occorre che una **teoria del prezzo del rischio**, per essere ritenuta accettabile, deve condurre a risultati che sono **robusti** rispetto a piccole variazioni delle probabilitá coinvolte. In altri termini: una teria che implichi grosse variazioni nel prezzo in corrispondenza di piccole variazioni delle probabilitá non puó essere considerata valida.
A parte queste considerazioni generali, nel seguito la nozione di probabilitá sará trattata come primitiva.
L'Appendice del presente corso contiene una definizione formale del modello matematico standard di probabilitá (modello di Kolmogorov).
La disciplina che si occupa del problema di stimare le probabilitá di determinati eventi é la statistica.
Nel seguito supporremo che le probabilitá siano giá state stimate e ci interesseremo delle conseguenze che si possono trarre da tali stime. Pertanto tutti i ragionamenti che seguono saranno condizionati a quest'ipotesi.
Esempio.
L'investitore A propone un piano d'investimenti il risultato del quale é uno dei due eventi:

(i) A guadagna: evento $+$

(ii) A non guadagna: evento $-$

In questo caso lo spazio degli eventi (o delle possibilitá) é:

$$\Omega = \{+, -\}$$

A ciascuno degli eventi $+, -$ un individuo A puó associare una probabilitá

$$p(\pm|A) =: p(\pm)$$

cioé un numero compreso tra 0 e 1 che quantifica il *grado di credenza* che A attribuisce al verificarsi dell'evento $+, -$.
Nel nostro schema idealizzato le uniche due possibilitá sono "guadagnare" $(+)$ o "perdere" $(-)$ ed esse sono mutuamente esclusive. Ció si esprime attraverso l'ientitá:

$$p_+ + p_- = p(+) + p(-) = 1 \tag{1}$$

La funzione

$$P : s \in \Omega = \{+, -\} \to p_s \in [0, 1]$$

soddisfa l'identitá (1), quindi é **una misura di probabilitá** su Ω e la coppia

$$(\Omega, P) = (\{+, -\}\ ,\ \{p_+, p_-\})$$

é **uno spazio di probabilitá**.
Se sullo spazio Ω degli eventi (o delle possibilitá) é definita una misura di probabilitá P, una qualsiasi funzione X, definita su Ω e a valori reali é *una variabile casuale (o aleatoria)* (v. Appendice).
Nel seguito i termini *variabile casuale* e *variabile casuale a valori reali* saranno considerati sinonimi poiché la nostra attenzione sará limitata a quest'ultimo tipo di variabili casuali.

3 Rischi economici

3.1 Eventi casuali

Molte situazioni nella vita reale possono essere descritte mediante il seguente schema:
(i) se si verifica un evento, denotato con il simbolo $+$, un soggetto A guadagna una certa somma G_+ (guadagno netto);
(ii) se si verifica un evento, denotato con il simbolo $-$, un soggetto A perde una certa somma G_- (perdita netta);

(iii) i due complessi di condizioni (eventi) $\{+,-\}$ sono mutuamente incompatibili: se si verifica uno di essi, l'altro non puó verificarsi
(iv) almeno uno dei due complessi di condizioni (eventi) $\{+,-\}$ si verifica (tertium non datur)
(v) il soggetto A non sa quale dei due eventi $\{+,-\}$ si verificherá.
Questo fatto si esprime dicendo che gli eventi $\{+,-\}$ sono *casuali o aleatori rispetto al soggetto A.*
Esempi
(i) l'evento + corrisponde al fatto che il valore di un'azione al tempo 1 supera una soglia K e G_- é la somma che A perde se tale valore non supera la soglia K.
(ii) G_- é il valore, attualizzato al tempo 1, della somma che un giocatore A deve pagare al tempo 0 per partecipare a una scommessa.
(iii) G_- é il valore, attualizzato al tempo 1, della somma che un investitore A deve investire al tempo 0 per partecipare a un investimento.
Quando si verifica una situazione che soddisfa le 5 condizioni sopra–elencate si dice che *il soggetto A sta correndo un rischio (dicotomico).*
Piú in generale, per *rischio* si intende la possibilitá di una perdita combinata a un difetto di conoscenza circa il prodursi di tale evento.
La situazione descritta sopra puó essere formalizzata nel modo seguente.

Definizione 1 *Una* ***funzione guadagno*** *su* $\Omega = \{+,-\}$ *é una funzione* G*, definita sullo spazio degli eventi (o delle possibilitá) e a valori reali:*

$$G : \Omega = \{+,-\} \to \mathbb{R}$$

con la proprietá che $G(+)$ *é un numero positivo e* $G(-)$ *un numero negativo.*

Intuitivamente essa descrive quanto guadagna A se accade l'evento + e quanto perde se accade l'evento $-$. Piú precisamente:

(i) se accade l'evento $+$, A guadagna $G(+) =: G_+ \geq 0$

(ii) se accade l'evento $-$, A perde $G(-) =: -G_- \leq 0$

Per esempio, A deve pagare G_- per poter entrare in un piano d'investimenti e, se tale piano ha successo, il suo guadagno netto sará G_+, altrimenti perde il capitale investito.
Osservare che, per una funzione guadagno G l'insieme H dei valori é:

$$(G(+), G(-)) = (G_+, -G_-) \tag{2}$$

Poiché la funzione G, sullo spazio $\Omega = (\{+, -\}$, é univocamente definita mediante la (2) dai due numeri positivi (G_+, G_-), nel seguito spesso parleremo della *funzione guadagno* (G_+, G_-).

3.2 Schemi di rischio (dicotomico)

Definizione 2 *Uno* ***schema di rischio dicotomico*** *(nel seguito spesso diremo semplicemente un "rischio") per A é determinato da 3 numeri*

$$\{G_+, G_-, p\} \tag{3}$$

con le seguenti proprietá:

$$G_+ \geq 0$$

é la somma che A guadagna se l'evento $+$ si verifica

$$G_- > 0$$

é la somma che A perde se l'evento $-$ si verifica

$$p(+) := p \in [0, 1]$$

é la probabilitá che l'evento $+$ si verifichi.
Lo schema di rischio (3) $\{G_+, G_-, p\}$ viene detto: – standard se soddisfa le seguenti due condizioni:

$$G_+ > 0 \qquad ; \qquad G_- > 0 \tag{4}$$

– catastrofico (resp. non catastrofico) se

$$G_+ < G_- \qquad \textit{resp.} \quad G_+ \geq G_-$$

Osservazioni.
(i) Come si é giá visto, dato che per il tertium non datur almeno uno dei due eventi $\{+, -\}$ si verifica, la probabilitá che l'evento $-$ si verifichi é

$$p(-) = 1 - p \in [0, 1]$$

(ii) I modelli dicotomici del tipo: (A guadagna – A non guadagna) sono molto idealizzati e, in una analisi piú approfondita, vanno sostituiti con modelli *a scala*, in cui gli eventi possibili sono molti (virtualmente infiniti) e la funzione guadagno assume una molteplicitá (eventualmente infinita) di valori.
Nel seguito tuttavia ci occuperemo solo del caso dicotomico.

Definizione 3 *La quantitá*

$$r_A := (1-p)G_- \tag{5}$$

sará detta ***indice del rischio*** *dello schema* $\{G_+, G_-, p\}$.

Osservazione. In altre parole:
l'indice del rischio é la perdita pesata con la sua probabilitá.

3.3 Varie tipologie di rischio

Non in tutte le situazioni rischiose é possibile quantificare, i guadagni o le perdite, cioé definire i numeri G_+ e G_-. Tra le varie possibilitá che possono darsi distinguiamo quattro casi principali:
(i) sia G_- che G_+ sono certi
(ii) G_- é certo, G_+ é incerto
(iii) G_+ é certo, G_- é incerto
(iv) G_+ e G_- sono entrambi incerti.
Caso (i)
é tipico di molti giochi d'azzardo. Per esempio, puntando una certa somma alla roulette, non si sa se si vince, ma se si vince l'ammontare della vincita é univocamente determinato.
Caso (ii)
Un venture capitalist investe una somma G_- in una nuova azienda. In questo caso il massimo che egli puó perdere é G_-. In prima approssimazione si puó identificare il massimo della perdita con la perdita. Tuttavia quello che puó guadagnare é incerto poiché non sempre é possibile prevedere i guadagni di una nuova azienda.
Caso (iii)
Un esempio importante é quello delle commesse o degli appalti: un'azienda si aggiudica una commessa del valore di G_+, che é quello che prenderá. I costi che dovrá sostenere per realizzarlo cioé G_- sono peró aleatori.
Altro esempio del caso (iii): un avvocato, pagato a success fee, stabilisce che la sua parcella in caso di successo é G_+. Anche supposta nota p, la probabilitá di successo valutare G_- é difficile poiché quello che l'avvocato perde é il suo tempo, la sua competenza,...
Queste si possono parzialmente stimare (stima conservativa sulla base del valore attuale). Ma la stima, per esempio, del tempo libero investito é molto piú difficile.

Caso (iv)
Un industriale fonda una nuova impresa. Se non é lui stesso a porre una soglia superiore, G_- é incerto (si tratta di quello che alla fine avrá investito). Allo stesso modo é incerto G_+ (cioé quello che alla fine avrá guadagnato).

4 Rischi d'uso

Ci sono situazioni in cui é possibile valutare o stimare:
(i) la perdita G_-, in caso di evento $-$;
(ii) la probabilitá $(1-p)$ di tale evento
ma non é facile quantificare G_+ in caso di evento $+$, e in molti casi l'unica possibilitá ragionevole é quella di porre $G_+ = 0$.
In casi di questo genere si parla di **rischi d'uso**.

Esempio (1). Un esempio tipico é il furto di un'opera d'arte.
Riferendoci solo al valore economico e prescindendo da eventuali fattori emotivi, possiamo ritenere noto il valore di mercato V di un'opera d'arte.
Se A possiede l'opera e questa viene rubata, il danno economico subito da A é quindi

$$-G_- = -V$$

Se l'opera non viene rubata entro un certo periodo non é facile quantificare il guadagno economico proveniente ad A da questo evento (evento $+$).
La probabilitá che un'opera d'arte di un certo tipo venga rubata é stimabile mediante le statistiche relative a eventi del genere.

Esempio (2). Il furto di un'automobile.
Per un generico cittadino A, che per esempio non fa il trasportatore di professione, non é facile valutare quanto possesso di una automobile contribuisca al suo reddito.
Tuttavia se questa automobile viene rubata, la perdita G_- subita da A é facilmente quantificabile poiché corrisponde al valore dell'automobile all'istante del furto.
Una stima della probabilitá di furto di un'automobile, di un determinato tipo, é stimabile, una volta note le statisthce sui furti delle auto.

Esempio (3). Un discorso analogo si puó fare sostituendo al rischio del furto il rischio di causare un incidente.

Per costruire un modello matematico di tali rischi ragioniamo come segue. Prima del contratto se A non fa un incidente (evento $+$) allora non perde e non guadagna nulla:

$$G^0_A(+) = 0$$

Se A fa un incidente (evento $-$) allora perde G_-:

$$G^0_A(-) = -G_-$$

In tutti questi casi é ragionevole supporre che lo schema di rischio ad essi associato sia del tipo:

$$\{0, G_-, p\}$$

I rischi corrispondenti a questo schema saranno chiamati *rischi d'uso.*

4.1 Guadagno medio e guadagno atteso

Definizione 4 *Sia $\{G_+, G_-, p\}$ uno schema di rischio. La funzione guadagno ad esso associata é per definizione:*

$$G(+) = G_+ \qquad ; \qquad G(-) = -G_-$$

Il guadagno atteso di tale funzione, detto anche guadagno atteso del rischio é:

$$E(G) = E_P(G) = M(G) = \cdots = \langle G \rangle := G_+p - G_-(1-p)$$

In alcuni casi il valor medio di una grandezza non ha nulla di aleatorio cioé *valor medio* e *valore atteso* non sono la stessa cosa.
Esempio (1). **Verifica delle previsioni di guadagno.**
Una azienda produce un software che vende a diverse categorie di clienti con un guadagno diverso, dipendente dalla categoria.
Per esempio, se venduto a un singolo individuo, il software avrá un prezzo, se venduto a una banca o un ministero con una licenza d'uso per M utenti, il guadagno per utente sará tanto piú piccolo quanto piú M é grande.
Sia S l'insieme delle possibili categorie di utenti.
L'azienda ritiene che su un cliente della categoria $s \in S$ guadagnerá $G(s)$ e, sulla base di ricerche di mercato, ritiene che tra tutti i suoi clienti, una frazione p_s apparterrá alla categoria s.
Su questa base l'azienda prevede che il suo guadagno medio per cliente della categoria s sará

$$G(s)p_s$$

e quindi il suo guadagno medio per cliente sará

$$\sum_{s \in S} G(s) p_s = \langle G \rangle_{\text{prev}}$$

Alla fine dell'anno l'azienda ha raggiunto N clienti e

$$N = \sum_{s \in S} N_s$$

é la loro suddivisione per categorie.
Quindi il guadagno attuale medio per cliente sará:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} G_n = \frac{1}{N} \sum_{s \in S} \sum_{\text{categoria}} G_{s_j} = \sum_{s \in S} G(s) \frac{N_s}{N} = \langle G \rangle_{\text{att}}$$

Come si vede il valor medio si puó calcolare come media aritmetica su tutti i clienti oppure come media pesata per categoria. Il numero é lo stesso, ma il secondo metodo contiene piú informazione.

Esempio 1 Una fabbrica produce N stampanti. Se il pezzo non ha difetti, il produttore gudagna G_+, se il pezzo é difettoso, il produttore perde G_-. Entrambe le cifre sono intese al netto del costo.
Dopo la produzione totale, una frazione p_+ di stampanti risulta perfetta e una frazione p_- invece risulta difettosa. Denotiamo:
– N il numero di stampanti prodotte
– N_+ il numero di stampanti senza difetti
– N_- il numero di stampanti con difetti
Il guadagno totale del produttore é quindi

$$G_+ N_+ - G_- N_- = B$$

Il guadagno medio del produttore per ogni singola stampante (cioé il guadagno medio per unitá prodotta) é

$$\frac{B}{N} = G_+ \frac{N_+}{N} - G_- \frac{N_-}{N} = G_+ p_+ - G_- p_-$$

Quindi: il guadagno del produttore per unitá prodotta coincide con il valore atteso della variabile casuale

$$G \equiv \{(G_+, G_-), (p_+, p_-)\}$$

tuttavia nella situazione descritta tutto é perfettamente determinato e non vi é nulla di casuale.

Esempio (3).
Un'officina propone all'imprenditore dell'esempio precedente, di effettuare dei lavori sugli impianti di produzione, che diminuiranno i pezzi difettosi del 30% lasciando inalterata la capacitá produttiva.
Qual é il prezzo massimo che l'imprenditore puó pagare per tali lavori nell'ipotesi che nel prossimo esercizio l'imprenditore cambierá completamente l'impianto?
Risposta.
Dato che la capacitá produttiva é inalterata, il numero di unitá prodotte é ancora N.
Il numero di unitá difettose, dopo il rinnovo degli impianti, sará:

$$M_- = N_- - \frac{30}{100} N_- = \left(1 - \frac{3}{10}\right) N_- = (7/10)N_-$$

Dato che $M_+ + M_- = N$ e:
$N - M_- = M_+ =$ numero di unitá non difettose dopo il rinnovo,
si ha che

$$M_+ = N - M_- = N - \left(1 - \frac{3}{10}\right) N_- = N - \frac{7}{10} N_-$$

Quindi il guadagno dopo il rinnovo sará:

$$G_+M_+ - G_-M_- = G_+ \left(N - \frac{7}{10} N_-\right) - G_- \left(\frac{7}{10}\right) N_- =$$

$$= G_+ \left(N - N_- + \frac{3}{10} N_-\right) - G_-N_- + G_- \frac{3}{10} N_- = (G_+N_+ - G_-N_-) + (G_+ + G_-) \frac{3}{10} N_-$$

Dato che $G_+N_+ - G_-N_-$ é il guadagno prima del rinnovo, l'imprenditore con il rinnovo guadagnerebbe

$$(G_+ + G_-) \frac{3}{10} N_-$$

Pertanto questa é la massima cifra che l'imprenditore puó pagare per il rinnovo. (A questa conclusione si puó arrivare direttamente, senza fare conti: come?)
Esempio (4).
Come varia la risposta alla domanda sulla convenienza dell'investimento per

far diminuire del 30% i pezzi difettosi se contemporaneamente il nuovo impianto aumenta la produzione di pezzi sani del 5%?
Risposta.
In questo caso la capacitá produttiva cambia da N a $N + \frac{5}{100} N_+$ e si tratta solo di pezzi sani. Quindi il guadagno totale dopo il rinnovo sará quello vecchio aumentato di $G_+ \frac{1}{20} N_+$, cioé

$$(G_+ + G_-) \frac{3}{10} N_- + G_+ \frac{1}{20} N_+$$

Pertanto questa é la massima cifra che l'imprenditore puó pagare per il rinnovo. Questo si puó verificare anche facendo il conto direttamente.

Esempio (5).
Come varia la risposta alla domanda sulla convenienza dell'investimento per far diminuire del 30% i pezzi difettosi se contemporaneamente il nuovo impianto aumenta la produzione di pezzi (non necessariamente sani) del 5%?
Risposta.
Nuovo numero totale di stampanti prodotte:

$$M := N + \frac{5}{100} N = \left(1 + \frac{1}{20}\right) N = \frac{21}{20} N$$

Diminuire del 30 % il numero di pezzi difettosi ($N_- \to N_- - (30/100)N_-$) equivale a far diminuire del 30 % la frazione di pezzi difettosi

$$N_-/N \to N_-/N - (30/100)N_-/N = \frac{N_-}{N} \frac{7}{10}$$

Il nuovo numero di pezzi difettosi sará quindi dato dalla nuova frazione dei pezzi difettosi moltiplicata per nuovo numero totale, cioé:

$$\left(\frac{N_-}{N} \frac{7}{10}\right) \frac{21}{20} N = \frac{21}{20} \left(\frac{7}{10} N_-\right) = \frac{147}{200} N_- =: M_-$$

Il nuovo numero pezzi sani é

$$M_+ := \frac{21}{20} N - M_- = \frac{21}{20} N - \frac{147}{200} N_-$$

Di conseguenza il nuovo guadagno sará:

$$G_+ M_+ - G_- M_- = G_+ \left(\frac{21}{20} N - \frac{147}{200} N_-\right) - G_- \frac{147}{200} N_- =$$

$$= G_+\frac{21}{20}N- \quad N_-\frac{147}{200}(G_++G_-) = G_+\frac{210}{200}N_++N_-\left(\frac{210}{200}G_+ - \frac{147}{200}(G_+ + G_-)\right) =$$

$$= G_+\frac{210}{200}N_+ + N_-\left(\frac{63}{200}G_+ - \frac{147}{200}G_-\right) = G_+\frac{210N_+ \quad + 63N_-}{200} - G_-\frac{147N_-}{200}$$

Dato che il vecchio guadagno é

$$G_+N_+ - G_-N_-$$

la differenza sará

$$G_+\left(\frac{210N_+ + 63N_-}{200} - N_+\right)+G_-\left(N_- - \frac{147}{200}N_-\right) = G_+\left(\frac{10N_+ + 63N_-}{200}\right)+G_-\frac{63N_-}{200}$$

$$= G_+\frac{1}{20}N_++(G_++G_-)\frac{63}{200}N_- = G_+\frac{N_+}{20}+(G_++G_-)\frac{3}{10}N_-+(G_++G_-)\frac{3}{200}N_-$$

4.2 Varianza e rischio

Spesso si sceglie di misurare il rischio con la varianza.

$$\langle (G - \langle G\rangle)^2\rangle = \langle G^2\rangle - \langle G\rangle^2 =: \text{ Var } (G)$$

che é una quantitá quadratica in G, cioé, se si scala G secondo la legge

$$G \mapsto \lambda G$$

la varianza di G varia secondo la legge

$$\text{Var } (\lambda G) = \lambda^2 \text{ Var } (G)$$

Per evitare numeri grandi, spesso si sceglie di misurare il rischio con la dispersione, che é la radice quadrata della varianza:

$$F(G) := \sqrt{\text{Var } (G)} = \sqrt{\langle G^2\rangle - \langle G\rangle^2}$$

e che ha il vantaggio di trasformarsi con la prima potenza di λ:

$$D(\lambda G) = |\lambda| D(G)$$

Osservazione. La varianza

$$\langle G^2\rangle - \langle G\rangle^2 = \langle (G - \langle G\rangle)^2\rangle$$

non distingue tra:
– ricavi superiori alla media
– ricavi inferiori alla media
Il rischio reale é rappresentato solo dai ricavi inferiori alla media, cioé

$$(G - \langle G \rangle)_- = \begin{cases} G - \langle G \rangle & , \text{ se } G < \langle G \rangle \\ 0 \ , & \text{se } G \geq \langle G \rangle \end{cases}$$

Esercizio . Calcolare di varianza e dispersione dello schema d'investimenti descritto nell'Esempio (1).

5 Scommesse

5.1 Scommesse leali

Una **scommessa** tra A e B é un contratto con le seguenti regole. Dato un evento X, che puó accadere o non accadere, se X accade, B paga G_+ Euro ad A e, se X non accade, A paga G_- Euro a B.
Denotiamo $+$ l'evento che X accade e $-$ quello che non accade. Allora, denotando $G_A, G_B : \{+, -\} \to \mathbb{R}$ le funzioni guadagno rispettivamente di A e di B, si ha che:

$$G_A(+) = G_+ \qquad ; \qquad G_A(-) = -G_- \tag{6}$$

$$G_B(+) = -G_+ \qquad ; \qquad G_B(-) = G_- \tag{7}$$

e quindi

$$G_A = -G_B \tag{8}$$

Osservazione.
La (8) é equivalente alla condizione

$$G_A + G_B = 0$$

Nella teoria dei giochi, questa proprietá si esprime dicendo che *una scommessa é un gioco a somma zero*.Ció significa che quello che A guadagna é esattemente quello che B perde e viceversa.
Da quanto detto finora possiamo astrarre la seguente definizione di scommessa.

Definizione 5 *Una* ***scommessa*** *di A con B é determinata dallo schema di rischio (v. Definizione (2))*

$$\{G_+, G_-, p\}$$

dove p é la probabilitá che B paghi G_+ ad A e $1-p$ é la probabilitá che A paghi G_- a B.

$$Pr(G_A = G_+) = p \; ; \qquad Pr(G_A = -G_-) = 1 - p$$

La scommessa é detta ***leale in media*** *(ovvero* ***un gioco d'azzardo****) se il guadagno atteso di A é uguale al guadagno atteso di B:*

$$\langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle \tag{9}$$

Teorema 1 La scommessa $\{G_+, G_-, p\}$ é leale in media se e solo se una delle seguenti condizioni equivalenti é soddisfatta:

$$\langle G_A \rangle \geq 0 \qquad ; \qquad \langle G_B \rangle \geq 0 \tag{10}$$

$$\langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle = 0 \tag{11}$$

$$p = \frac{G_-}{G_+ + G_-} = \frac{1}{1 + G_+/G_-} \tag{12}$$

$$\frac{G_+}{G_-} = \frac{1}{p} - 1 \tag{13}$$

$$(\frac{1}{p} - 1)\frac{G_-}{G_+} = 1 \tag{14}$$

$$G_+ p = G_-(1-p) \tag{15}$$

Dimostrazione. Tenuto conto della (8), dire che il guadagno atteso di A é uguale a quello di B significa dire che:

$$\langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle = \langle -G_A \rangle = -\langle G_A \rangle$$

e ció equivale a dire che

$$\langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle = 0$$

che é la (11). Poiché $G_B = -G_A$ anche i guadagni attesi sono opposti, quindi la (10) puó valere se e solo se vale la (11). Il guadagno atteso di A é:

$$\langle G_A \rangle = G_+ p - G_-(1-p) \tag{16}$$

quindi (11) equivale a (15). La (16) equivale anche a

$$0 = G_+p - G_-(1-p) \Leftrightarrow G_+p = G_-(1-p) \Leftrightarrow \frac{G_+}{G_-} = \frac{1}{p} - 1$$

che é la (13). Infine

$$G_+p = G_-(1-p) \Leftrightarrow (G_+ + G_-)p = G_- \Leftrightarrow p = \frac{1}{1 + G_+/G_-}$$

che é la (12).

Osservazione . La formula (12), o una delle sue versioni equivalenti (13), (14), (15), sará detta **la formula fondamentale delle scommesse leali in media**.
Notare che tutte le formule fondamentali delle scommesse leali in media non dipendono separatamente da G_+ e G_-, ma solo dal quoziente G_+/G_-, ció implica che tali formule sono invarianti per dilatazione, cioé per la trasformazione

$$G_\pm \to \lambda G_\pm \ ; \quad \lambda > 0 \iff G \to \lambda G \tag{17}$$

5.2 Posta di una scommessa

Definizione 6 *Se $p \in [0,1]$ é la probabilitá di un evento. Si dice che la sua **posta** é di $\frac{1}{p} - 1$ a uno.*

Osservazione. La condizione (13), di scommessa leale in media equivale a:

$$\frac{G_+}{G_-} = \frac{1}{p} - 1 \tag{18}$$

cioé al fatto che: **il quoziente G_+/G_- é uguale alla posta della scommessa**.
Esempio 1 Se $p = \frac{1}{2}$ la posta é $2 - 1 = 1$ a 1
Esempio 2 Se $p = \frac{1}{6}$ la posta é $6 - 1 = 5$ a 1

Come si vede dalla (18) la posta di un evento rappresenta il rapporto tra guadagno e perdite in una scommessa leale.
Riassumendo: se conosco la probabilitá di un evento, la sua posta é il quoziente delle somme che A e B devono scommettere affinché la scommessa

risulti leale in media.
Viceversa, fissato il quoziente G_+/G_-, per ottenere una scommessa leale in media, occorre definire una probabilitá in modo tale che la relazione (18) sia soddisfatta.

Esempio 2 Estrazioni casuali con re–imbussolamento (variante del gioco del Lotto): si estrae a caso un numero su 90 poi, dopo aver letto il risultato, si re–imbussola la pallina estratta. Siano
– $p = 1/90$ la probabilitá di un numero (gioco leale)
– $p(i, j) = 2/90^2 = 1/4050$ probabilitá di un ambo (coppia di numeri non ordinata). Il fattore 2 é dovuto al fatto che un ambo corrisponde alle 2 coppie ordinate (i, j) e (j, i).
Supponiamo che giocare un ambo costi 1 Euro: $G_- = 1\ E$
Se il gioco fosse leale la vincita, G_+ dovrebbe soddisfare l'equazione :

$$\frac{1}{4050} = \frac{1}{1 + G_+} \Leftrightarrow 1 + G_+ = 4050 \tag{19}$$

Quindi la vincita dovrebbe essere:

$$G_+ = 4051E \tag{20}$$

Esercizio. Come varia la conclusione dell'esempio precedente se l'estrazione avviene senza re–imbussolamento?

Esercizio. Supponiamo che un biglietto di lotteria costi 1 Euro e che il premio sia di 700.000 Euro. Supponiamo che siano stati venduti 2 Milioni di biglietti e che l'estrazione tra essi sia con probabilitá uniforme. Quanto dovrebbe essere la vincita se il gioco fosse leale?

5.3 Rischio di puro azzardo

Ispirati dal risultato sulle scommesse leali, introduciamo la seguente definizione.

Definizione 7 Un rischio $\{G_+, G_-, p\}$ é detto *di puro azzardo* se il guadagno atteso ad esso associato é nullo:

$$\langle G \rangle = 0 \tag{21}$$

Osservazione. Un esempio tipico é l'acquisto di un biglietto di una lotteria ideale.
Ci si potrebbe chiedere: *se il guadagno atteso di A é nullo o addirittura negativo, perché mai A dovrebbe investire nel gioco?*
La risposta sta nel fatto che, in condizioni normali, nel gioco d'azzardo G_- (investimento per entrare nel gioco) é piccola mentre G_+ é grande.
Anche se p é molto piccola, e quindi A sa che quasi certamente perderá G_-, il beneficio di vincere G_+ é talmente grande che A é disponibile ad accettare un guadagno atteso negativo (ma sperabilmente piccolo) attratta dal miraggio di entrare nella zona di probabilitá piccola e di vincere. La logica é:
Se perdo per me non cambia nulla. Se vinco, la mia vita cambia radicalmente.

5.4 Scommesse multiple: Lotterie senza costi

Le regole del gioco sono:
– Si pagano c Euro per partecipare al gioco.
– Dopo il pagamento si riceve un numero progressivo.
– I biglietti si vendono dal tempo 0 al tempo T.
– Se, al tempo T, N persone hanno acquistato il biglietto, al tempo $T+1$ si estrae a caso uno dei numeri assegnati e il possessore del numero estratto riceve Nc Euro.
In questo caso per ogni partecipante il rischio $\{G_+, G_-, p\}$ é dato da:

$$p = \frac{1}{N}$$

$$G_- = c$$

$$G_+ = Nc - c = (N-1)c$$

Il suo guadagno atteso é

$$pG_+ - (1-p)G_- = \frac{1}{N}(N-1)c - (1 - \frac{1}{N})c = 0$$

5.5 Lotterie con costi

Le regole sono come prima, ma il vincitore non riceve Nc, ma $(N-M)c$. Cioé una parte dei ricavi, pari a Mc, serve a coprire i costi di organizzazione. In questo caso p e G_- sono come prima, mentre

$$G_+ = (N-M-1)c$$

Il guadagno atteso di un partecipante é

$$\langle G\rangle = pG_+ - (1-p)G_- = \frac{1}{N}(N-1-M)c - (1-\frac{1}{N})c = -\frac{M}{N}c < 0$$

Quindi: in una lotteria con costi, anche se l'organizzatore rinuncia completamente al proprio guadagno il guadagno atteso del singolo partecipante é negativo.
Tuttavia la gente continua a giocare alla lotteria **se il costo del biglietto é sufficientemente piccolo**.

5.6 Scommesse asimmetriche

La diffeerenza tra scommesse simmetriche e scommesse asimmetriche sta nel fatto che, nelle scommesse simmetriche non c'é investimento iniziale mentre nelle scommesse simmetriche c'é. In questo senso le scommesse asimmetriche sono piú simili agli investimenti.

Definizione 8 Dato un evento X, che puó accadere o non accadere, per **scommessa asimmetrica** (o con allibratore) su X tra il giocatore A e il banco B si intende un rischio $\{G_+, G_-, p\}$ con le seguenti regole.
– A paga a B G_- Euro per entrare nel gioco;
– se X accade, B paga $(G_- + G_+)$ Euro ad A;
– se X non accade, B si trattiene i G_- Euro ricevuti da A.

Osservazione. La scommessa asimmetrica $\{G_+, G_-, p\}$ equivale alla scommessa simmetrica $\{G_+, G_-, p\}$ nel senso che sia lo spazio di probabilitá, sia le funzioni guadagno di A e di B coincidono nei due casi. L'unica differenza é che, nella scommessa asimmetrica, si considera il ricavo totale di A in caso di vincita, cioé $G_+ + G_-$, mentre in quella simmetrica, si considera solo il guadagno netto.

Le funzioni guadagno di A e di B sono date rispettivamente da

$$G_A(+) = G_+ \ ; \qquad G_A(-) = -G_-$$

$$G_B(+) = -G_+ \ ; \qquad G_B(-) = G_-$$

Esempio Caso della Roulette Supponendo che la roulette non sia truccata (gioco leale), la probabilitá che un giocatore A vinca puntando sul rosso é

$$p_A = \frac{18}{37}$$

La probabilitá che il banco B vinca se A punta sul rosso é

$$p_B = P(\text{nero}) + P(0) = \frac{18}{37} + \frac{1}{37} = \frac{19}{37}$$

Il guadagno atteso di A é

$$p_A G_A(+) + (1 - p_A) G_A(-) = \langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle = p_B G_B(+) + (1 - p_B) G_B(-)$$

$$\iff \frac{18}{37} G_+ - (1 - \frac{18}{37}) G_- = \frac{19}{37} G_- - (1 - \frac{19}{37}) G_+$$

$$\iff 18G_+ - (37-18)G_- = 19G_- - (37-19)G_+ \iff 18G_+ - 19G_- = 19G_- - 18G_+$$

La condizione di lealtá in media, che garantisce uguali guadagni attesi ad A e a B, in questo caso diventa:

$$19G_- = 18G_+ \iff G_+ = \frac{19}{18} G_- \iff G_+ \sim 1,055 G_-$$

Ricordando che il giocatore riceve $G_- + G_+$, si vede che, in condizioni di lealtá in media, un giocatore che puntasse sul rosso dovrebbe ricevere

$$G_- + G_+ + \sim 1,055 G_- + G_- = 2,055 G_-$$

Ma nella roulette reale un giocatore che vince puntando sul rosso riceve solo 2 volte la posta puntata e non $2,055$. Ció garantisce al banco un guadagno di 55 millesimi su ogni vincita.
Per esempio, su 1000 vincite di 10 Euro il guadagno é

$$\frac{55}{10^3} 10^4 = 550 \text{ Euro}$$

Similmente, la probabilitá che un giocatore A vinca puntando su un singolo numero, diciamo 1 é

$$p_A = \frac{1}{37}$$

e, in questo caso, la probabilitá che vinca il banco B é

$$p_B = P(\neq 1) + P(0) = \frac{36}{37}$$

Quindi la condizione di lealtá in media é:

$$p_A G_A(+) + (1 - p_A) G_A(-) = \langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle = p_B G_B(+) + (1 - p_B) G_B(-)$$

$$\iff \frac{1}{37}G_+ - \frac{36}{37}G_- = \frac{36}{37}G_- - \frac{1}{37}G_+ \iff \frac{2}{37}G_+ = 2\frac{36}{37}G_-$$
$$\iff G_+ = 36G_-$$

Ricordando che ció che il giocatore riceve é $G_- + G_+$, ció significa che, in condizioni di lealtá in media, un giocatore che puntasse su un singolo numero dovrebbe ricevere 37 volte la posta puntata e non solo 36 volte. Ció garantisce al banco un guadagno di una puntata su ogni vincita.
Per esempio, su 1000 vincite, tutte con puntate di 10 Euro, il guadagno é

$$10 \times 10^3 = 10.000 \text{ Euro}$$

5.7 Scommesse e tasso d'interesse

Nella scommessa asimmetrica se si verifica l'evento X, A ricava

$$G_- + G_+ = G_- \left(1 + \frac{G_+}{G_-}\right) =: G_-(1 + \tau)$$

Cioé: chi scommette una somma G_- e vince, riceve la somma $(1 + \tau)G_-$. In altre parole, se X si verifica, A ottiene quello che avrebbe ottenuto se avesse investito la somma G_- al tasso d'interesse G_+/G_-.
Per questo motivo il quoziente G_+/G_- sará chiamato *il tasso d'interesse della scommessa*.
La condizione di scommessa leale in media richiede che:

$$\frac{G_+}{G_-} = \frac{1}{p_X} - 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{G_+}{G_-} = 1 + \tau = \frac{1}{p_X}$$

e quindi si puó esprimere dicendo che, **equiparando una scommessa leale ad un investimento finanziario, il fattore di capitalizzazione (cioé 1 + tasso d'interesse) dev'essere uguale all'inverso della probabilitá leale**. Equivalentemente, ricordando la definizione di posta, il tasso d'interesse dev'essere uguale alla posta:

$$\tau = \frac{1}{p_X} - 1$$

Osservazione. Notare che il tasso d'interesse della scommessa puó dipendere da G_- solo nel caso in cui la stessa probabilitá p_X, che garantisce il gioco leale in media, dipenda da G_-.

Se p_X non dipende da G_-, allora la condizione di gioco leale in media implica che B deve remunerare qualunque somma scommessa con lo stesso tasso d'interesse.
Il caso in cui p_X dipenda da G_- si puó incontrare in alcuni contesti economici. Per esempio, se p_X é la probabilitá di successo di un'impresa e G_- é l'investimento iniziale, allora é plausibile supporre che p_X dipenda da G_-. Infatti se, per esempio, gli investimenti sono insufficienti, allora la probabilitá di successo diminuisce.
Nel seguito esamineremo alcune di queste possibili dipendenze.

6 Schemi di rischio associati ad investimenti

Definizione 9 Un investimento (con 2 possibili esiti) é definito da 4 numeri positivi

$$\{I, R_-, R_+, p\} \tag{22}$$

interpretati come segue:
I = capitale investito
R_- = ricavo dalle vendite se accade l'evento $-$
R_+ = ricavo dalle vendite se accade l'evento $+$
p = probabilitá di ricavare R_+.
Per definizione "evento positivo" $(+)$ é un evento in cui non si perde, ció corrisponde alla condizione

$$R_+ \geq I$$

Per motivi analoghi

$$R_- < I$$

L'investimento (22) é detto:
- **oculato** se

$$0 \leq R_- < I < R_+ \tag{23}$$

- **rischioso** se

$$R_- < 0 < I < R_+ \tag{24}$$

non finanziabile se $R_+ < I$.

Osservazione. In un investimento oculato l'investitore puó perdere al piú ció che ha investito. Un caso tipico é l'investimento in azioni.

In un investimento rischioso la perdita puó essere maggiore del capitale investito. Per esempio, se affonda una nave (o fallisce una azienda) l'armatore (o l'imprenditore) non solo perde il capitale investito in essa, ma deve anche risarcire le vittime (o rimborsare le merci perdute).
Osservazione. In modelli meno schematici il ricavo R. in generale é una variabile casuale a piú valori. I due simboli R_+, R_- vanno piú correttamente interpretati come: ricavo medio in caso di successo o, rispettivamente, di insuccesso.

Lemma 1 L'investimento $\{I, R_-, R_+, p\}$ equivale al rischio

$$\{G_+ := R_+ - I, G_- = I - R_-, p\}$$

In particolare il rischio associato é non catastrofico se e solo se:

$$I < \frac{1}{2}(R_+ + R_-)$$

Dimostrazione Supponiamo che A faccia l'investimento $\{I, R_+, R_-, p\}$. Allora, se A fattura R_+ (risp. R_-), il suo guadagno relativo netto sará

$$G_+ = R_+ - I \qquad ; \qquad \text{risp. } -G_- = -(I - R_-)$$

La condizione di non catastrofe é:

$$G_+ > G_- \Leftrightarrow R_+ - I > I - R_- \Leftrightarrow R_+ + R_- > 2I$$

6.1 Arbitraggio e misure neutre al rischio

Definizione 10 (v. [Pliska97], sezione 1.2, pag. 9). Una opportunitá di arbitraggio é un rischio $\{\Omega, G, P\}$ che soddisfa le due condizioni:

$$G \geq 0 \quad ; \qquad \langle G \rangle > 0$$

In altre parole A non perde nulla qualunque cosa accada e fa un guadagno strettamente positivo G_+ con probabilitá strettamente positiva.
Ricordare che nella definizione di schema di rischio si é supposto che G_- risulti sempre > 0.
Esempio. Sia $\Omega = (+, -)$ con misura di probabilitá $(p, 1-p)$. Allora, secondo le nostre notazioni, i valori di G sono $(G_+, -G_-)$ e quindi una opportunitá di arbitraggio si puó presentare se e solo se:

$$G_- = 0 \ ; \quad G_+ > 0 \ ; \quad p > 0$$

Definizione 11 Dato un rischio $\{(\Omega, P), G\}$ ogni misura di probabilitá P^* equivalente a P e con la proprietá che

$$0 = \langle G \rangle^* = P^*(G) = \int G dP^* = \sum_{\omega \in \Omega} G(\omega) P^*(\omega) \tag{25}$$

é detta neutra al rischio.
Equivalentemente: una misura neutra al rischio é una misura di probabilitá equivalente a quella iniziale, per la quale il rischio diventa un gioco d'azzardo

Osservazione. La condizione che P sia equivalente a P^* esclude le soluzioni banali. Senza di essa sarebbe banale, nella maggioranza dei casi, costruire esempi di misure neutre al rischio.

Teorema 2 Dato il rischio $\{G_+, G_-, p\}$ con $p > 0$. Una misura neutra al rischio esiste se e solo se $G_- \neq 0$. In questo caso é unica ed é data da

$$(p^*, 1 - p^*) = \left(\frac{1}{1 + G_+/G_-}, \frac{1}{1 + G_-/G_+} \right) \tag{26}$$

Dimostrazione. La forma della misura neutra al rischio é data dalla (12) che equivale alla (26).
Osservazione. La (26) significa che, in un gioco d'azzardo, se il guadagno potenziale G_+ é molto maggiore della perdita potenziale G_-, la probabilitá leale é quasi nulla. Se invece la perdita potenziale G_- é molto maggiore del guadagno potenziale G_+ , la probabilitá si avvicina ad 1.
In questo senso l'investitore accorto dovrebbe ricercare situazioni lontane dal gioco d'azzardo, cioé evitare le condizioni in cui la misura di probabilitá associata all'investimento é neutra al rischio.

6.2 Differenze tra investimenti e giochi d'azzardo

Si é visto che il rischio associato ad un investimento puó essere equiparato a quello associato ad una scommessa, e quindi a un gioco, in cui A rappresenta l'investitore e B il mercato.
D'altra parte un investimento differisce da un gioco di puro azzardo per il fatto che uno non lo fa se non si aspetta di guadagnarci qualcosa, cioé se almeno la sua attesa di guadagno non é superiore a una certa soglia (strettamente positiva) stabilita dall'investitore stesso.

Ció suggerisce di prendere come definizione della differenza fra un gioco d'azzardo e un investimento il fatto che il mentre primo dovrebbe soddisfare la condizione di lealtá in media mentre il secondo si desidererebbe un guadagno atteso strettamente positivo.

Proposizione 1 La condizione di gioco leale in media, in un investimento, equivale al fatto che il ricavo atteso dell'investimento risulti pari alla somma investita.

Dimostrazione. La condizione é

$$\langle G \rangle = 0 \Leftrightarrow p = \frac{G_-}{G_+ + G_-}$$

che, in questo caso, dato che $G_- = I - R_-$ e $G_+ + G_- = R_+ - R_-$, equivale a:

$$p = \frac{I - R_-}{R_+ - R_-} \qquad ; \qquad 1 - p = \frac{R_+ - I}{R_+ - R_-}$$

e quindi a:

$$\langle R \rangle = R_+ p + R_-(1-p) = R_+ \frac{I - R_-}{R_+ - R_-} + R_- \frac{R_+ - I}{R_+ - R_-} =$$

$$= \frac{R_+ I - R_+ R_-}{R_+ - R_-} + \frac{R_- R_+ - R_- I}{R_+ - R_-} = \frac{(R_+ - R_-)I}{R_+ - R_-} = I$$

6.3 Dilemma dell'avversione al rischio e limiti dei criteri basati solo sul guadagno atteso

Il guadagno atteso é un numero ben definito una volta assegnato lo schema di rischio. Tuttavia, anche supponendo che tutti e tre i numeri che definiscono lo schema di rischio siano esattamente valutati, il suo significato puó essere fortemente soggettivo.
Ció é illustrato dal seguente problema.
Problema. *Quale sceglieresti tra le due seguenti alternative?*
(I) Se scegli I ricevi x Euro.
(II) Se scegli II tiri un dado e, se esce un numero minore o uguale di 2, non ricevete niente; altrimenti ricevi $10x$ E.
Nel primo caso hai un guadagno sicuro di x euro.

Nel secondo non guadagni niente con probabilitá $2/6 = 1/3$ oppure guadagni $10x$ E con probabilitá $4/6 = 2/3$, corrispondente ad un guadagno atteso di

$$0 \cdot \frac{2}{6} + 10x \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{3}x \geq 6,6x$$

In casi come questo molti esiterebbero a sostituire un guadagno certo con uno incerto, anche se molto maggiore.
Nei contratti assicurativi si realizza la situazione inversa, cioé l'idea dell'assicurazione é che:
(i) A é disposta ad accettare una perdita certa per eliminare, o almeno attenuare, il rischio di una perdita incerta ma piú grande di quella certa.
(ii) B é disposto, in cambio di un guadagno certo, ad accettare una perdita incerta ma piú grande del suo guadagno.
Osservare che questa situazione rientra nella definizione di arbitraggio.
Tuttavia essa é realistica e si presenta nei quiz televisivi dove un concorrente deve decidere se continuare, correndo il rischio di perdere ció che ha guadagnato, oppure rinunciare all'opportunitá di aumentare, anche notevolmente, ció che ha vinto fino a quel momento incassando tale somma.
Osservare che il precedente esempio puó essere facilmente modificato sostituendo la alternativa (1) con una in cui si guadagna 1 E con probabilitá molto vicina ad 1 e nulla con probabilitá molto vicina allo zero. In questo caso la scelta per il decisore é ancora piú difficile.

6.4 Indice di rischio percentuale e guadagno atteso positivo

Lemma 2 Sia $\{G_+, G_-, p\}$ un rischio per A. Allora vale l'uguaglianza:

$$\langle G \rangle = pG_+(1 - \rho) \tag{27}$$

cioé: *il guadagno atteso é uguale al guadagno virtuale pesato con il prodotto della sua probabilitá per* $1 - \rho$.
In particolare le seguenti relazioni sono equivalenti:

$$\langle G \rangle \geq 0 \qquad \text{(il guadagno atteso di } A \text{ é positivo)} \tag{28}$$

$$\rho_A = \left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{G_-}{G_+} \leq 1 \tag{29}$$

$$\frac{G_+}{G_-} \geq \frac{1}{p} - 1 \tag{30}$$

$$p \geq \frac{1}{1 + G_+/G_-} \tag{31}$$

Dimostrazione. La (27) segue da:

$$\langle G \rangle = pG_+ - (1-p)G_- = pG_+ \left[1 - \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-}{G_+}\right] = pG_+(1-\rho)$$

Data la (27), la mutua equivalenza di (28), (29), (30), é evidente. Infine (28) equivale a (31) poiché

$$\frac{p}{1-p} \geq \frac{G_-}{G_+} \Leftrightarrow 1 - \frac{G_-}{G_+}\left(\frac{1-p}{p}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-p)G_-}{pG_+} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \geq \frac{G_-/G_+}{1 + G_-/G_+} = \frac{1}{1 + G_+/G_-}$$

Definizione 12 Il quoziente

$$\rho_A := \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-}{G_+} = \frac{(1-p)G_-}{pG_+} \tag{32}$$

sará detto **indice di rischio percentuale** per A. Il prodotto

$$r_A := (1-p)G_- \tag{33}$$

sará detto **indice di rischio** per A. Notare che esso non dipende da G_+.

Esercizio . Nelle notazioni della sezione 5.5, supponiamo che
$N = 2.000.000$; $M = 500.000$; $c = 1$ Euro
e che le estrazioni vengano fatte come descritto all'inizio di questa sezione. Calcolare l'indice di rischio percentuale sia per il concorrente che per l'organizzatore.
Risposta:

$$1 + \frac{1}{\frac{N-1}{M} - 1} \qquad ; \qquad \frac{M}{c}\left(1 + \frac{1}{\frac{N-1}{M} - 1}\right)$$

Lemma 3 In una scommessa tra A e B, associata al rischio $\{G_+, G_-, p\}$, per A, l'indice di rischio percentuale di B é l'inverso dell'indice di rischio percentuale per A.

Dimostrazione. Abbiamo visto che, in una scommessa simmetrica

$$G_B(+) = -G_+ \qquad ; \qquad G_B(-) = G_- \qquad ; \qquad p(-) = 1 - p$$

Ció significa che il rischio per B é

$$\{G_-, G_+, 1 - p\}$$

cioé: scambiare i ruoli di A e B equivale a scambiare tra loro G_+ e G_-, p e $(1 - p)$. L'indice di rischio percentuale per B sará quindi

$$\left(\frac{1}{1-p} - 1\right)\frac{G_+}{G_-} = \frac{p}{1-p}\frac{G_+}{G_-} = \left[\left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{G_-}{G_+}\right]^{-1} = \frac{1}{\rho}$$

Con queste notazioni il Teorema (1) si puó riformulare come segue.

Corollario 1 La scommessa $\{G_+, G_-, p\}$ é leale in media se e solo se l'indice di rischio per A é uguale all'indice di rischio percentuale per B. In questo caso l'indice di rischio di A é uguale all'indice di rischio di B

Dimostrazione. Si é visto che l'indice di rischio percentuale per B é:

$$\rho_B = \frac{1}{\rho_A} \iff r_A = r_B \tag{34}$$

quindi, per il Lemma 3 l'uguaglianza puó aver luogo se e solo se $\rho_B = \rho_A = 1$, cioé se la scommessa é leale.
La seconda affermazione segue da:

$$r_A = (1 - p)G_- \qquad ; \qquad r_B = pG_+$$

Quindi

$$r_A = r_B \iff (1 - p)G_- = pG_+ \iff \left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{G_-}{G_+} = 1$$

Osservazione. Dalla (32) segue che l'indice di rischio percentuale é una funzione decrescente della probabilitá di successo p. Il valore minimo, cioé

$$\rho = 0$$

corrisponde quindi alla probabilitá massima, cioé

$$p = 1$$

Inoltre ρ cresce linearmente in funzione della perdita potenziale G_- e decresce come l'nverso del guadagno potenziale G_+.
Osservazione
Il fatto che l'indice di rischio percentuale dipenda solo dal rapporto G_-/G_+ suggerisce che, preso isolatamente, tale indice dia una informazione molto limitata.
Per esempio intuitivamente, a paritá di probabilitá, un rischio in cui A guadagna 1 ME o ne perde 2, é *piú rischioso* di uno in cui A guadagna 1 E o ne perde 2. Tuttavia l'indice di rischio percentuale é lo stesso nei due casi.
L'indice di rischio non presenta questo inconveniente.

Problema 1 Nelle notazioni della sezione (6.4) a paritá di G_+ e G_-, quali condizioni devono essere poste sulla probabilitá p se si pone una soglia $\alpha > 0$, di guadagno atteso, al di sotto della quale A non entra nel gioco?

Soluzione. Se si vuole che

$$\alpha \leq E(G) = pG_+ - (1-p)G_- = p(G_+ + G_-) - G_- \tag{35}$$

allora si deve scegliere

$$p \geq \frac{\alpha + G_-}{G_- + G_+} \tag{36}$$

e l'uguaglianza vale in (35) se e solo se essa vale in (36).

Osservazione 1 A causa della possibilitá di perdite, il guadagno atteso é sempre minore o uguale del guadagno G_+. Infatti

$$E(G) = pG_+ - (1-p)G_- \leq pG_+ < G_+$$

é quindi ragionevole esprimere la soglia α nella forma

$$\alpha = qG_+$$

dove q é un numero tra 0 e 1:

$$q \in (0,1]$$

e la (36) diventa:

$$p \geq \frac{\alpha + G_-}{G_- + G_+} = \frac{qG_+ + G_-}{G_- + G_+} = \frac{q + \frac{G_-}{G_+}}{1 + \frac{G_-}{G_+}} \tag{37}$$

Osservare che la (37) puó anche essere scritta nella forma

$$1 + \frac{G_-}{G_+} \geq \frac{p}{q} + \frac{1}{p}\frac{G_-}{G_+} \iff 1 \geq \frac{p}{q} + \left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{G_-}{G_+}$$

$$\iff 1 \geq \frac{p}{q} + \rho \tag{38}$$

In entrambe le forme si vede che la soluzione é invariante per la trasformazione (17) (cioé per dilatazione).

Problema 2 Che condizione deve soddisfare la probabilitá di successo p se $G_+ = 3G_-$ e l'investitore vuole che il suo guadagno atteso sia $\geq$ della metá del guadagno in caso di successo, come dev'essere la probabilitá?

Soluzione. Sostituendo $q = 1/2$ e $G_-/G_+ = 1/3$ nella disuguaglianza (36) si trova

$$p \geq \frac{q + \frac{G_-}{G_+}}{1 + \frac{G_-}{G_+}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{5}{6}\frac{3}{4} = \frac{5}{8} \sim 0,625$$

cioé la probabilitá di successo dev'essere superiore al $62,5\%$.

Esercizio. Mostrare che l'investimento $\{I, R_+, R_-, p\}$ ha guadagno atteso $\geq \alpha$ se e solo se

$$p \geq \frac{\alpha + I - R_-}{R_+ - R_-} \tag{39}$$

6.5 L'indice di rischio percentuale di un investimento

Proposizione 2 L'indice di rischio percentuale di un investimento é uguale a

$$\rho = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{I - R_-}{R_+ - I}$$

Se l'investimento é finanziabile, l'indice di rischio percentuale é ≤ 1 (cioé il guadagno atteso é positivo) se e solo se il valore atteso del ricavo é maggiore dell'investimento.

Dimostrazione. L'indice di rischio percentuale di un investimento é

$$\left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-}{G_+} = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{I - R_-}{R_+ - I}$$

Se l'investimento é finanziabile $R_+ - I > 0$ e la condizione di guadagno atteso positivo diventa

$$\left(\frac{1}{p} - 1\right)(I - R_-) \leq R_+ - I \Leftrightarrow \left(\frac{1}{p} - 1\right) I + I = \frac{1}{p} I \leq R_+ + \left(\frac{1}{p} - 1\right) R_- \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I \leq pR_+ + (1-p)R_- = \langle R \rangle$$

che é la tesi.

6.6 Sensibilitá del guadagno atteso alla probabilitá

Vogliamo studiare come varia il guadagno atteso al variare della probabilitá di sucesso, diciamo, da p a $p + \varepsilon$. Dev'essere

$$0 < p + \varepsilon < 1 \Leftrightarrow \varepsilon < 1 - p \quad ; \quad p > -\varepsilon$$

Sotto queste condizioni si ha:

$$\langle G \rangle_{p+\varepsilon} = G_+(p + \varepsilon) - (1 - p - \varepsilon)G_- = \langle G \rangle_p + \varepsilon(G_+ + G_-)$$

Facciamo l'ipotesi di rischi di tipo investimento cioé

$$p > 1/2 \Leftrightarrow 1 - p < 1/2$$

Caso (1): $\varepsilon > 0$ (la probabilitá di successo cresce). Quindi

$$\varepsilon \in [0, 1-p) \subseteq [0, 1/2)$$

Esempio 3

$$\varepsilon = \frac{3}{1000} \quad ; \quad G_+ = 10ME \quad ; \quad G_- = 90ME$$
$$\Delta\langle G\rangle_p = \frac{3}{1000}\cdot 100 = \frac{3}{10} \sim 0,3ME$$

Se
$$0 \leq \langle G\rangle_p = 10p - (1-p)90 = 100p - 90 \Leftrightarrow p \geq 90/100$$

Supponiamo che sia
$$p = 91/100$$

Allora
$$\langle G\rangle_p = 10\cdot\frac{91}{100} - 90\frac{9}{100} = \frac{10}{10} = 1ME$$

Riassumendo:
Un errore di $+3/1000$ nella probabilitá conduce a una stima di guadagno atteso piú di 4 volte superiore a quella iniziale.
Caso (2) $\varepsilon < 0$, cioé $\varepsilon \in (-p, 0)$.

Esempio 4

Se, con i dati dell'Esempio (3), si sceglie :

$$\varepsilon = -\frac{3}{1000}$$

allora questa variazione nella previsione della probabilitá porta il guadagno atteso, da una previsione iniziale di

$$\langle G\rangle_p = 1ME$$

alla previsione
$$\langle G\rangle_{p+\varepsilon} \sim 700.000E$$

che é inferiore di circa il 30%.

In particolare:
Se la perdita potenziale é molto piú grande del guadagno potenziale, una minima variazione nelle probabilitá induce considerevoli fluttuazioni nel guadagno atteso.

Problema 3 A propone a B un investimento che, se va male, costerá a B una perdita netta pari a:

$$G_- = 100.000\ E$$

tuttavia la probabilitá che l'investimento vada bene é

$$p = 90\%$$

se voi foste B quale sarebbe il minimo G_+ (guadagno netto dell'investimento) per il quale accettereste di investire?

Soluzione. In mancanza di altre informazioni io applicherei il criterio del guadagno atteso positivo. Dato che il guadagno atteso é

$$\langle G \rangle = pG_+ - (1-p)G_-$$

La condizione di guadagno atteso positivo equivale a:

$$\langle G \rangle > 0 \Leftrightarrow pG_+ > (1-p)G_- \Leftrightarrow G_+ > \left(\frac{1}{p} - 1\right) G_-$$

Nel nostro caso:

$$\frac{1}{p} - 1 = \left(\frac{90}{100}\right)^{-1} - 1 = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$$

Quindi il guadagno minimo deve soddisfare la condizione:

$$G_+ > \frac{1}{9} \cdot 10^5 = \frac{100.000}{9} \sim 11.111$$

6.7 * Paragone tra guadagni attesi

Proposizione 3 Il guadagno atteso é una funzione strettamente crescente della probabilitá di successo p.

Dimostrazione. Si ha

$$\langle G \rangle = p(G_+ + G_-) - G_-$$

quindi

$$\frac{d}{dp}\langle G \rangle = G_+ + G_- > 0$$

Osservazione Dalla proposizione (3) segue che, a paritá di guadagni, cioé se

$$G_+ = G'_+ \qquad ; \qquad G_- = G'_-$$

allora paragonare i guadagni attesi equivale a paragonare le probabilitá, cioé le seguenti affermazioni si equivalgono:

$$\langle G \rangle > \langle G' \rangle$$

$$p > p'$$

Teorema 3 Dati due rischi

$$\{G_+, G_-, p\} \ ; \quad \{G'_+, G'_-, p'\}$$

e detti ρ, ρ' i rispettivi indici di rischio percentuale, se $G_+, G'_+ \neq 0, \rho, \rho' \neq 1, p, p' \neq 0$, allora risulta:

$$\frac{\langle G \rangle}{\langle G' \rangle} = \frac{pG_+(1-\rho)}{p'G'_+(1-\rho')} \tag{40}$$

Dimostrazione. La tesi segue dalla (27).

Definizione 13 La quantitá a membro sinistro di (40) é detta **indice di rischio percentuale relativo**.

6.8 * Paragone dei guadagni attesi di due rischi con uguale probabilitá

Il seguente teorema é utile per paragonare il guadagno atteso di due rischi con uguale probabilitá. Per esempio quelli relativi a un portafoglio prima o dopo aver sottoscritto una opzione su di esso.

Teorema 4 Dati due rischi con uguale probabilitá

$$\{G_+, G_-, p\} \ ; \quad \{G'_+, G'_-, p\}$$

e supponendo che risulti $G_+ > G'_+$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

$$\langle G \rangle > \langle G' \rangle \tag{41}$$

$$\left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_- - G'_-}{G_+ - G'_+} < 1 \tag{42}$$

Dimostrazione.

$$\langle G\rangle > \langle G'\rangle \Leftrightarrow G_+p-(1-p)G_- > G'_+p-(1-p)G'_- \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(G_+-G'_+) > (1-p)(G_--G'_-) \Leftrightarrow G_+-G'_+ > \left(\frac{1}{p}-1\right)(G_--G'_-)$$

Se $G_+ > G'_+$, ció equivale a:

$$\left(\frac{1}{p}-1\right)\frac{G_--G'_-}{G_+-G'_+} < 1$$

Lemma 4 *Nelle ipotesi del Teorema (4), se inoltre $G'_- < G_-$, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

$$\langle G\rangle < \langle G'\rangle$$

$$\frac{1-G'_+/G_+}{1-G'_-/G_-} > \rho$$

Dimostrazione

$$\langle G\rangle < \langle G'\rangle \Leftrightarrow \left(\frac{1}{p}-1\right)\frac{G'_--G_-}{G'_+-G_+} < 1 \Leftrightarrow \tag{43}$$

$$\Leftrightarrow \frac{G'_--G_-}{G'_+-G_+} < \left(\frac{1}{p}-1\right)^{-1} \Leftrightarrow \frac{G_-}{G_+}\frac{G'_-/G_--1}{G'_+/G_+-1} < \left(\frac{1}{p}-1\right)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{G'_-/G_--1}{G'_+/G_+-1} = \frac{1-G'_-/G_-}{1-G'_+/G_+} < \left[\left(\frac{1}{p}-1\right)\frac{G_-}{G_+}\right]^{-1} = \frac{1}{\rho} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho < \frac{1-G'_+/G_+}{1-G'_-/G_-}$$

6.9 * Paragone tra gli indici di rischio percentuale di due rischi con uguale probabilitá

Siano

$$\{G_+, G_-, p\} \quad ; \quad \{G'_+, G'_-, p\}$$

due rischi con uguale probabilitá. A puó accettare che il suo guadagno atteso dopo il contratto sia inferiore a quello prima del contratto qualora anche il suo indice di rischio percentuale risulti minore. In questo modo A compensesebbe la diminuzione del guadagno atteso con una corrispondente riduzione del rischio.

Lemma 5 Le seguenti condizioni sono equivalenti:

$$\frac{G'_-}{G_-} < \frac{G'_+}{G_+} \tag{44}$$

$$\rho' < \rho$$

Dimostrazione. Si ha

$$\rho' < \rho \Leftrightarrow \left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{G'_-}{G'_+} < \left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{G_-}{G_+} \Leftrightarrow \frac{G'_-}{G'_+} < \frac{G_-}{G_+} \Leftrightarrow \frac{G'_-}{G_-} < \frac{G'_+}{G_+} \tag{45}$$

Perció, la condizione che l'indice di rischio percentuale di A dopo il contratto sia minore di quello prima del contratto equivale alla (44).

6.10 * Relazioni tra guadagno atteso e indice di rischio percentuale

La (27) mostra che $\langle G\rangle$ (risp. ρ) si esprime come funzione di pG_+ e di ρ (risp. $\langle G\rangle$).
Ci si puó chiedere se questa dipendenza sia o no monotona, cioé se ad un aumento del guadagno atteso corrisponda una diminuzione dell'indice di rischio percentuale o viceversa.
La risposta a ciascuna di queste domande é negativa. Infatti i due rischi

$$\{G_+, G_-, p\} \ ; \quad \{\lambda G_+, \lambda G_-, p\}$$

hanno lo stesso indice di rischio percentuale per ogni $\lambda > 0$. Quindi, se per esempio fosse vero che

$$\rho' \leq \rho \Rightarrow \langle G\rangle \leq \langle G'\rangle$$

allora, lo stesso varrebbe per l'uguaglianza e quindi per ogni $\lambda > 0$, dovrebbe risultare

$$\langle G\rangle \leq \langle G'\rangle = \langle \lambda G\rangle = \lambda\langle G\rangle$$

il che é possibile solo se $\langle G\rangle = \langle G'\rangle = 0$.
Esercizio 1. Paragonare i seguenti due rischi

$$p = 90\%$$

$$G_+ = 20 \qquad ; \qquad G_- = 100$$

$$G'_+ = 15 \qquad ; \qquad G'_- = 69$$

Calcolando l'indice di rischio percentuale relativo si trova:

$$\left(\frac{100}{90} - 1\right) \frac{100 - 69}{20 - 15} = \frac{1}{9} \cdot \frac{31}{5} = \frac{31}{45} < 1$$

Quindi

$$\langle G \rangle > \langle G' \rangle$$

Facendo il calcolo direttamente si trova la stessa conclusione

$$\langle G \rangle = \frac{9}{10}20 - \frac{1}{10}100 = 18 - 10 = 8$$

$$\langle G' \rangle = \frac{9}{10}15 - \frac{1}{10}69 = \frac{135 - 69}{10} = \frac{66}{10} = 6,6$$

$$\langle G \rangle - \langle G' \rangle = 1,4$$

Esercizio.
Cosa accade nell'esercizio precedente se, a paritá degli altri dati, $p' = 85\%$?
Risposta Se

$$p' = 85\% = \frac{85}{100}$$

allora:

$$\langle G \rangle = \frac{85}{100}20 - \frac{15}{100}100 = \frac{85}{5} - 15 = 17 - 15 = 2$$

$$\langle G' \rangle = \frac{85}{100}15 - \frac{15}{100}69 = \frac{85}{20}3 - \frac{3}{20}69$$

$$\frac{255 - 207}{20} = \frac{48}{20} = 2,4$$

Cioé $\langle G' \rangle > \langle G \rangle$. Quindi una diminuzione del 5% nella probabilitá puó condurre alla conclusione opposta.

6.11 * Rischi catastrofici: posizione del problema

Si parla di *rischio catastrofico* quando un evento (catastrofe) con probabilitá piccola, denotata nel seguito $1-p$, comporta, per un soggetto A, una perdita grande.
Il problema nasce tipicamente nel contesto dei premi assicurativi. Un'assicurazione si riferisce a una situazione in un certo senso speculare a quella di

una lotteria: nella lotteria la perdita (G_-) é piccola ma molto probabile, cioé la sua probabilitá $1 - p$ é molto vicina a 1; nell'assicurazione, $1 - p$ é molto vicina a 0 ma G_- é grande. Denotiamo:
– G_+ il guadagno in assenza di catastrofe
– G_- la perdita se la catastrofe si verifica
– $1 - p$ la probabilitá della catastrofe.
In altri termini, quando si parla di *rischi catastrofici* si pensa a una situazione in cui:

$$1 - p \ll p \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ll p \qquad ; \qquad G_- >> G_+ \tag{46}$$

Per evitare casi banali (guadagno o perdita sicura) supporremo

$$0 < p < 1$$

6.12 Tipologie di contratti economici

Intuitivamente un *contratto economico* (nel seguito semplicemente *contratto*) tra A e B é un accordo su come ripartire i costi, i guadagni e le perdite di un investimento economico, che in generale saranno aleatori.
I parametri che caratterizzano un tale contratto sono quindi i guadagni e le perdite potenziali, che definiscono le rispettive funzioni guadagno, e i costi, rappresentati dal capitale investito.

Definizione 14 Un **contratto** tra A e B relativo al rischio

$$\{G_+, G_-, p\} \tag{47}$$

é definito da 6 quantitá:

$$\{\Omega, P, G_A, G_B, C_A, C_B\} \tag{48}$$

dove:

– Ω é un insieme, detto *spazio delle possibilitiá, o degli eventi.*

– P é una misura di probabilitá su Ω

– $G_A, G_B : (\Omega, p) \to \mathbb{R}$ sono variabili casuali dette rispettivamente **funzione guadagno di** A e di B.

– $C_A, C_B : (\Omega, p) \to \mathbb{R}$ sono variabili casuali dette rispettivamente **capitale investito (o costi) da** A e da B.

Osservazione. Le funzioni guadagno di A e di B dipendono da G_+, G_-, C_A, C_B, dalle caratteristiche specifiche del contratto (assicurazione, opzione, ...) e devono soddisfare alcune condizioni di *coerenza economica*, in assenza delle quali non sarebbe economicamente razionale, per almeno uno dei due potenziali contraenti, sottoscrivere il contratto. Tali condizioni saranno discusse caso per caso.

Intuitivamente si vorrebbe che un contratto fosse *leale*, nel senso di non privilegiare alcuno dei due contraenti. Un criterio universale di *lealtá* di un contratto che, dato uno schema di rischio $\{G_+, G_-, p\}$ e i costi C_A, C_B permetta di determinare univocamente le funzioni guadagno di A e di B,non esiste. Quello che si puó fare é concordare alcuni criteri generali che definiscano tali funzioni a meno di alcuni parametri e definire precisamente gli insiemi di variabilitá di tali parametri. La determinazione di tali parametri dipenderá da ulteriori criteri, che non possono essere universali, ma dipenderanno da ulteriori condizioni, specifiche dei singoli contratti. Per la scelta dei criteri generali esistono moltissime possibilitá, alcune delle quali sono le seguenti.

Definizione 15 Un contratto tra A e B é detto:
– **equo in media** se il guadagno atteso per unitá di capitale investito é uguale per entrambi:

$$\langle\frac{G_A}{C_A}\rangle = \langle\frac{G_B}{C_B}\rangle \tag{49}$$

– **ragionevole in media** se il guadagno atteso é positivo per entrambi:

$$\langle G_A\rangle \geq 0 \qquad ; \qquad \langle G_B\rangle \geq 0 \tag{50}$$

– **equo in rischio** se l'indice di rischio per unitá di capitale investito é uguale per entrambi:

$$\frac{r_A}{C_A} = \frac{r_B}{C_B} \tag{51}$$

– **equo in rischio percentuale** se l'indice di rischio percentuale per unitá di capitale investito é uguale per entrambi:

$$\frac{\rho_A}{C_A} = \frac{\rho_B}{C_B} \tag{52}$$

Osservazione. In molti casi i capitali investiti C_A, C_B non sono aleatori. In tali circostanze la condizione di equitá in media di un contratto si puó esprimere mediante l'identitá

$$\frac{\langle G_A \rangle}{\langle G_B \rangle} = \frac{C_A}{C_B} \Leftrightarrow \frac{\langle G_A \rangle}{C_A} = \frac{\langle G_B \rangle}{C_B}$$

che esprime l'uguaglianza dei rapporti tra guadagni attesi e capitali investiti.

7 Contratti assicurativi

Intuitivamente, si parla di un **contratto assicurativo** relativo al rischio $\{G_+, G_-, p\}$

$$\{G_+, G_-, p\} \tag{53}$$

al quale corrisponde la funzione guadagno

$$G(+) = G_+ \qquad ; \qquad G(-) = -G_- \tag{54}$$

se A é disposta a corrispondere a B una somma, detta premio, al fine di diminuire l'entitá di una eventuale perdita, mentre B, in cambio del premio, é disposto a coprire una parte della perdita di A.
Il problema che intendiamo affrontare nel seguito di queste lezioni é la determinazione di un insieme di criteri mediante i quali quantificare tale somma. A tal fine introduciamo le seguenti notazioni.
– *Il premio totale* P_a di un contratto é ció che A é disposta a pagare per l'assicurazione. Se

$$G_+ > 0$$

allora si puó introdurre il *premio* p_a, espresso come frazione del guadagno di A che definisce il premio attraverso la identitá:

$$P_a := p_a G_+$$

– f_a *fattore rischio residuo o franchigia*, cioé la frazione di perdita che A é disposta a sopportare.
Per semplificare l'esposizione supporremo che:
(i) l'assicurazione resti valida per una unitá di tempo, per esempio un anno,
(ii) tutti i pagamenti avvengano alla fine di questa unitá di tempo.

Se si conviene di considerare equivalenti:
(i) la somma S versata all'inizio dell'unitá di tempo
(ii) la somma $(1+\tau)S$ versata alla fine dell'unitá di tempo, dove τ é il tasso d'interesse in quella unitá
allora questo schema equivale a quello piú consueto, in cui l'assicurazione viene pagata in anticipo, nel senso che lo schema consueto é ottenuto da questo dividendo il premio P_a per $1+\tau$, cioé:

$$P_a^{(\text{consueto})} = \frac{p_a}{1+\tau}$$

7.1 Schema matematico del contratto di assicurazione

Definizione 16 Un **contratto assicurativo** tra A (assicurato) e B (assicuratore), relativo al rischio $\{G_+, G_-, p\}$, é un contratto

$$\{\{+,-\}, p, G_A, G_B, C_A, C_B\} \tag{55}$$

nel senso della Definizione (14), caratterizzato dalle funzioni guadagno

$$G_A(+) = G_+ - P_a \quad ; \quad G_A(-) = -(f_a G_- + P_a) = -G_-(f_a + P_a/G_-) \tag{56}$$

$$G_B(+) = P_a - C_B \quad ; \quad G_B(-) = -(1-f_a)G_- + P_a - C_B \tag{57}$$

dove:
– $P_a \in \mathbb{R}_+^*$ é il premio totale,
– $f_a \in [0,1)$ é la franchigia,
– $C_A \in \mathbb{R}_+^*$ ($C_B \in \mathbb{R}_+^*$) é il capitale investito A (B)

Osservazione. Quando non ci sono possibilitá di confusione, il riferimento al rischio iniziale e ai costi é implicito e si parla di **contratto assicurativo** $(f_a G_-, P_a)$ di A con B oppure (f_a, p_a) nel caso in cui $G_+ > 0$.
Osservazione. Un contratto $(f_a G_-, P_a)$ cambia la funzione guadagno di A da (54) a (56) e introduce per B la funzione guadagno (57). Conseguentemente lo schema di rischio per A cambia da (53) in

$$\{G_+ - P_a, f_a G_- + P_a, p\} \tag{58}$$

e per B viene introdotto il seguente schema di rischio:

$$\{P_a - C_B, (1-f_a)G_- + C_B - P_a, p\} \tag{59}$$

7.2 Il Teorema della conservazione del guadagno

Teorema 5 In un contratto assicurativo riguardante il rischio $\{G_+, G_-, p\}$ la somma delle funzioni di guadagno di A e di B é uguale alla funzione guadagno iniziale meno i costi di B:

$$G_A + G_B = G - C_B \cdot 1 \tag{60}$$

In particolare la somma degli indici di rischio di A e di B é costante ed uguale all'indice del rischio iniziale meno l'indice di rischio relativo ai costi di B. Ovvero, denotando

$$r = (1-p)G_- \tag{61}$$

$$r_A = (1-p)(f_a G_- + P_a) \tag{62}$$

$$r_B = (1-p)((1-f_a)G_- - P_a + C_B) \tag{63}$$

gli indici del rischio iniziale e di quelli per A e per B dopo il contratto, risulta:

$$r_A + r_B = r + C_B(1-p) \tag{64}$$

Dimostrazione. Da (54), (56) e (57), la somma delle funzioni guadagno di G_A e di G_B é data da:

$$G_A(+) + G_B(+) = G_+ - P_a + P_a - C_B = G_+ - C_B$$

$$G_A(-) + G_B(-) = -(f_a G_- + P_a) - (1-f_a)G_- + P_a - C_B = -G_- - C_B \tag{65}$$

e ció é equivalente a (60). Cambiando il segno di entrambi i membri di (65) e moltiplicandoli per $1-p$, si trova

$$r_A + r_B = (1-p)(f_a G_- + P_a) + (1-p)((1-f_a)G_- - P_a + C_B) = r + C_B(1-p)$$

che é (64).
Osservazione Dal Teorema (60) segue che nessun contratto assicurativo puó distruggere un rischio, cioé condurre a una situazione in cui sia l'assicurato che l'assicuratore abbiano la certezza non perdere, cioé $G_A, G_B \geq 0$ (arbitraggio positivo sia per A che per B). Infatti la (60) implica che $G_A + G_B < G$. Quindi, dato che G assume un valore strettamente negativo, non puó essere somma di 2 funzioni positive.

Dato che Teorema (60) segue che un contratto assicurativo non puó distruggere un rischio, ma solo suddividerlo, é naturale chiedersi:

quali criteri utilizzare per effettuare la distribuzione tra perdite e guadagni virtuali?
Soltanto una volta fissati tali criteri potremo rispondere a problemi piú precisi come, per esempio:
(i) *fissato un premio, come distribuire il rischio fra l'assicuratore ed assicurato (franchigia)*?
(ii) *fissata una distribuzione del rischio fra l'assicuratore e l'assicurato (franchigia), quale premio dovrebbe corrispondere ad essa*?

7.3 Il guadagno atteso dell'assicurato (A)

Osservazione. In un qualsiasi contratto assicurativo, il guadagno virtuale di A diminuisce strettamente sempre, tuttavia il guadagno atteso di A puó aumentare.

Lemma 6 In un contratto assicurativo il guadagno atteso di A dopo il contratto é:

$$\langle G_A \rangle = \langle G \rangle - (P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p)) \tag{66}$$

In particolare, le seguenti condizioni sono equivalenti:

$$\langle G_A \rangle \geq \langle G \rangle \text{ (il guadagno atteso di } A \text{ cresce)} \tag{67}$$

$$P_a \leq (1 - f_a)G_-(1 - p) \tag{68}$$

e, se $P_a = p_a G_+$, la (68) equivale a

$$p_a \leq (1 - f_a)p\rho \tag{69}$$

Dimostrazione. Il guadagno atteso di A prima del contratto é:

$$\langle G \rangle = G_+ p - G_-(1 - p)$$

Quello dopo il contratto é:

$$\langle G_A \rangle = (G_+ - P_a)p - (f_a G_- + P_a)(1 - p) = G_+ p - f_a G_-(1 - p) - P_a$$

$$= G_+ p - G_-(1 - p) - P_a + (1 - f_a)G_-(1 - p) = \langle G \rangle + (1 - f_a)G_-(1 - p) - P_a$$

$$= \langle G \rangle - (P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p))$$

Questo é $\geq \langle G \rangle$

$$\iff P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p) \leq 0 \iff P_a \leq (1 - f_a)G_-(1 - p)$$

che é la (68). Se $P_a = p_a G_+$ la (68) diventa

$$p_a G_+ \leq (1-f_a)G_-(1-p) \iff p_a \leq (1-f_a)p\frac{G_-}{G_+}(\frac{1}{p}-1) = (1-f_a)p\rho$$

che é la (69).

7.4 Il guadagno atteso dell'assicuratore (B)

Ricordando la (66), cioé

$$\langle G_A \rangle = \langle G \rangle - (P_a - (1-f_a)G_-(1-p)) \tag{70}$$

e applicando il teorema di conservazione del guadagno si trova che

$$\langle G_B \rangle = \langle G \rangle - \langle G_A \rangle - C_B = (P_a - (1-f_a)G_-(1-p)) - C_B \tag{71}$$

Pertanto il guadagno atteso dell'assicuratore é positivo se e solo se

$$P_a - C_B - (1-f_a)G_-(1-p) \geq 0$$
$$\iff P_a \geq C_B + (1-f_a)G_-(1-p) \tag{72}$$

Osservazione. Paragonando la (72) con la (68), si vede che esse possono valere simultaneamente se e solo se

$$P_a \leq (1-f_a)G_-(1-p) \quad ; \quad P_a \geq C_B + (1-f_a)G_-(1-p)$$
$$\iff C_B + (1-f_a)G_-(1-p) \leq P_a \leq (1-f_a)G_-(1-p)$$
$$\iff C_B + (1-f_a)G_-(1-p) \leq (1-f_a)G_-(1-p)$$
$$\iff C_B \leq 0$$

Poiché $C_B > 0$, segue che le due uguaglianze non possono valere simultaneamente. In altri termini: il guadagno atteso di A puó aumentare se e solo se quello di B diventa negativo.
Ció rispecchia la competizione di interessi tra assicurato e assicuratore.
D'altra parte é giusto che l'assicuratore, essendo un investitore e non un giocatore d'azzardo, richieda da un qualsiasi contratto che almeno il suo guadagno atteso sia strettamente positivo (v. la discussione nella sezione 6.2). Quindi, salvo casi eccezionali:
il guadagno atteso dell'assicurato in un contratto assicurativo diminuisce sempre.

7.5 Condizioni di coerenza economica

Per motivi di coerenza economica si deve avere:

$$0 < P_a \qquad ; \qquad 0 \leq f_a < 1 \tag{73}$$

Infatti B non accetterebbe un contratto in assenza di premio ($P_a = 0$) e A non accetterebbe un contratto in assenza di copertura ($f_a = 1$).
D'altra parte contratti con $f_a = 0$ sono comuni e chiamati **privi di franchigia** ovvero con **copertura totale**.
Il paragone tra i rischi (53) e (58), (59) chiarisce il significato economico del contratto (f_a, p_a): A paga a B il premio P_a. In compenso la perdita potenziale di A, da G_- diventa $f_aG_- + P_a$, di cui la quota p_aG_+ é una perdita sicura e la quota f_aG_- é una perdita aleatoria con la stessa probabilitá della perdita iniziale.
In cambio del premio B assume il rischio di perdere $(1 - f_a)G_- + C_B - P_a$, cioé la differenza tra quello che ha percepito da A come premio e la copertura $(1 - f_a)G_-$ garantita ad A piú i costi di gestione.
Questa interpretazione implica che la coppia ordinata (f_aG_-, P_a) non puó essere un qualsiasi elemento di $[0, 1) \times (0, +\infty)$ ma, oltre alla (73), deve soddisfare la **condizione di coerenza economica** suggerita dal seguente teorema.

Teorema 6 La condizione

$$P_a < (1 - f_a)G_- \ \Leftrightarrow\ P_a + f_aG_- < G_- \ \Leftrightarrow\ f_a + P_a/G_- < 1 \tag{74}$$

equivale al fatto che la perdita potenziale (o equivalentemente l'indice di rischio) di A diminuisca dopo il contratto.
Supposta valida la condizione necessaria (74), la condizione

$$P_a > C_B \tag{75}$$

equivale al fatto che la funzione guadagno di B non sia identicamente negativa.

Dimostrazione. Dato che la perdita potenziale per A dopo il contratto é $f_aG_- + P_a$, segue che essa diminuisce se e solo se vale la (74). Dato che l'indice di rischio di A dopo il contratto é $(1 - p)(f_aG_- + P_a)$ segue che (74)

equivale alla sua diminuzione.
Se vale la (74), allora $1 - (f_a + P_a/G_-) > 0$ quindi, dato che $C_B > 0$, si ha

$$G_B(-) = -G_-[1 - (f_a + P_a/G_-)] - C_B < 0 \tag{76}$$

D'altra parte

$$G_B(+) = P_a - C_B > 0 \iff P_a > C_B$$

e ció prova l'asserto.

Osservazione Le condizioni di coerenza (74) e (75) implicano che

$$C_B < P_a < G_- \tag{77}$$

Osservazione. Dal Teorema (6) segue che:
– la coerenza economica della funzione guadagno G_A equivale alla validitá della (74). Infatti, dato che in un contratto assicurativo il guadagno diminuisce, se non diminuisce anche la perdita, allora non c'é ragione di fare il contratto.
– Se vale (74), la validitá della (75) é chiaramente necessaria per la coerenza economica della funzione guadagno G_B. Essa é anche sufficiente per la (76).

Osservazione. Notare che C_A non entra nel contratto assicurativo. Ció é dovuto al fatto che di esso si é tenuto conto nel calcolo del rischio iniziale. Infatti G_+ é il guadagno netto di A. Per B non si puó fare una cosa simile, poiché B non ha rischio iniziale.
Nel seguito si suporrá che

$$C_A > C_B \tag{78}$$

7.6 Condizioni di lealtá in contratti assicurativi

Nella sezione 7.4 si é visto che, in qualsiasi contratto assicurativo, i guadagni attesi dell'assicurato e dell'assicuratore sono rispettivamente

$$\langle G_A \rangle = \langle G \rangle - (P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p)) \tag{79}$$

$$\langle G_B \rangle = (P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p)) - C_B \tag{80}$$

Inoltre, dalla (72) sappiamo che il rischio per B dopo il contratto é di tipo investimento, se e solo se

$$P_a > C_B + (1 - f_a)G_-(1 - p) \iff P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p) > C_B \tag{81}$$

La combinazione di queste due condizioni suggerisce che un possibile criterio, per la definizione di un **contratto leale**, consista nel minimizzare la perdita di guadagno atteso per A, compatibilmente con la salvaguardia degli interessi di B, cioé del fatto che il suo rischio sia di tipo investimento. Si tratta quindi di massimizzare il membro destro di (80) nelle variabili (f_a, P_a), che definiscono i possibili contratti, rispettando il vincolo che il massimo si trovi nel semi–piano, del piano (f_a, P_a), definito dalla disequazione (81).

Tuttavia, se si richiede che il contratto (f_a, P_a) soddisfi la (81), allora la (80) implica la disuguaglianza:

$$\langle G_A \rangle < \langle G \rangle - C_B \tag{82}$$

che implica che il massimo del membro destro di (80) nelle variabili (f_a, P_a) é raggiunto sul bordo del semi–piano definito dalla disequazione (81), cioé la retta, nel piano (f_a, P_a), definita rimpiazzando la disuguaglianza stretta in (81) con una uguaglianza.

Ció implica che una massimizzazione in senso stretto non é possibile.
Una possibile via d'uscita é quella di introdurre dei *massimi approssimati* definiti introducendo un parametro $\varepsilon > 0$ e considerando quei contratti (f_a, P_a) che soddisfano la condizione

$$P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p) = C_B + \varepsilon \quad \text{con} \quad \varepsilon > 0 \tag{83}$$

La scelta $\varepsilon > 0$ garantisce che il rischio dell'assicuratore non si riduca ad un gioco d'azzardo, ma sia di tipo investimento. Tenere ε *piccolo* vá nella direzione di limitare la perdita di guadagno atteso di A con il contratto.
Il valore preciso di ε puó essere deciso dall'assicuratore, in regime di concorrenza oppure dal governo (come accade nei giochi d'azzardo).
Una volta fissato il valore di ε, uno dei due parametri del contratto (f_a, P_a) si deduce dall'altro mediante la (83).
Con questa scelta, i guadagni attesi di A e B sono rispettivamente

$$\langle G_A \rangle = \langle G \rangle - C_B - \varepsilon \tag{84}$$

$$\langle G_B \rangle = P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p) - C_B = \varepsilon \tag{85}$$

definizione di contratto

Definizione 17 Dato $\varepsilon > 0$, il contratto $(f_a G_-, P_a)$ é detto ε*–leale in media*, se soddisfa la condizione (83), i.e.

$$P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p) = C_B + \varepsilon \tag{86}$$

Teorema 7 Dato un premio $P_a \in \mathbb{R}_+$, un contratto ε–leale in media (f_a, P_a) esiste se e solo se

$$P_a \in \left(\frac{C_B + \varepsilon}{p} \ , \ G_-(1 - p) + C_B + \varepsilon \right] \tag{87}$$

e l'intervallo in (87) é non vuoto se e solo se

$$G_- p > C_B + \varepsilon \tag{88}$$

In questo caso f_a é univocamente determinata dalla relazione

$$f_a = 1 - \frac{P_a - (C_B + \varepsilon)}{G_-(1 - p)} \tag{89}$$

Dimostrazione
Dato $P_a \in \mathbb{R}_+$, da (86) si deduce che, se un contratto ε–leale in media (f_a, P_a) esiste, la corrispondente franchigia é univocamente determinata dalla condizione

$$P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p) = C_B + \varepsilon \iff$$

$$\iff f_a G_-(1-p) = G_-(1-p) + C_B - P_a + \varepsilon \iff f_a = 1 + \frac{C_B - P_a + \varepsilon}{G_-(1 - p)} \tag{90}$$

che é la (89). La coppia (f_a, P_a) definisce un contratto se e solo se sono soddisfatte le condizioni di coerenza economica. Data (90), la condizione $f_a \geq 0$ equivale a

$$G_-(1 - p) + C_B - P_a + \varepsilon \geq 0 \iff G_-(1 - p) + C_B + \varepsilon \geq P_a \tag{91}$$

Dalla (90) segue che la condizione di coerenza economica (74) diventa

$$f_a + P_a/G_- < 1 \iff 1 + \frac{C_B - P_a + \varepsilon}{G_-(1 - p)} + P_a/G_- < 1$$

$$\iff 1 + \frac{C_B - P_a + \varepsilon}{G_-(1 - p)} < 1 - P_a/G_- \iff -\frac{P_a - C_B - \varepsilon}{G_-(1 - p)} < -P_a/G_-$$

$$\iff P_a - C_B - \varepsilon > P_a(1-p) \iff -C_B - \varepsilon > -pP_a \iff C_B + \varepsilon < pP_a$$
$$\iff \frac{C_B+\varepsilon}{p} < P_a \tag{92}$$
Combinando (91) e (92) si ottiene (87).
Le disuguaglianze (91) e (92) sono compatibili se e solo se
$$G_-(1-p) + C_B + \varepsilon > \frac{C_B+\varepsilon}{p} \iff G_-(1-p)p + pC_B + p\varepsilon > C_B + \varepsilon$$
$$\iff G_-(1-p)p > (1-p)C_B + (1-p)\varepsilon \iff G_-p > C_B + \varepsilon$$
che é la (88).

Teorema 8 Data una franchigia $f_a \in [0,1)$, un contratto ε–leale in media (f_a, P_a) esiste se e solo se
$$f_a \in \left[0, 1 - \frac{C_B+\varepsilon}{G_-p}\right] \tag{93}$$
e l'intervallo in (87) é non vuoto se e solo se vale la la (88), i.e.
$$G_-p > C_B + \varepsilon \tag{94}$$
In questo caso P_a é univocamente determinato dalla relazione
$$P_a = C_B + \varepsilon + (1-f_a)G_-(1-p) \tag{95}$$
Dimostrazione
Data $f_a \in [0,1)$, la condizione di ε–lealtá in media (86), cioé
$$P_a - (1-f_a)G_-(1-p) = C_B + \varepsilon$$
definisce univocamente P_a mediante la (95). La coppia (f_a, P_a) definisce un contratto se e solo se sono soddisfatte le condizioni di coerenza economica. Data (95), le condizioni $P_a > 0$ e $P_a > C_B$ sono automaticamente soddisfatte. La condizione di coerenza economica (74) diventa
$$P_a < (1-f_a)G_- \iff C_B + \varepsilon + (1-f_a)G_-(1-p) < (1-f_a)G_-$$
$$\iff C_B + \varepsilon < (1-f_a)G_-p \iff \frac{C_B+\varepsilon}{G_-p} < 1 - f_a$$
$$\iff f_a < 1 - \frac{C_B+\varepsilon}{G_-p}$$
che puó essere soddisfatta se e solo se vale la (94) e, in questo caso, equivale alla (93).

8 Assicurazioni di rischi d'uso

Problema
Dato un rischio d'uso $\{0, G_-, p\}$ quand'é che un contratto assicurativo relativo a tale rischio puó essere considerato accettabile?

Definizione 18 Un contratto relativo al rischio d'uso $\{0, G_-, p\}$ (se nessuna confusione é possibile diremo semplicemente *un contratto d'uso*) é definito dalla coppia ordinata $(f_a G_-, P_a)$ dove:
– f_a é un numero, detto franchigia, tale che

$$0 \leq f_a < 1$$

– P_a é un numero, detto premio.

Il prodotto $f_a G_-$ é la parte di perdita non coperta dall'assicurazione.
Il numero P_a é la somma pagata dall'assicurato all'assicuratore.

8.1 La funzione guadagno dell'assicurato (A) in un rischio d'uso

Prima del contratto la funzione guadagno di A é:

$$G_A(+) = 0 \qquad ; \qquad G_A(-) = -G_- \tag{96}$$

e il suo guadagno atteso é:

$$\langle G \rangle = -(1-p)G_- \tag{97}$$

Dopo il contratto, se P_a é il premio che A paga all'assicuratore in cambio di una protezione pari a $G_- - f_a G_-$ (cioé a una franchigia pari a $f_a G_-$), allora la funzione guadagno di A diventa

$$G_A(+) = -P_a \qquad ; \qquad G_A(-) = -(P_a + f_a G_-) \tag{98}$$

mentre la funzione guadagno di B continua ad essere data dalla (57), cioé

$$G_B(+) = P_a - C_B \quad ; \quad G_B(-) = -(1-f_a)G_- + P_a - C_B \tag{99}$$

Dato che G_A é negativa, a fortiori tale sará il suo valore atteso:

$$\langle G_A \rangle = -P_a p - (P_a + f_a G_-)(1-p) = -P_a - f_a G_-(1-p) \tag{100}$$

mentre il guadagno atteso di B continua ad essere dato dalla (71), cioé

$$\langle G_B \rangle = \langle G \rangle - \langle G_A \rangle - C_B = (P_a - (1 - f_a)G_-(1-p)) - C_B \tag{101}$$

Esempio.
In caso di furto della tua automobile, che ti provocherebbe la perdita G_- con probabilitá $1 - p$, due assicurazioni propongono contratti (P_a, f_a), (P'_a, f'_a). Come imposteresti la scelta sulla base del criterio del valore medio?
Soluzione. Supponiamo che risulti $P'_a > P_a$. Allora, se fosse $f'_a \geq f_a$, non ci sarebbero dubbi sul fatto che (P_a, f_a) é il migliore tra i due contratti. Se $P'_a > P_a$ e $f'_a < f_a$, il criterio del valore medio suggerisce di scegliere (P_a, f_a) se e solo se

$$\langle G_A \rangle > \langle G'_A \rangle \iff -P_a - f_a G_-(1-p) > -P'_a - f'_a G_-(1-p) \tag{102}$$

$$\iff P'_a - P_a > (f_a - f'_a) G_-(1-p)$$

Poiché le due differenze sono entrambe positive, questa disuguaglianza equivale a

$$\frac{P'_a - P_a}{f_a - f'_a} > r = G_-(1-p)$$

In altri termini: il contratto (P_a, f_a) é migliore, rispetto al criterio del valore medio, se e solo se il quoziente $(P'_a - P_a)/(f_a - f'_a)$ é maggiore dell'indice del rischio iniziale.
Se $P_a > P'_a$, si invertono i ruoli delle due e si ragiona come sopra.

Problema 4 A accetta di assicurare, con copertura totale, la sua automobile per 700 E. Supponiamo che:
– l'assicuratore sopporti un costo medio per cliente di circa

$$C_B \sim 300\ E$$

– che lo stato conceda all'assicuratore un margine del 5% sui suoi costi piú il costo del rischio, valutato con l'indice di rischio, i.e.

$$\varepsilon = (5\%)((1 - f_a)G_-(1 - p) + C_B) \qquad ; \qquad C_B \sim 300\ E$$

Se A dovesse ricomprare la sua automobile dovrebbe pagare 15.000 E. Accettando il contratto, A a quanto sta stimando la probabilitá di furto entro l'anno, se usa il criterio di ε–lealtá in media con l'ε definito sopra?

Soluzione. Sappiamo che una condizione necessaria per l'esistenza di un contratto ε–leale in media é che valga la (88), cioé

$$G_-p > C_B + \varepsilon \iff G_-p > C_B + (5\%)((1 - f_a)G_-(1 - p) + C_B)$$

$$\iff p15.000 > 300+\frac{1}{20}(15.000(1-p)+300) \iff p150 > 3+\frac{1}{20}(150(1-p)+3)$$

$$\iff p3000 > 60 + 150(1 - p) + 3 = 63 + 150 - 150p$$

$$\iff p3150 > 213 \iff p > \frac{213}{3150} \sim 0,067 = \frac{67}{1000}$$

che, per la probabilitá di furto fornisce la stima

$$1 - p < 1 - 0,067 = 0,933$$

Poiché in genere la probabilitá di furto é certamente minore del 93%, la sola condizione $G_-p > C_B+\varepsilon$ conduce ad una stima troppo alta per la probabilitá di furto, si puó concludere che il prezzo dell'assicurazione é troppo alto. Tuttavia A puó ancora utilizzare l'informazione sulla franchigia nulla. Infatti, secondo il Teorema (7), in un contratto ε–leale in media risulta

$$f_a = 0 = 1 - \frac{P_a - (C_B + \varepsilon)}{G_-(1-p)} \iff 1 = \frac{P_a - (C_B + (5\%)((1-f_a)G_-(1-p) + C_B))}{G_-(1-p)}$$

$$\iff G_-(1-p) = P_a - (C_B + (5\%)(G_-(1-p) + C_B))$$

$$= P_a - C_B(1 + \frac{1}{20}) - \frac{1}{20}G_-(1-p)$$

$$\iff G_-(1-p)(1 + \frac{1}{20}) = P_a - C_B(1 + \frac{1}{20})$$

$$\iff 15000(1-p)\frac{21}{20} = 700 - 300\frac{21}{20}$$

$$\iff 150(1-p)\frac{21}{20} = 7 - 3\frac{21}{20}$$

$$\iff 3150(1-p) = 140 - 63 = 77 \iff 1 - p = \frac{77}{3150} \sim 0,02$$

Quindi, accettando il contratto, A sta stimando che, nella sua zona in ogni anno, circa 2 auto su 100 vengano rubate.

Esercizio. (Sensibilitá del premio alla probabilitá)
Se, nelle ipotesi dell'esercizio precedente, la probabilitá che l'automobile venga rubata é stimata

$$1 - p = 0,018$$

Qual é l'intervallo del premio ε–leale in media per un assicurazione contro il furto nelle stesse condizioni del teorema precedente?
Risposta. Dalla (87) sappiamo che

$$P_a \in \left(\frac{C_B + \varepsilon}{p}, G_-(1-p) + C_B + \varepsilon\right]$$

$$\frac{C_B + \varepsilon}{p} = \frac{300 + (5\%)(G_-(0,018) + 300)}{1 - 0,018}$$

$$\frac{C_B + \varepsilon}{p} = \frac{300 + \frac{1}{20}(15000(0,018) + 300)}{0,982}$$

$$= \frac{300 + \frac{1}{20}(270 + 300)}{0,982} = \frac{300 + \frac{570}{20}}{0,982} = \frac{328,5}{0,982} = 334,52$$

$$G_-(1-p) + C_B + \varepsilon = 15000(0,018) + 328,5 = 270 + = 598,5$$

Quindi l'intervallo del premio ε–leale in media é

$$P_a \in (334,52 \ , \ 598,5]$$

Come si vede, in questo caso diminuire la probabilitá di furto di circa 2 millesimi pu'øfar diminuire il premio ε–leale in media di circa la metá.

9 Contratti assicurativi standard

D'ora in avanti ci occuperemo di contratti assicurativi relativi a rischi standard, nel senso della condizione (4), cioé rischi che soddisfano la condizione

$$G_+ > 0 \qquad ; \qquad G_- > 0$$

Tali contratti saranno anche chiamati standard.
Un **contratto assicurativo** tra A (assicurato) e B (assicuratore), relativo al rischio $\{G_+, G_-, p\}$, é un contratto

$$\{\{+,-\}, p, G_A, G_B, C_A, C_B\} \tag{103}$$

nel senso della Definizione (14), caratterizzato dalle funzioni guadagno:

$$G_A(+) = (1-p_a)G_+ \tag{104}$$

$$G_A(-) = -f_a G_- - p_a G_+ = -(f_a + p_a G_+/G_-)G_- \tag{105}$$

– funzione guadagno di A dopo il contratto, e

$$G_B(+) = p_a G_+ - C_B \tag{106}$$

$$G_B(-) = -(1-f_a)G_- + p_a G_+ - C_B \tag{107}$$

$$= -G_-(1-(f_a + p_a G_+/G_-)) - C_B = -G_-[1-(f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-]$$

– funzione guadagno di B dopo il contratto, dove:
– $p_a \in (0,1)$ é il premio,
– $f_a \in [0,1)$ é la franchigia,
– $C_A \in \mathbb{R}_+^*$ ($C_B \in \mathbb{R}_+^*$) é il capitale investito da A (B)
Osservazione. Quando non ci sono possibilitá di confusione, il riferimento al rischio iniziale e ai costi é implicito e si parla di **contratto assicurativo**

(f_a, p_a) di A con B.
Osservazione. Un contratto $(f_a G_-, P_a)$ cambia la funzione guadagno di A da (54) a (56) e introduce per B la funzione guadagno (57). Conseguentemente lo schema di rischio per A cambia da (53) in

$$\{(1 - p_a)G_+, f_a G_- + p_a G_+, p\} \tag{108}$$

e per B viene introdotto il seguente schema di rischio:

$$\{p_a G_+ - C_B, (1 - f_a)G_- - p_a G_+ + C_B, p\} \tag{109}$$

Definizione 19 Un contratto assicurativo standard di A (assicurato) con B (assicuratore) relativo al rischio

$$\{G_+, G_-, p\}$$

e con capitali investiti (C_A, C_B), é una coppia ordinata

$$(f_a, p_a) := (\text{franchigia,premio})$$

di numeri reali che soddisfa le condizioni di coerenza economica (**??**), (111), (112).
Una tale coppia determina un contratto (103) nel senso della Definizione (14), caratterizzato dalle funzioni guadagno (104), (105), (106), (107).

Osservazione. Le funzioni guadagno (104), (105), (106), (107) definiscono due variabili casuali entrambe con distribuzione

$$(p, 1 - p)$$

9.1 Condizioni di coerenza economica per contratti standard

Le condizioni di coerenza economica della sezione (7.5), nel caso di contratti standard, diventano:

$$p_a \in (0, 1) \qquad ; \qquad f_a \in [0, 1) \tag{110}$$

$$f_a + p_a G_+/G_- < 1 \tag{111}$$

$$p_a G_+ > C_B \tag{112}$$

Proposizione 4 Le seguenti affermazioni sono equivalenti.
(i) La coppia (f_a, p_a) soddisfa le condizioni di coerenza economica (110), (111) e (112).
(ii) Si ha:

$$C_B < G_- \tag{113}$$

e la coppia (f_a, p_a) soddisfa le condizioni:

$$f_a \in \begin{cases} \left[0 \ , \ 1 - \frac{C_B}{G_-}\right), & \text{se } G_+ > G_- \\ \left(0 \ , \ 1 - \frac{C_B}{G_-}\right), & \text{se } G_+ = G_- \\ \left(1 - \frac{G_+}{G_-} \ , \ 1 - \frac{C_B}{G_-}\right), & \text{se } G_+ < G_- \end{cases} \tag{114}$$

$$p_a \in \begin{cases} \left(\frac{C_B}{G_+} \ , \ (1-f_a)\frac{G_-}{G_+}\right), & \text{se } 1 - \frac{G_+}{G_-} < f_a \\ \left(\frac{C_B}{G_+} \ , \ 1\right), & \text{se } 1 - \frac{G_+}{G_-} \geq f_a \end{cases} \tag{115}$$

dove nessuno degli intervalli é vuoto.

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$. Le condizioni (110), (111) e (112) implicano che

$$1 > f_a + p_a G_+/G_- > p_a G_+/G_- > C_B/G_- \Rightarrow G_- > C_B$$

che é la (113). Si ha inoltre

$$p_a \in \left(\frac{C_B}{G_+} \ , \ (1-f_a)\frac{G_-}{G_+}\right) \cap (0,1) \tag{116}$$

perché la (112) fornisce l'estremo inferiore dell'intervallo di p_a e la (111) l'estremo superiore. L'intersezione é dovuta a (110). La condizione che l'intervallo non sia vuoto equivale a

$$\frac{C_B}{G_+} < (1-f_a)\frac{G_-}{G_+} \iff C_B < (1-f_a)G_- = G_- - f_a G_-$$

$$\iff f_a G_- < G_- - C_B \iff f_a < 1 - \frac{C_B}{G_-}$$

che é possibile poiché la (113) implica che $C_B < G_-$. Da questa e la (110) segue che

$$f_a \in \left[0 \ , \ 1 - \frac{C_B}{G_-}\right) \tag{117}$$

L'intersezione in (116) é uguale a

$$\left(\frac{C_B}{G_+}\ ,\ (1-f_a)\frac{G_-}{G_+}\right)$$

se $(1-f_a)\frac{G_-}{G_+} < 1$ ed a

$$\left(\frac{C_B}{G_+}\ ,\ 1\right)$$

se $(1-f_a)\frac{G_-}{G_+} \geq 1$. Dalla disuguaglianza

$$(1-f_a)\frac{G_-}{G_+} < 1 \iff 1-f_a < \frac{G_+}{G_-} \iff 1-\frac{G_+}{G_-} < f_a \tag{118}$$

segue che:
– se vale la (118) e $G_+ > G_-$ il limite inferiore per f_a in (117) non viene alterato, quindi l'intervallo per f_a é il primo nella (114).
– se vale la (118) e $G_+ = G_-$ si ha $f_a > 0$ e l'intervallo (114) si restringe al secondo nella (114).
– se vale e $G_+ < G_-$ si ha $f_a > 1 - G_+/G_-$ e l'intervallo (114) si restringeal terzo nella (114).
Se la (118) non vale, cioé se $(1-f_a)\frac{G_-}{G_+} \geq 1$, dev'essere necessariamente $G_- > G_+$. In questo caso l'intervallo di premio é il secondo della (115) e quello di franchigia il terzo della (114).

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*. Supponiamo che valgano le (113), (114), (115). Allora, dato che tutti gli intervalli della (114) sono contenuti in $[0,1)$, vale la seconda relazione in (110). La prima relazione nella (110) vale a causa delle (115) e (118). L'estremo inferiore della (115) implica che vale la (112). L'estremo superiore della (115) implica che

$$f_a + p_a\frac{G_+}{G_-} < f_a + (1-f_a)\frac{G_-}{G_+}\frac{G_+}{G_-} = 1$$

cioé che vale la (111). $\square$

Proposizione 5 Le seguenti affermazioni sono equivalenti.
(i) La coppia (f_a, p_a) soddisfa le condizioni di coerenza economica (110),

(111) e (112).
(ii) Vale la (113) e la coppia (f_a, p_a) soddisfa le condizioni:

$$p_a \ \in \ \begin{cases} \left(\frac{C_B}{G_+} \ , \ 1\right) & \text{se } G_- \geq G_+ \\ \left(\frac{C_B}{G_+} \ , \ \frac{G_-}{G_+}\right) & \text{se } G_- < G_+ \end{cases} \tag{119}$$

dove nessuno dei due intervalli é vuoto. Per ogni p_a in uno degli intervalli (119) il corrispondente intervallo di franchigia é:

$$f_a \in \left[0 \ , \ 1 - \frac{p_a G_+}{G_-}\right) \tag{120}$$

e l'intervallo non é vuoto.

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$. La (112) fornisce per p_a il limite inferiore $p_a > C_B/G_+$. Che la (113) (cioé $C_B < G_-$) segua dalle condizioni di coerenza economica si é giá visto nella dimostrazione della Proposizione 4. D'altra parte, la (111) equivale a

$$f_a + p_a G_+/G_- < 1 \iff f_a < 1 - p_a G_+/G_- \tag{121}$$

Poiché $f_a \geq 0$, ció implica il limite inferiore per p_a:

$$0 < 1 - p_a G_+/G_- \iff p_a G_+/G_- < 1 \iff p_a < \frac{G_-}{G_+}$$

Questo é compatibile con con il limite inferiore a causa della (113). Concludiamo che

$$p_a \in \left(\frac{C_B}{G_+} \ , \ \frac{G_-}{G_+}\right) \cap (0, 1)$$

Da ció segue che gli intervalli di premio possibili sono:

$$p_a \ \in \ \begin{cases} \left(\frac{C_B}{G_-} \ , \ 1\right) & \text{se } G_- \geq G_+ \\ \left(\frac{C_B}{G_-} \ , \ \frac{G_-}{G_+}\right) & \text{se } G_- < G_+ \end{cases}$$

e nessuno dei due intervalli é vuoto per la (113).
Poiché f_a compare solo nelle condizioni di coerenza economica (110) e (111), segue che il limite inferiore per la franchigia é sempre 0. Il limite superiore é dato dalla (121). Quindi vale la (120). L'intervallo in eqrefdato-pa-fa0-cc

non é vuoto a causa di (119) e (110).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Supponiamo che le condizioni (119) e (120) siano soddisfatte. Allora la seconda di (110) segue dal fatto che i due intervalli coinvolti in (119) sono contenuti in $(0,1)$ e l'intervallo (120) é contenuto in $[0,1)$. L'estremo inferiore della (119) implica che vale la (112).
L'estremo superiore della (120) implica che

$$f_a < 1 - \frac{p_a G_+}{G_-} \iff f_a + \frac{p_a G_+}{G_-} < 1$$

che é la (111). □

9.2 Variazione dell'indice di rischio percentuale dopo un contratto assicurativo standard

Osservando che l'indice di rischio iniziale di B é nullo prima del contratto e introducendo le variazioni di rischio per A e per B:

$$\Delta(r_A) := r_A - r \qquad ; \qquad \Delta(r_B) := r_B$$

la relazione di conservazione del rischio (64) si puó riformulare affermando che *la variazione totale del rischio é nulla*:

$$\Delta(r_A) + \Delta(r_B) = 0$$

Questa formulazione ammette la seguente generalizzazione al caso di indici di rischio percentuale.
Innanzitutto osserviamo che da (108) e (109) segue che gli indici di rischio percentuale per A e per B dopo il contratto sono rispettivamente

$$\rho_A = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-}{G_+} \frac{f_a + p_a(G_+/G_-)}{1 - p_a} = \rho \frac{f_a + p_a(G_+/G_-)}{1 - p_a} \tag{122}$$

$$\rho_B = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{(1 - f_a)G_- - p_a G_+ + C_B}{p_a G_+ - C_B} \tag{123}$$

$$= \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-}{G_+} \frac{(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+} = \rho \frac{1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+}$$

Osservazione
Le formule (122), (123), mostrano che come ρ, anche ρ_A dipende solo dal quoziente G_+/G_-, mentre la cosa non é vera per ρ_B a causa del fatto che $C_B > 0$.

Teorema 9 Nelle notazioni (122), (123) risulta

$$\rho_A - \rho = -\frac{p_a}{1-p_a}(\rho_B - \rho) + \frac{C_B}{1-p_a}\left(\frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-}\right) \tag{124}$$

Dimostrazione Dalla (122) segue che

$$\rho_A - \rho = \rho\frac{f_a + p_a(G_+/G_-)}{1-p_a} - \rho = \rho\left(\frac{f_a + p_a(G_+/G_-)}{1-p_a} - 1\right)$$

$$= \rho\frac{1}{1-p_a}\left(f_a + p_a(G_+/G_-) - 1 + p_a\right) = -\rho\frac{1}{1-p_a}\left(1 - (f_a + p_aG_+/G_-) - p_a\right)$$

ricordando che

$$\rho_B = \rho\frac{(1-(f_a + p_aG_+/G_-) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+}$$

si trova

$$\rho_A - \rho = -\rho\frac{p_a - C_B/G_+}{1-p_a}\frac{(1-(f_a + p_aG_+/G_-) + C_B/G_- - C_B/G_- - p_a)}{p_a - C_B/G_+}$$

$$= -\rho\frac{p_a - C_B/G_+}{1-p_a}\frac{1-(f_a + p_aG_+/G_-) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+} + \rho\frac{p_a - C_B/G_+}{1-p_a}\frac{(p_a + C_B/G_-)}{p_a - C_B/G_+}$$

$$= -\frac{p_a - C_B/G_+}{1-p_a}\rho\frac{1-(f_a + p_aG_+/G_-) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+} + \rho\frac{p_a + C_B/G_-}{1-p_a}$$

$$= -\frac{p_a - C_B/G_+}{1-p_a}\rho_B + \rho\frac{p_a}{1-p_a} + \rho\frac{C_B/G_-}{1-p_a}$$

$$= -\frac{p_a}{1-p_a}\rho_B + \frac{C_B/G_+}{1-p_a}\rho_B + \rho\frac{p_a}{1-p_a} + \rho\frac{C_B/G_-}{1-p_a}$$

$$= -\frac{p_a}{1-p_a}(\rho_B - \rho) + \frac{C_B}{1-p_a}\left(\frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-}\right)$$

che é la (124).

Teorema 10 Nelle notazioni del Teorema (9):
(i) $\rho_B < \rho$ se e solo se $\rho_A > \rho$ e l'uguaglianza $\rho_B = \rho_A = \rho$ é impossibile. In particolare non esiste alcun contratto assicurativo tale che sia ρ_A che ρ_B risultino minori o uguali di ρ.

Dimostrazione Dalla (124), cioé

$$\rho_A - \rho = -\frac{p_a}{1-p_a}(\rho_B - \rho) + \frac{C_B}{1-p_a}\left(\frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-}\right) \tag{125}$$

segue che $\rho_B < \rho$ se e solo

$$\rho_A - \rho = \frac{p_a}{1-p_a}(\rho - \rho_B) + \frac{C_B}{1-p_a}\left(\frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-}\right) > 0$$

L'uguaglianza $\rho_B = \rho_A = \rho$ é impossibile poiché implicherebbe

$$0 = \frac{C_B\rho}{1-p_a}\left(\frac{1}{G_+} + \frac{1}{G_-}\right) > 0$$

Proposizione 6 L'indice di rischio percentuale di A dopo il contratto é minore o uguale di quello prima del contratto se e solo se

$$f_a + p_a(1 + G_+/G_-) \leq 1 \tag{126}$$

In questo caso

$$\rho_B \geq \frac{p_a + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+}\rho > \rho \tag{127}$$

Dimostrazione Dalla (122) segue che $\rho_A \leq \rho$ se e solo se

$$\frac{f_a + p_a(G_+/G_-)}{1-p_a} \leq 1 \iff f_a + p_a(G_+/G_-) \leq 1 - p_a \iff f_a + p_a(1 + G_+/G_-) \leq 1$$

e questa equivale alla (126). Infine, tenendo conto della (124) si trova

$$\rho_A - \rho = -\frac{p_a}{1-p_a}(\rho_B - \rho) + \frac{C_B}{1-p_a}\left(\frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-}\right) \leq 0$$

$$\iff \frac{C_B}{1-p_a}\left(\frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-}\right) \leq \frac{p_a}{1-p_a}(\rho_B - \rho) \iff \frac{C_B\rho_B}{G_+} + \frac{C_B\rho}{G_-} \leq p_a\rho_B - p_a\rho$$

$$\iff \left(\frac{C_B}{G_+} - p_a\right)\rho_B \leq -\left(p_a + \frac{C_B}{G_-}\right)\rho$$

L'ultima disuguaglianza equivale a

$$-\left(p_a - \frac{C_B}{G_+}\right)\rho_B \leq -\left(p_a + \frac{C_B}{G_-}\right)\rho \iff \left(p_a - \frac{C_B}{G_+}\right)\rho_B \geq \left(p_a + \frac{C_B}{G_-}\right)\rho$$

e, dato che per la condizione di coerenza economica $p_a G_+ > C_B$, questa equivale a

$$\rho_B \geq \frac{p_a + \frac{C_B}{G_-}}{p_a - \frac{C_B}{G_+}} \rho$$

che é la (127).

Proposizione 7 L'indice di rischio percentuale di B dopo il contratto é minore o uguale dell'indice del rischio iniziale se e solo se

$$f_a + (1 + p_a) G_+ / G_- \geq 1 + \frac{C_B}{G_-(1 - p_L)} \tag{128}$$

dove p_L é la probabilitá *leale* o *neutra al rischio*

$$\frac{G_+}{G_+ + G_-} = 1 - \frac{G_-}{G_+ + G_-} = 1 - p_L$$

(v. i Teoremi (1) e (2)). In questo caso

$$\rho_A \geq \rho \left(1 + \frac{C_B}{(1 - p_a) G_-} \left(\frac{(G_- - (f_a G_- + p_a G_+) + C_B}{p_a G_+ - C_B} + 1 \right) \right) > \rho \tag{129}$$

Dimostrazione Dalla (123) segue che l'indice di rischio percentuale di B dopo il contratto é minore o uguale dell'indice del rischio iniziale se e solo se

$$\rho_B = \rho \frac{(1 - (f_a + p_a G_+ / G_-) + C_B / G_-}{p_a - C_B / G_+} \leq \rho \tag{130}$$

$$\iff \frac{(1 - (f_a + p_a G_+ / G_-) + C_B / G_-}{p_a - C_B / G_+} \leq 1$$

$$\iff 1 - f_a - p_a G_+ / G_- + C_B / G_- \leq p_a - C_B / G_+$$

$$\iff f_a + p_a (1 + G_+ / G_-) \geq 1 + C_B (1 / G_+ + 1 / G_-) = 1 + C_B \frac{G_- + G_+}{G_+ G_-}$$

$$= 1 + C_B \left(\frac{G_+ G_-}{G_- + G_+} \right)^{-1} = 1 + C_B \left(G_- \frac{G_+}{G_- + G_+} \right)^{-1} = 1 + \frac{C_B}{G_-(1 - p_L)}$$

$$\iff f_a + p_a (1 + G_+ / G_-) \geq 1 + \frac{C_B}{G_-(1 - p_L)}$$

che equivale alla (128). Infine, tenendo conto della (124) si trova

$$
\begin{aligned}
\rho_A - \rho &= -\frac{p_a}{1-p_a}(\rho_B - \rho) + \frac{C_B}{1-p_a}\left(\frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-}\right) \\
\iff (\rho_A - \rho)(1-p_a) &= -p_a(\rho_B - \rho) + C_B\left(\frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-}\right) \\
\iff p_a(\rho_B - \rho) &= -(\rho_A - \rho)(1-p_a) + C_B\left(\frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-}\right) \\
\iff \rho_B - \rho &= -(\rho_A - \rho)\frac{1-p_a}{p_a} + \frac{C_B}{p_a}\left(\frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-}\right) \leq 0
\end{aligned}
$$

Quindi tenendo conto di (130),

$$
\begin{aligned}
&\frac{C_B}{p_a}\left(\frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-}\right) \leq (\rho_A - \rho)\frac{1-p_a}{p_a} \iff \frac{C_B}{1-p_a}\rho\left(\frac{\rho_B}{\rho G_+} + \frac{1}{G_-}\right) \leq \rho_A - \rho \\
&\iff \frac{C_B}{1-p_a}\rho\left(\frac{1}{G_+}\frac{(1-(f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+} + \frac{1}{G_-}\right) \leq \rho_A - \rho \\
&\iff \frac{C_B}{1-p_a}\rho\left(\frac{(1-(f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-}{p_a G_+ - C_B} + \frac{1}{G_-}\right) \leq \rho_A - \rho
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\rho_A &\geq \rho\left(1 + \frac{C_B}{1-p_a}\left(\frac{(1-(f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-}{p_a G_+ - C_B} + \frac{1}{G_-}\right)\right) \\
&= \rho\left(1 + \frac{C_B}{(1-p_a)G_-}\left(\frac{(G_- - (f_a G_- + p_a G_+) + C_B}{p_a G_+ - C_B} + 1\right)\right)
\end{aligned}
$$

che, per la condizione di coerenza, é $> \rho$. Ció prova la (129).

9.3 Il guadagno di A dopo il contratto.

Teorema 11 Il guadagno atteso di A dopo l'assicurazione é positivo se e solo se vale una delle due disuguaglianze equivalenti:

$$
\rho \leq \frac{(1-p_a)}{f_a + p_a G_+/G_-} \tag{131}
$$

$$
\rho f_a + \frac{p_a}{p} \leq 1 \tag{132}
$$

ed é nullo se e solo se vale l'uguaglianza.

Dimostrazione. Sappiamo che il guadagno atteso di A dopo l'assicurazione é positivo se e solo se:

$$\rho_A = \rho\frac{(f_a + p_a G_+/G_-)}{(1-p_a)} \leq 1 \iff \rho \leq \frac{(1-p_a)}{f_a + p_a G_+/G_-}$$

che equivale alla (131). Questa é equivalente a:

$$\rho f_a + \rho p_a G_+/G_- \leq 1 - p_a \iff \rho f_a + \left(\frac{1}{p} - 1\right) p_a \leq 1 - p_a$$

$$\iff \rho f_a + \frac{p_a}{p} - p_a \leq 1 - p_a \iff \rho f_a + \frac{p_a}{p} \leq 1$$

che é la (132).

Problema 5 L'imprenditore A vuole assicurare il rischio $\{G_+, G_-, p\}$ del quale si sa che $G_+ \geq G_-$ (rischio non catastrofico).
L'assicuratore B propone il contratto

$$p_a = 0,3 \qquad ; \qquad f_a = 0,8$$

Consigliereste ad A di accettare? Motivare la risposta.

Soluzione. La condizione di coerenza economica (74) per il contratto (f_a, p_a) richiede che

$$f_a + p_a(G_+/G_-) < 1 \tag{133}$$

Nel nostro caso sappiamo che $G_+ \geq G_-$. Quindi

$$f_a + p_a(G_+/G_-) \geq f_a + p_a = 0,3 + 0,8 = 1,1 > 1$$

Quindi la (133) non é soddisfatta. Allora dal Teorema (6) A sa che, dopo il contratto, la sua perdita potenziale sarebbe maggiore o uguale di quella che avrebbe affrontando il rischio senza contratto.
Non avrebbe senso concludere un contratto in queste condizioni.

9.4 Il Guadagno di B dopo il contratto

Prima del contratto B non investe e non rischia, quindi il suo guadagno atteso é nullo. Perció B ha convenienza A fare il contratto se il suo guadagno atteso é positivo.

Teorema 12 Il guadagno atteso di B é positivo se e solo se vale una delle due disuguaglianze equivalenti:

$$\rho \leq \frac{p_a - C_B/G_+}{1-(f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-} \tag{134}$$

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} \leq \rho f_a + \frac{p_a}{p} \tag{135}$$

ed é nullo se e solo se vale l'uguaglianza.

Dimostrazione. Il guadagno atteso di B dopo l'assicurazione é positivo se e solo se:

$$\rho_B = \rho \frac{(1-(f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+} \leq 1 \iff \rho \leq \frac{p_a - C_B/G_+}{(1-(f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-}$$

che é la (134). Questa equivale a

$$\begin{aligned}
&\rho\,((1-(f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-) \leq p_a - C_B/G_+ \\
\iff &\rho - \rho f_a - p_a \rho G_+/G_- + \rho C_B/G_- \leq p_a - C_B/G_+ \\
\iff &\rho + \rho C_B/G_- + C_B/G_+ \leq \rho f_a + p_a + p_a(\frac{1}{p} - 1) \\
\iff &\rho + C_B(\rho/G_- + 1/G_+) \leq \rho f_a + \frac{p_a}{p}
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\frac{1}{G_+} + \frac{\rho}{G_-} = \frac{1}{G_+} + (\frac{1}{p} - 1)\frac{G_-}{G_+}\frac{1}{G_-} = \frac{1}{G_+} + (\frac{1}{p} - 1)\frac{1}{G_+} = \frac{1}{pG_+} \tag{136}$$

Quindi

$$\rho_B \leq 1 \iff \rho + \frac{C_B}{pG_+} \leq \rho f_a + \frac{p_a}{p}$$

10 Contratti ragionevoli in media

Definizione 20 Dato il rischio $\{G_+, G_-, p\}$, una coppia $(f_a, p_a) \in \mathbb{R}$ sará detta **ragionevole in media** se soddisfa la condizione

$$\langle G_A \rangle \geq 0 \qquad ; \qquad \langle G_B \rangle > 0 \tag{137}$$

Se inoltre $(f_a, p_a) \in [0,1) \times (0,1)$ e soddisfa anche le condizioni di ammissibilitá economica (111), (112) cioé

$$f_a + p_a G_+/G_- < 1 \tag{138}$$

$$p_a G_+ > C_B \tag{139}$$

diremo che tale coppia definisce un **contratto ragionevole in media**.

Osservazione Per definizione, il contratto (f_a, p_a) relativo al rischio $\{G_+, G_-, p\}$ é ragionevole in media se i guadagni attesi sia dell'assicuratore che dell'assicurato sono entrambi positivi e quello dell'assicuratore é strettamente positivo. Poiché gli indici di rischio percentuale dopo il contratto di sono rispettivamente:

$$\rho_A = \rho \frac{f_a + p_a G_+/G_-}{(1 - p_a)}$$

$$\rho_B = (\frac{1}{p} - 1) \frac{G_-(1 - f_a) - (p_a G_+ - C_B)}{(p_a G_+ - C_B)} = \rho \frac{1 - (f_a + p_a G_+/G_- - C_B/G_-)}{(p_a - C_B/G_+)}$$

le condizioni di ragionevolezza in media (137) possono essere espresse equivalentemente nella forma:

$$\rho_A \leq 1 \qquad ; \qquad \rho_B < 1$$

Problema 6 Nelle stesse condizioni del Problema (5),

$$p_a = 0,3 \qquad ; \qquad f_a = 0,8 \qquad ; \qquad G_+ \geq G_-$$

se il contratto proposto da B fosse

$$p_a = 0,2 \qquad ; \qquad f_a = 0,6$$

quale suggerimento dareste ad A sulla base del criterio dei contratti ragionevoli in media?

Soluzione.
In questo caso la condizione di ammissibilitá (133) é soddisfatta se e solo se

$$0,6 + 0,2G_+/G_- < 1 \Leftrightarrow 6 + 2G_+/G_- < 10 \Leftrightarrow 3 + G_+/G_- < 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G_+/G_- < 2$$

Poiché il rischio é non catastrofico questa condizione impone l'ulteriore condizione

$$1 \leq G_+/G_- < 2 \tag{140}$$

D'altra parte il fatto che il guadagno atteso di A sia positivo (v. la prima condizione in (137)) equivale a

$$\rho_A = \rho \frac{f_a + p_a G_+/G_-}{1 - p_a} = \rho \frac{0,6 + 0,2 G_+/G_-}{0,8} = \rho \frac{3 + G_+/G_-}{4} \geq \rho$$

Quindi la condizione $\rho < 1$, cioé che il guadagno atteso di A prima del contratto sia strettamente positivo, é necessaria affinché risulti $\rho_A < 1$.
La condizione di coerenza (138) implica che

$$\rho_A = \rho \frac{f_a + p_a G_+/G_-}{0,8} < \rho \frac{10}{8} = \frac{5}{4}\rho$$

Perció, la condizione

$$\frac{5}{4}\rho < 1 \iff \rho < \frac{4}{5} \tag{141}$$

é sufficiente affinché risulti

$$\rho_A < 1$$

In questo caso A potrebbe accettare il contratto tenendo conto del fatto che il suo guadagno atteso resta positivo.
Infine, ricordando che

$$\rho_B = \rho \frac{(1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+}$$

e che, essendo $G_+/G_- \geq 1$, si ha:

$$1 - (f_a + p_a(G_+/G_-)) \leq 1 - (f_a + p_a)$$

risulta

$$\rho_B \leq \rho \frac{1 - (f_a + p_a) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+} = \rho \frac{0,2 + C_B/G_-}{0,2 - C_B/G_+}$$

Quindi

$$\rho \frac{0,2 + C_B/G_-}{0,2 - C_B/G_+} < 1 \;\Rightarrow\; \rho_B < 1$$

Usando la (141) si trova

$$\rho\frac{0,2+C_B/G_-}{0,2-C_B/G_+}<\frac{4}{5}\frac{0,2+C_B/G_-}{0,2-C_B/G_+}$$

perció é sufficiente che

$$\frac{4}{5}\frac{0,2+C_B/G_-}{0,2-C_B/G_+}<1 \iff \frac{0,2+C_B/G_-}{0,2-C_B/G_+}<\frac{5}{4}$$

Questa é sempre soddisfatta se

$$0,2-C_B/G_+<0 \iff 0,2G_+<C_B \iff \frac{G_+}{5}<C_B$$

e, se $0,2-C_B/G_+>0 \iff G_+/5 \geq C_B$ essa equivale a

$$4(0,2+C_B/G_-)<5(0,2-C_B/G_+) \iff 4C_B/G_-<0,2-5C_B/G_+$$

$$\iff 4/G_-<\frac{1}{5C_B}-5/G_+ \iff 4/G_-+5/G_+<\frac{1}{5C_B}$$

$$\iff \frac{4G_++5G_-}{G_-G_+}<\frac{1}{5C_B} \iff 5C_B<\frac{G_-G_+}{4G_++5G_-} \iff C_B<\frac{G_-}{5}\frac{1}{4+5(G_-/G_+)}$$

In conclusione, se i costi dell'assicuratore soddisfano la disuguaglianza

$$C_B<\frac{G_-}{5}\frac{1}{4+5(G_-/G_+)} \tag{142}$$

anche l'assicuratore avrebbe un guadagno atteso positivo e quindi, sulla base del criterio di ragionevolezza in media, sia A che B sarebbero nelle condizioni di poter concludere il contratto.

Avendo definita la nozione di *contratto ragionevole in media*, la prima domanda da porsi é se tali contratti esistono. Piú precisamente:
Dato un rischio $\{G_+,G_-,p\}$, *per quali coppie* (f_a,p_a) *il corrispondente contratto assicurativo é ragionevole in media?*
La isposta a tale domanda é data dal seguente *Teorema fondamentale dei contratti ragionevoli in media.*

Teorema 13 Dato il rischio $\{G_+, G_-, p\}$, una coppia $(f_a, p_a) \in [0,1) \times (0,1)$ é ragionevole in media se e solo se

$$\rho f_a + \frac{p_a}{p} \in \left(\rho + \frac{C_B}{pG_+}\ ,\ 1\right] \tag{143}$$

Questo intervallo é non vuoto se e solo se

$$\langle G \rangle > C_B \iff \frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \tag{144}$$

In particolare il rischio iniziale deve essere di tipo investimento (i.e. $\rho < 1$).

Osservazione. Il fatto che l'intervallo (143) non sia vuoto non significa che coppie ragionevoli in media esistano sempre. Infatti vedremo che ulteriori condizioni sono necessarie.

Dimostrazione. Dal Teorema 11 sappiamo che il guadagno atteso di A dopo l'assicurazione é positivo se e solo se

$$\rho f_a + \frac{p_a}{p} \leq 1$$

Dal Teorema 12 sappiamo che il guadagno atteso di B dopo l'assicurazione é strettamente positivo se e solo se

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} < \rho f_a + \frac{p_a}{p}$$

Quindi la condizione di ragionevolezza in media equivale alla (143). Da questa segue che la seconda delle condizioni (144) é una condizione necessaria per l'esistenza di tali contratti. La prima delle condizioni (144) segue da

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \iff \frac{C_B}{pG_+} + \frac{(1-p)G_-}{pG_+} < 1 \iff C_B + (1-p)G_- < pG_+$$

$\square$

Problema.

Dato un rischio $\{G_+, G_-, p\}$ dal Teorema 13 sappiamo che contratti ragionevoli in media relativi a tale rischio esistono solo se vale la (144), che implica che tale rischio ha guadagno atteso positivo. In tal caso essi sono caratterizzati dalla condizione (143) unitamente alle condizioni di coerenza economica.

Ci chiediamo: comunque dato un premio p_a (risp. una franchigia f_a), per quali f_a (risp. p_a) il contratto (f_a, p_a) sará ragionevole in media?
Lo schema per rispondere a domande del genere é standard:
1) prima si determinano le condizioni di esistenza di coppie che soddisfano il criterio considerato,
2) poi si impongono le condizioni di coerenza economica.

10.0.1 Contratti ragionevoli in media con premio pre–assegnato

Teorema 14 Dato un rischio $\{G_+, G_-, p\}$ e un costo C_B per l'assicuratore, condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di premi p_a per i quali esista una coppia (f_a, p_a) ragionevole in media é che valga la condizione (144), cioé:

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} < 1 \tag{145}$$

In questo caso tali premi sono caratterizzati dalla condizione:

$$p_a \in \left(\frac{C_B}{G_+} \ , \ p \right) \tag{146}$$

e per ogni p_a che soddisfa (146) ogni coppia (f_a, p_a) tale che

$$f_a \in \left(\frac{1}{\rho} \left(\rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} \right) \ , \ \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{p_a}{p} \right) \right] \cap [0, 1] \tag{147}$$

é ragionevole in media ed entrambi gli intervalli (146) e (147) non sono vuoti.

Dimostrazione. Dal Teorema 13 sappiamo che la condizione di ragionevolezza in media equivale alle disuguaglianze

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} < \rho f_a + \frac{p_a}{p} < 1 \tag{148}$$

La prima delle disuguaglianze (148) é:

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} < \rho f_a + \frac{p_a}{p}$$

Per p_a dato questa equivale a

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} < \rho f_a \iff f_a > \frac{1}{\rho} \left(\rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} \right) \tag{149}$$

Ció fornisce un estremo inferiore per f_a. Se il membro sinistro della (149) é ≤ 0, allora il limite inferiore per la franchigia é zero.
Poiché $f_a < 1$, la (149) é possibile se e solo se

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} < \rho \iff \frac{C_B}{G_+} < p_a$$

che equivale alla condizione di coerenza (**??**). Ció fornisce un estremo inferiore per p_a che é sempre strettamente positivo.
La seconda delle disuguaglianze (148) é:

$$\rho f_a + \frac{p_a}{p} < 1 \iff \rho f_a < 1 - \frac{p_a}{p} \iff f_a < \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{p_a}{p}\right) \tag{150}$$

Ció fornisce un estremo superiore per f_a. Se il membro sinistro di questa disuguaglianza é ≥ 1, allora il limite superiore per la franchigia é 1.
Poiché $f_a \geq 0$, la (150) é possibile se e solo se $p_a < p$.
Ció fornisce un estremo superiore per p_a che é < 1.
Mettendo insieme gli estremi inferiori e superiori si vede che l'intervallo di premio é dato dalla (146) e l'intervallo di franchigia é dato dalla (147). L'intervallo di premio é non vuoto se e solo se:

$$\frac{C_B}{G_+} < p$$

e questa condizione é sempre soddisfatta a causa delle (**??**) e (**??**). L'intervallo di franchigia é non vuoto se e solo se:

$$\frac{1}{\rho}\left(\rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p}\right) < \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{p_a}{p}\right) \iff \rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} < 1 - \frac{p_a}{p}$$

$$\iff \rho + \frac{C_B}{pG_+} < 1$$

e questa condizione é sempre soddisfatta a causa dellla (144). $\square$

10.0.2 Interpretazione economica delle condizioni del Teorema 14

Nel Teorema fondamentale dei contratti ragionevoli in media si é visto che la condizione necessaria (144) ha una naturale interpretazione economica in termini di guadagno atteso del rischio iniziale.

Una analoga interpretazione é possibile per gli estremi inferiore e superiore per la franchigia dati dalla (151), cioé

$$f_a \in \left(\frac{1}{\rho} \left(\rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} \right) \ , \ \frac{1}{\rho}(1 - \frac{p_a}{p}) \right] \tag{151}$$

Infatti, nelle ipotesi del Teorema 14, valgono le seguenti affermazioni.

(i) Il limite inferiore (147) per la franchigia é strettamente maggiore di zero se e solo se

$$\frac{1}{\rho} \left(\rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} \right) > 0 \iff \frac{(1-p)G_-}{pG_+} + \frac{C_B}{pG_+} > \frac{p_a}{p}$$

$$\iff (1-p)G_- + C_B > p_a G_+ \tag{152}$$

cioé se e solo se il premio é minore dell'indice del rischio iniziale piú i costi dell'assicuratore. In particolare se l'indice del rischio iniziale é molto alto, non esistono contratti ragionevoli in media a franchigia nulla.

(ii) Il limite superiore per la franchigia dato dall'intervallo (151), é minore di 1 se e solo se

$$\frac{1}{\rho}(1 - \frac{p_a}{p}) < 1 \iff 1 - \frac{p_a}{p} < \rho = \frac{(1-p)G_-}{pG_+} \iff pG_+ - p_a G_+ < (1-p)G_-$$

$$\iff pG_+ - (1-p)G_- = \langle G \rangle < p_a G_+ \tag{153}$$

Ció significa che se premio é maggiore del guadagno atteso del rischio iniziale, un contratto con una franchigia troppo alta non puó essere ragionevole in media.

10.0.3 Contratti ragionevoli in media con franchigia pre–assegnata

Il seguente teorema risponde alla domanda analoga a quella del teorema precedente ottenuta scambiando i ruoli di premio e franchigia. Come si vede, al contrario di quanto accade per il premio, sulla franchigia non ci sono vincoli per la soluzione di questo problema.

Teorema 15 Dato un rischio $\{G_+, G_-, p\}$ e un costo C_B per l'assicuratore, condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di franchigie f_a per le quali esista una coppia (f_a, p_a) ragionevole in media é che valga la condizione (145) che si puó scrivere:

$$\frac{C_B}{G_+} < p(1-\rho) \tag{154}$$

dove il membro destro é un numero in $(0,1)$. In questo caso ogni franchigia f_a nell'intervallo

$$\left(1 - \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-}\ ,\ 1\right] \ \cap\ [0,1) \tag{155}$$

ha la proprietá che per ogni premio p_a nell'intervallo

$$\left(p\rho(1-f_a) + \frac{C_B}{G_+}\ ,\ p(1-\rho f_a)\right] \tag{156}$$

la coppia (f_a, p_a) é ragionevole in media. Inoltre nessuno dei due intervalli é vuoto.

Dimostrazione. Dal Teorema 13 sappiamo che la coppia (f_a, p_a) é ragionevole in media se e solo se

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} < \rho f_a + \frac{p_a}{p} \leq 1 \tag{157}$$

e che l'intervallo associato é non vuoto se e solo se vale la (145).
Data una franchigia f_a, la prima delle disuguaglianze (157) equivale a:

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} < \rho f_a + \frac{p_a}{p} \iff \rho + \frac{C_B}{pG_+} - \rho f_a < \frac{p_a}{p}$$

$$\iff p\rho(1-f_a) + \frac{C_B}{G_+} < p_a \tag{158}$$

Ció fornisce un estremo inferiore per p_a. Poiché $p_a < 1$, la (158) é possibile se e solo se

$$p\rho - p\rho f_a + \frac{C_B}{G_+} < 1 \iff p\rho + \frac{C_B}{G_+} - 1 < p\rho f_a \iff 1 + \frac{C_B}{p\rho G_+} - \frac{1}{\rho} < f_a$$

$$\iff 1 + \frac{pG_+}{(1-p)G_-}\frac{C_B}{pG_+} - \frac{pG_+}{(1-p)G_-} = 1 + \frac{C_B}{(1-p)G_-} - \frac{pG_+}{(1-p)G_-} < f_a$$

$$\iff 1 - \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} < f_a$$

Ció fornisce un estremo inferiore per f_a. Tale estremo inferiore é < 1 poiché

$$1 - \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} < 1 \iff -\frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} < 0 \iff pG_+ > C_B$$

e quest'ultima disuguaglianza é conseguenza della seconda disuguaglianza nella (157). Infatti questa implica che $p \geq p_a$ (e l'uguaglianza puó valere solo in caso di franchigia nulla) e da ció segue che $pG_+ \geq p_a G_+ > C_B$. Quindi

$$f_a \in \left(1 - \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-}\ ,\ 1\right] \cap [0,1)$$

che é la (155). La seconda delle disuguaglianze (157) equivale a:

$$\rho f_a + \frac{p_a}{p} \leq 1 \iff \frac{p_a}{p} \leq 1 - \rho f_a \iff p_a \leq p(1-\rho f_a) \tag{159}$$

e dato che, qualunque sia $f_a \in [0,1)$, $\rho < 1$ a causa della (145) e $p(1-\rho f_a) > p(1-\rho)$, il membro destro della (159) é in $> (0,1)$. Dato che la (159) non pone alcuna condizione su f_a, l'estremo superiore per la franchigia é 1. Mettendo insieme gli estremi inferiori e superiori si vede che l'intervallo di premio é dato dalla (156) e l'intervallo di franchigia dalla (155). L'intervallo di premio é non vuoto se e solo se:

$$p\rho(1-f_a) + \frac{C_B}{G_+} < p(1-\rho f_a) \iff p\rho - p\rho f_a + \frac{C_B}{G_+} < p - p\rho f_a$$

$$\iff \frac{C_B}{G_+} < p(1-\rho)$$

cioé se vale la (154). L'intervallo di franchigia é non vuoto se e solo se:

$$1 - \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} < 1 \iff -\frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} < 0 \iff pG_+ > C_B \tag{160}$$

e si é giá visto che questa disuguaglianza é sempre soddisfatta. Perció tale intervallo non é mai vuoto ed é evidentemente contenuto in $(0,1)$ poiché $\rho < 1$ é condizione necessaria. $\square$

Problema 7 In connessione con un rischio $\{G_+, G_-, p\}$, un cliente A propone ad un assicuratore B di pagare

$$p_a G_+ = 5ME$$

per un contratto privo di franchigia

$$f_a = 0$$

con un rischio di perdita netta, in caso di catastrofe, pari a

$$G_- = 100ME$$

e con una probabilitá di successo pari a:

$$p = 90\%$$

Se voi foste l'assicuratore B, ragionando sulla base della ragionevolezza in media, accettereste questo contratto?

Soluzione. Le condizioni di coerenza sono certamente soddisfatte. Tuttavia, ricordando che (v. (107))

$$G_B(-) = -(1 - f_a)G_- + p_a G_+ - C_B \qquad ; \qquad G_B(+) = p_a G_+ - C_B$$

B calcola il suo guadagno atteso con i dati del problema e trova, in unitá di M E:

$$\begin{aligned} \langle G_B \rangle &= pG_B(+) + (1 - p)G_B(-) \\ &= p(p_a G_+ - C_B) - (1 - p)(1 - f_a)G_- + (1 - p)p_a G_+ - (1 - p)C_B \\ &= p_a G_+ - (1 - p)G_- - C_B = 5 - (1/10)100 - C_B = -5 - C_B < 0 \end{aligned}$$

Quindi conclude che il contratto proposto non solo non é ragionevole in media, ma é svantaggioso per lui. Quindi non lo accetta.

10.0.4 Interpretazione economica delle condizioni del Teorema 15

Anche nel caso di franchigia pre–assegnata esiste una naturale interpretazione economica gli estremi inferiore e superiore per la franchigia dati dalla (155), cioé

$$\left(1 - \frac{pG_+ - C_B}{(1 - p)G_-}\ ,\ 1\right] \ \cap\ [0, 1) \tag{161}$$

in termini di guadagno atteso o di indice di rischio dello schema di rischio iniziale.
Nelle ipotesi del Teorema 15 l'unico estremo degli intervalli che compaiono in tale teorema che puó non essere contenuto nell'intervallo $[0,1)$ é l'estremo inferiore per la franchigia. Tale estremo é strettamente maggiore di zero se e solo se

$$1-\frac{pG_+-C_B}{(1-p)G_-}>0 \iff 1>\frac{pG_+-C_B}{(1-p)G_-} \iff (1-p)G_->pG_+-C_B$$
$$\iff (1-p)G_-+C_B>pG_+ \tag{162}$$

cioé se e solo se la quantitá pG_+ é minore dell'indice del rischio iniziale piú i costi dell'assicuratore. In particolare se l'indice del rischio iniziale é molto alto, non esistono contratti ragionevoli in media a franchigia nulla.
Nel caso di premio pre–assegnato sappiamo che $pG_+ > p_aG_+$, ma questa condizione non é necessaria nel caso di franchigia pre–assegnata.

11 Condizioni di coerenza economica per contratti ragionevoli in media (RM)

Per definizione una coppia (f_a,p_a) che soddisfa la condizione (143) definisce un contratto se e solo se essa soddisfa le condizioni di coerenza economica (139) ($p_aG_+>C_B$), e (138) ($f_a+p_aG_+/G_-<1$).

Dato p_a, dal Teorema 14 sappiamo che una condizione necessaria é la (144), cioé:

$$\rho+\frac{C_B}{pG_+}<1 \tag{163}$$

e che, se questa vale, per ogni p_a che soddisfa

$$p_a\in\left(\frac{C_B}{G_+}\ ,\ p\right) \tag{164}$$

ogni coppia (f_a,p_a) tale che

$$f_a\in\left(\frac{1}{\rho}\left(\rho+\frac{C_B}{pG_+}-\frac{p_a}{p}\right)\ ,\ \frac{1}{\rho}\left(1-\frac{p_a}{p}\right)\right]\cap[0,1] \tag{165}$$

é ragionevole in media ed entrambi gli intervalli non sono vuoti.
Inoltre dalle (152), (153) sappiamo che il limite inferiore per la franchigia in (165) é strettamente maggiore di zero se e solo se

$$(1-p)G_- + C_B > p_a G_+ \tag{166}$$

e che il limite superiore per la franchigia in (165) é minore di 1 se e solo se

$$pG_+ - (1-p)G_- = \langle G \rangle < p_a G_+ \tag{167}$$

La seconda condizione equivale a

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} < 1 \iff \frac{1}{\rho}(\rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p}) \leq p\frac{G_+}{G_-}$$

$$\iff \rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} \leq p(\frac{1}{p} - 1) = 1 - p$$

$$\iff \rho + \frac{C_B}{pG_+} \leq \frac{p_a}{p} + (1-p) = 1 + \left(\frac{p_a}{p} - p\right)$$

Questa é sempre soddisfatta se $p_a \geq p^2$ (e quindi $p_a \in [p^2, p]$) a causa della (145). Se invece $p_a < p^2$, la (145) viene rafforzata nella:

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} < 1 - \left(p - \frac{p_a}{p}\right)$$

12 Contratti assicurativi equi in rischio (ER)

Definizione 21 Una coppia di $(f_a, p_a) \in \mathbb{R}$, relativa al rischio $\{G_+, G_-, p\}$, é detta **equa in rischio con capitali investiti** C_A **e** C_B, se soddisfa la condizione

$$\frac{r_A}{C_A} = \frac{r_B}{C_B} \tag{168}$$

Se essa soddisfa anche le condizioni di coerenza economica, cioé $(f_a, p_a) \in [0, 1) \times (0, 1)$ e

$$f_a + p_a G_+/G_- < 1 \tag{169}$$

$$p_a G_+ > C_B \tag{170}$$

diremo che questa coppia definisce un **contratto equo in rischio**.

In altri termini per definizione un contratto é equo in rischio se il rapporto tra i rischi é inversamente proporzionale al rapporto tra i capitali investiti.

Dato che in genere l'assicurato investe piú dell'assicuratore, é naturale supporre che

$$C_A > C_B > 0 \tag{171}$$

Nel seguito supporremo che tale ipotesi sia soddisfatta.

Lemma 7 Dato il rischio $\{G_+, G_-, p\}$, una coppia $(f_a, p_a) \in [0,1) \times (0,1)$ é equa in rischio se e solo se

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} \tag{172}$$

Data f_a, il corrispondente p_a é univocamente determinato da:

$$p_a = \frac{G_-}{G_+} \left((1 + C_B/G_-) \frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a \right) \tag{173}$$

Dato p_a la corrispondente f_a é univocamente determinats da:

$$f_a = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - p_a \frac{G_+}{G_-} \tag{174}$$

Dimostrazione

$$\frac{r_A}{C_A} = \frac{r_B}{C_B} \iff$$

$$\iff (1-p)\frac{G_-}{C_A}(f_a + p_a G_+/G_-) = (1-p)\frac{G_-}{C_B}(1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-)$$

$$\iff \frac{1}{C_A}(f_a + p_a G_+/G_-) = \frac{1}{C_B}\left(1 - (f_a + p_a \frac{G_+}{G_-}) + C_B/G_-\right)$$

$$\iff \frac{1}{C_A}(f_a + p_a G_+/G_-) = \frac{1}{C_B} - \frac{1}{C_B}(f_a + p_a \frac{G_+}{G_-}) + \frac{1}{G_-}$$

$$\iff \left(\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B}\right)(f_a + p_a \frac{G_+}{G_-}) = \frac{1}{C_B} + \frac{1}{G_-}$$

$$\iff \frac{C_A + C_B}{C_A C_B}(f_a + p_a \frac{G_+}{G_-}) = \frac{G_- + C_B}{C_B G_-}$$

$$\iff \frac{C_A + C_B}{C_A}(f_a + p_a\frac{G_+}{G_-}) = \frac{G_- + C_B}{G_-}$$

$$\iff (f_a + p_a\frac{G_+}{G_-}) = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right)\frac{C_A}{C_A + C_B}$$

che é la (172). In conclusione:

$$f_a + p_a\frac{G_+}{G_-} = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right)\frac{C_A}{C_A + C_B}$$

Data f_a, risolvendo la seguente equazione (172) nell'incognita p_a si trova

$$p_a\frac{G_+}{G_-} = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right)\frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a \iff p_a = \frac{G_-}{G_+}\left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right)\frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_-}{G_+}f_a$$

$$\iff p_a = \frac{G_-}{G_+}\left((1 + C_B/G_-)\frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a\right)$$

che é la (173). Dato p_a risolvendo la (172) nell'incognita f_a, si trova

$$(f_a + p_a\frac{G_+}{G_-}) = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right)\frac{C_A}{C_A + C_B} \iff f_a = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right)\frac{C_A}{C_A + C_B} - p_a\frac{G_+}{G_-}$$

che é la (174).

Teorema 16 Una coppia equa in rischio soddisfa:
(i) la condizione di coerenza economica $f_a + p_a G_+/G_- < 1$ se e solo se

$$C_A < G_- \tag{175}$$

(ii) la condizione di coerenza economica $p_a G_+ > C_B$ se e solo se

$$\frac{1}{G_+}\frac{G_- - C_B^2/C_A}{1 + C_B/C_A} > f_a \tag{176}$$

Il membro sinistro della (176) é sempre positivo. Esso é ≤ 1 se e solo se

$$G_- \leq G_+\left(1 + \frac{C_B}{C_A}\left(1 + \frac{C_B}{G_+}\right)\right) \quad \left(\text{tipicamente} \leq G_+\left(1 + 2\frac{C_B}{C_A}\right) < 3G_+\right) \tag{177}$$

Osservazione La (177) significa che il membro sinistro della (176) é un effettivo vincolo sulla franchigia solo se il rischio iniziale $\{G_+, G_-, p\}$ é **poco**

catastrofico (in particolare $G_- < 3G_+$).
Dimostrazione La (172) é compatibile con la condizione di coerenza $f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} < 1$ se e solo se

$$\left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} < 1 \iff 1 + \frac{C_B}{G_-} < \frac{C_A + C_B}{C_A} = 1 + \frac{C_B}{C_A} \iff \frac{1}{G_-} < \frac{1}{C_A}$$

che equivale alla (175). Dato che il premio é univocamente determinato dalla (173), la condizione di coerenza $p_a G_+ > C_B$ equivale a

$$p_a G_+ = G_+ \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{1}{1 + C_B/C_A} - G_+ f_a = \frac{G_- + C_B}{1 + C_B/C_A} - G_+ f_a > C_B$$

$$\iff \frac{G_- + C_B}{1 + C_B/C_A} - C_B = \frac{G_- + C_B - C_B - C_B^2/C_A}{1 + C_B/C_A} > G_+ f_a$$

$$= \frac{G_- - C_B^2/C_A}{1 + C_B/C_A} > G_+ f_a \iff \frac{1}{G_+} \frac{G_- - C_B^2/C_A}{1 + C_B/C_A} > f_a$$

che é la (176). Poiché $C_B < G_-$ (vedi (113)) e $C_B < C_A$, si ha

$$G_- - C_B^2/C_A = G_- - C_B \frac{C_B}{C_A} > G_- - C_B > 0$$

quindi il membro sinistro della (176) é positivo. Esso é minore di 1 se e solo se

$$\frac{1}{G_+} \frac{G_- - C_B^2/C_A}{1 + C_B/C_A} < 1 \iff G_- - C_B^2/C_A < G_+(1 + C_B/C_A)$$

$$\iff G_- < G_+(1 + C_B/C_A) + C_B^2/C_A$$

$$\iff G_- < G_+ \left(1 + \frac{C_B}{C_A} + \frac{C_B}{G_+} \frac{C_B}{C_A}\right) = G_+ \left(1 + \frac{C_B}{C_A} \left(1 + \frac{C_B}{G_+}\right)\right)$$

che é la (177). $\square$

Osservazione
Nel Credit Default Swaps (CDS), grazie alla garanzia di Stato, si ha sempre $C_A > G_-$, cioé la condizione di coerenza economica (175) non é mai soddisfatta. Di conseguenza, per la copertura dei CDS, i contratti equi in rischio non sono possibili.

Teorema 17 Supponiamo che le condizioni di coerenza economica (175) e (176) siano soddisfatte. Tutte e sole le franchigie f_a per cui esiste un premio p_a tale che la coppia (f_a, p_a) definisca un contratto equo in rischio sono quelle che soddisfano la condizione:

$$f_a \in \left(\frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1 \ , \ \frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} \right] \ \cap \ [0, 1) \quad (178)$$

L'intervallo in (178) é sempre non vuoto se il rischio iniziale é non catastrofico ($G_+ \geq G_-$). Se il rischio iniziale é catastrofico ($G_+ < G_-$), l'intervallo in (178) é non vuoto se e solo se:

$$G_- < 2G_+ \left(1 + \left(\frac{C_B}{C_A} - \frac{C_B}{G_+} \right) \right) \quad (179)$$

(rischio "molto poco catastrofico"). In questo caso p_a é univocamente determinato dalla (173).

Dimostrazione. Dalla (173) si deduce che le condizioni $0 < p_a < 1$ equivalgono a

$$0 < \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a \iff f_a < \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B}$$

$$\frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a < 1 \iff f_a > \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1$$

Equivalentemente:

$$f_a \in \left(\frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1 \ , \ \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} \right] \ \cap \ [0, 1)$$

D'altra parte, dalla (176) sappiamo che dev'essere:

$$\frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} > f_a$$

e, dato che $C_B/C_A < 1$,

$$\frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} < \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B}$$

Pertanto, a causa della (176), l'intervallo va ristretto a

$$f_a \in \left(\frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1 \ , \ \frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} \right] \ \cap \ [0, 1)$$

che é la (178). Quest'intervallo é non vuoto se e solo se

$$\frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1 < \frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B}$$

$$\iff \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} < \frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} + 1$$

$$\iff G_- + C_B < G_- + C_B^2/C_A + \frac{C_A + C_B}{C_A} G_+$$

$$\iff C_B < C_B^2/C_A + \frac{C_A + C_B}{C_A} G_+$$

$$\iff C_A C_B < C_B^2 + (C_A + C_B) G_+ \iff C_B(C_A - C_B) < (C_A + C_B) G_+$$

Dato che $C_B < G_+$ e $C_A - C_B < C_A + C_B$, questa disuguaglianza é sempre soddisfatta e quindi il primo intervallo dell'intersezione é sempre non vuoto. L'intersezione stessa é non vuota se e solo se

$$\frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1 < 1 \iff \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} < 2 \iff \frac{G_- + C_B}{G_+} < 2 \frac{C_A + C_B}{C_A}$$

$$\iff C_A G_- + C_A C_B < 2G_+ C_A + 2G_+ C_B \iff \frac{G_-}{G_+} + \frac{C_B}{G_+} < 2 + 2\frac{C_B}{C_A}$$

Questa disuguaglianza é sempre soddisfatta se il rischio iniziale é non catastrofico ($G_+ \geq G_-$). Infatti in questo caso

$$\frac{G_-}{G_+} + \frac{C_B}{G_+} < 2 < 2 + 2\frac{C_B}{C_A}$$

Se il rischio iniziale é catastrofico ($G_+ < G_-$), essa equivale a

$$G_- < 2G_+ \left(1 + \left(\frac{C_B}{C_A} - \frac{C_B}{G_+} \right) \right)$$

che é la (179).

Teorema 18 Supponiamo che le condizioni di coerenza economica (175) e (176) siano soddisfatte. Tutti e soli i premi p_a per cui esiste una franchigia f_a tale che la coppia (f_a, p_a) definisca un contratto equo in rischio sono quelle che soddisfano la condizione:

$$p_a \in \left(\frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1 \ , \ \frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} \right] \cap \ [0, 1) \tag{180}$$

L'intervallo in (178) é sempre non vuoto.
In questo caso p_a é univocamente determinato dalla (173).

Dimostrazione. Dalla (174) sappiamo che:
– la condizione di coerenza economica (170) implica per il premio il limite inferiore

$$p_a > \frac{C_B}{G_+}$$

– dato $p_a \in (\frac{C_B}{G_+}, 1)$, se una franchigia f_a tale che la coppia (f_a, p_a) definisca un contratto equo in rischio esiste, allora essa é determinata in modo univoco da:

$$f_a = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right)\frac{C_A}{C_A + C_B} - p_a\frac{G_+}{G_-} \tag{181}$$

– le condizioni di coerenza economica per coppie eque in rischio equivalgono a

$$C_A < G_- \tag{182}$$

$$\frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_+}\frac{C_A}{C_A + C_B} > f_a \tag{183}$$

La condizione $f_a \geq 0$ é equivalente a

$$f_a = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right)\frac{C_A}{C_A + C_B} - p_a\frac{G_+}{G_-} \geq 0 \iff \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right)\frac{C_A}{C_A + C_B} \geq p_a\frac{G_+}{G_-}$$

$$\iff \frac{G_-}{G_+}\left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right)\frac{C_A}{C_A + C_B} \geq p_a \iff \frac{G_- + C_B}{G_+}\frac{C_A}{C_A + C_B} \geq p_a$$

Quindi si deve avere

$$p_a \in (\frac{C_B}{G_+}, \frac{G_- + C_B}{G_+}\frac{C_A}{C_A + C_B}] \cap (0, 1)$$

Dato che $0 < \frac{C_B}{G_+} < 1$, l'intersezione non é mai vuota se

$$\frac{C_B}{G_+} < \frac{G_- + C_B}{G_+}\frac{C_A}{C_A + C_B} \iff C_B < (G_- + C_B)\frac{C_A}{C_A + C_B}$$

$$\iff C_A C_B + C_B^2 < C_A G_- + C_A C_B \iff C_B^2 < C_A G_- \iff C_B\frac{C_B}{C_A} < G_-$$

Ma quest'ultima condizione é sempre soddisfatta poiché, dalla (113) sappiamo che $C_B < G_-$ e per ipotesi $\frac{C_B}{C_A} < 1$. Quindi l'intersezione non é mai vuota. La condizione $f_a < 1$ é equivalente a

$$f_a = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right)\frac{C_A}{C_A + C_B} - p_a\frac{G_+}{G_-} < 1 \iff \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right)\frac{C_A}{C_A + C_B} - 1 < p_a\frac{G_+}{G_-}$$

$$\iff \frac{G_-}{G_+}\left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right)\frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_-}{G_+} < p_a$$

$$\iff \frac{G_- + C_B}{G_+}\frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_-}{G_+} < p_a$$

$$\iff \frac{G_-}{G_+}\frac{C_A}{C_A+C_B}+\frac{C_B}{G_+}\frac{C_A}{C_A+C_B}-\frac{G_-}{G_+}<p_a$$
$$\iff \frac{C_B}{G_+}\frac{C_A}{C_A+C_B}-\frac{G_-}{G_+}\left(1-\frac{C_A}{C_A+C_B}\right)<p_a$$
$$\iff \frac{C_B}{G_+}\frac{C_A}{C_A+C_B}-\frac{G_-}{G_+}\frac{C_B}{C_A+C_B}<p_a$$

D'altra parte si ha

$$\frac{C_B}{G_+}\frac{C_A}{C_A+C_B}-\frac{G_-}{G_+}\frac{C_B}{C_A+C_B}<\frac{C_B}{G_+}\frac{C_A}{C_A+C_B}<\frac{C_B}{G_+}$$

Quindi l'ultima disuguaglianza non pone ulteriori condizioni sul premio.

13 Contratti assicurativi equi in media

Dato un rischio $\{G_+, G_-, p\}$, il criterio di ragionevolezza in media non definisce un unico contratto assicurativo neanche se si fissa a priori il premio o la franchigia.
I contratti di tipo *equo* sono basati su condizioni, plausibili dal punto di vista economico, che permettono di individuare univocamente un contratto assicurativo una volta fissato il premio o la franchigia.
La condizione di equitá in media é un primo esempio di tali contratti. Essa sará esaminata in questo capitolo.
I contratti di tipo *equo* tengono conto dell'investimento sia dell'assicuratore (C_B) che dell'assicurato (C_A). Ricordiamo che, secondo la Definizione (15), un contratto tra equo in media é caratterizzato dalla condizione

$$\left\langle \frac{G_A}{C_A} \right\rangle = \left\langle \frac{G_B}{C_B} \right\rangle \tag{184}$$

che esprime il fatto che il guadagno atteso per unitá di capitale investito é la stessa per entrambi. Nel seguito ci limiteremo a trattare il caso in cui:
i capitali C_A e C_B sono costanti.
In questo caso la condizione (184) diventa

$$\frac{\langle G_A \rangle}{C_A} = \frac{\langle G_B \rangle}{C_B} \tag{185}$$

Nel seguito analizzaremo le conseguenze di questa definizione.

Definizione 22 Una coppia $(f_a, p_a) \in [0,1) \times (0,1)$, che soddisfa la condizione (185) sará detta una **coppia equa in media**. Se essa soddisfa anche le condizioni di coerenza economica (111), cioé

$$f_a + p_a G_+/G_- < 1 \tag{186}$$

$$p_a G_+ > C_B \tag{187}$$

diremo che tale coppia definisce un **contratto equo in media**.

Teorema 19 Dato il rischio $\{G_+, G_-, p\}$ le coppie (f_a, p_a), EM con capitali investiti (C_A, C_B), sono quelle che soddisfano la condizione:

$$\frac{C_A}{C_A + C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \tag{188}$$

Dimostrazione. Ricordando le funzioni guadagno di A e di B dopo il contratto:

$$G_A(+) = (1 - p_a)G_+ \tag{189}$$

$$G_A(-) = -f_a G_- - p_a G_+ = -(f_a + p_a G_+/G_-)G_- \tag{190}$$

$$G_B(+) = p_a G_+ - C_B \tag{191}$$

$$G_B(-) = -(1 - f_a)G_- + p_a G_+ - C_B \tag{192}$$

$$= -G_-(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) - C_B = -G_-[1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-]$$

la condizione (185), di equitá in media con capitali investiti (C_A, C_B), equivale a:

$$\langle \frac{G_A}{C_A} \rangle = \langle \frac{G_B}{C_B} \rangle \Leftrightarrow p(1 - p_a)\frac{G_+}{C_A} - (1 - p)\frac{G_-}{C_A}(f_a + p_a G_+/G_-) =$$

$$= p\frac{(p_a G_+ - C_B)}{C_B} - (1 - p)\frac{G_-}{C_B}(1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + \frac{C_B}{G_-}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(1 - p_a)\frac{G_+}{C_A} - (1 - p)\frac{G_-}{C_A}(f_a + p_a G_+/G_-) =$$

$$= p\frac{p_a G_+}{C_B} - p - (1 - p)\frac{G_-}{C_B}(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) - (1 - p) \Leftrightarrow$$

$$pG_+\left[\frac{1}{C_A} - p_a(\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B})\right] = (1-p)G_-\left[(f_a + p_a G_+/G_-)(\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B}) - \frac{1}{C_B}\right] - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{pG_+} + \frac{1}{C_A}\left[1 - p_a(\frac{C_A + C_B}{C_B})\right] = \rho\frac{1}{C_B}\left[(f_a + p_a G_+/G_-)(\frac{C_A + C_B}{C_A}) - 1\right]$$

$$\iff \frac{1}{pG_+} + \frac{C_A + C_B}{C_A C_B}\left(\frac{C_B}{C_A + C_B} - p_a\right) = \rho\frac{C_A + C_B}{C_A\ C_B}\left(f_a + p_a G_+/G_- - \frac{C_A}{C_A + C_B}\right)$$

Dividendo entrambi i membri per $(C_A + C_B)/C_A C_B$ si ottiene

$$\frac{C_A}{C_A + C_B}\frac{C_B}{pG_+} + \frac{C_B}{C_A + C_B} - p_a = \rho f_a + \rho p_a G_+/G_- - \rho\frac{C_A}{C_A + C_B}$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A + C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + p_a(1 + \frac{1}{p} - 1)$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A + C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p}$$

che é la (188). $\square$

Osservazione 2 Secondo la Definizione (22), una coppia $(f_a, p_a) \in [0, 1) \times (0, 1)$ che soddisfa la condizione (188) sará detta una coppia equa in media. Se essa soddisfa anche le condizioni di coerenza, diremo che tale coppia definisce un contratto.

13.1 Contratti equi in media con premio o franchigia pre–asseganti

Teorema 20 Dato p_a, che a causa della condizione di coerenza (188), deve soddisfare $p_a \in (C_B/G_+, 1)$, una $f_a \in [0, 1)$ tale che la coppia (f_a, p_a) definisca un contratto equo in media esiste se e solo se

$$p_a \in \left(\frac{C_B}{C_A + C_B}\left(\frac{C_A}{pG_+} - \rho + 1\right)\ ,\ p\left(\frac{C_A}{C_A + C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A + C_B}\right)\right] \cap$$
$$\cap (C_B/G_+, 1) \tag{193}$$

e il primo intervallo in (193) é non vuoto se e solo se valgono le due disuguaglianze:

$$\frac{C_A}{C_B} + \frac{pG_+ - C_B}{(1 - p)G_-} > 0 \iff p\frac{G_+}{C_B} + (1 - p)\frac{G_-}{C_A} > 1 \tag{194}$$

$$1+\frac{pG_+}{C_A}<\left(\frac{C_B}{C_A}+p\right)\frac{G_-}{C_B} \tag{195}$$

In questo caso l'intersezione in (193) é non vuota ed f_a é univocamente determinata dalla identitá:

$$f_a=\frac{1}{\rho}\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\frac{p_a}{p}\right) \tag{196}$$

Dimostrazione. Sappiamo che le coppie (f_a, p_a) EM sono quelli che soddisfano la condizione (188), cioé

$$
\begin{aligned}
&\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}=\rho f_a+\frac{p_a}{p}\\
\iff\ &\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\frac{p_a}{p}=\rho f_a\\
\iff\ &\frac{1}{\rho}\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\frac{p_a}{p}\right)=f_a
\end{aligned}
$$

che é la (196). Essendo $\rho > 0$, la condizione $f_a \geq 0$ equivale al seguente estremo superiore sul premio:

$$
\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\frac{p_a}{p}\geq 0
$$

$$
\iff p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}\right)\geq p_a
$$

che fornisce l'estremo superiore dell'intervallo (193). Affinché questa risulti compatibile con la condizione $p_a \in (C_B/G_+, 1)$, dev'essere

$$
p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}\right)>C_B/G_+
$$

$$
\begin{aligned}
\iff\ &\frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}+\frac{C_A}{C_A+C_B}\rho+\frac{C_B}{C_A+C_B}>\frac{C_B}{pG_+}\\
\iff\ &\frac{C_A}{C_A+C_B}\rho+\frac{C_B}{C_A+C_B}>\frac{C_B}{pG_+}\left(1-\frac{C_A}{C_A+C_B}\right)\\
\iff\ &\frac{C_A}{C_A+C_B}\rho+\frac{C_B}{C_A+C_B}>\frac{C_B}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}\\
\iff\ &\frac{C_A}{C_B}\rho+1>\frac{C_B}{pG_+}\iff\frac{C_A}{C_B}(1-p)G_-+pG_+>C_B\\
\iff\ &\frac{C_A}{C_B}+\frac{pG_+}{(1-p)G_-}>\frac{C_B}{(1-p)G_-}\iff\frac{C_A}{C_B}+\frac{pG_+}{(1-p)G_-}-\frac{C_B}{(1-p)G_-}>0\\
\iff\ &\frac{C_A}{C_B}+\frac{pG_+-C_B}{(1-p)G_-}>0 \qquad (197)
\end{aligned}
$$

che é la (194). La condizione di coerenza economica (186) equivale all'estremo inferiore sul premio:

$$
f_a+p_aG_+/G_-<1
$$

$$\iff \frac{1}{\rho}\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\frac{p_a}{p}\right)+p_aG_+/G_-<1$$

$$\iff \left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\frac{p_a}{p}\right)+\rho p_aG_+/G_-<\rho$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\frac{p_a}{p}+\frac{p_a}{p}-p_a<\rho$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\rho<p_a$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}+\frac{C_A}{C_A+C_B}\rho+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\rho<p_a$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}-\frac{C_B}{C_A+C_B}\rho+\frac{C_B}{C_A+C_B}<p_a$$

$$\iff \frac{C_B}{C_A+C_B}\left(\frac{C_A}{pG_+}-\rho+1\right)<p_a$$

che é l'estremo inferiore dell'intervallo (193).
La condizione $p_a<1$ impone che

$$\frac{C_B}{C_A+C_B}\left(\frac{C_A}{pG_+}-\rho+1\right)<1 \iff \frac{C_A}{pG_+}-\rho+1<1+\frac{C_A}{C_B}$$

$$\iff \frac{C_A}{pG_+}-\frac{(1-p)G_-}{pG_+}<\frac{C_A}{C_B} \iff 1-(1-p)\frac{G_-}{C_A}<\frac{pG_+}{C_B}$$

che coincide con la (197) e quindi con la (194). Il primo intervallo in (193) é non vuoto se e solo se

$$\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\rho<p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}\right)$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}\right)<\rho$$

$$\iff (1-p)\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}\right)<\rho$$

$$\iff (1-p)\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}\right)<\left(\frac{1}{p}-1\right)\frac{G_-}{G_+}$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}<\frac{G_-}{pG_+}\\
&\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}+\frac{C_A}{C_A+C_B}\rho+\frac{C_B}{C_A+C_B}<\frac{G_-}{pG_+}\\
&\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}+\frac{C_A}{C_A+C_B}\rho+\frac{C_B}{C_A+C_B}<\frac{G_-}{pG_+}\\
&\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}C_B+\frac{C_A}{C_A+C_B}(1-p)G_-+\frac{C_B}{C_A+C_B}pG_+<G_-\\
&\iff C_B+(1-p)G_-+\frac{C_B}{C_A}pG_+<\frac{C_A+C_B}{C_A}G_-\\
&\iff C_B\left(1+\frac{pG_+}{C_A}\right)<\left(1+\frac{C_B}{C_A}\right)G_- -(1-p)G_-\\
&\iff C_B\left(1+\frac{pG_+}{C_A}\right)<\left(1+\frac{C_B}{C_A}-1+p\right)G_-\\
&\iff C_B\left(1+\frac{pG_+}{C_A}\right)<\left(\frac{C_B}{C_A}+p\right)G_-\\
&\iff 1+\frac{pG_+}{C_A}<\left(\frac{C_B}{C_A}+p\right)\frac{G_-}{C_B}
\end{aligned}
$$

che é la (195).

Corollario 2 *La (195) puó essere soddisfatta se e solo se*

$$\frac{C_B}{G_-} < \frac{C_B}{C_A} + p \tag{198}$$

In questo caso, una condizione sufficiente affinché valgano le due disuguaglianze (194) e (195) é che risulti

$$p > \frac{C_B}{G_-} \tag{199}$$

Dimostrazione. La (195) puó essere soddisfatta se e solo se

$$0 < \left(\frac{C_B}{C_A} + p\right)\frac{G_-}{C_B} - 1 \iff 1 < \left(\frac{C_B}{C_A} + p\right)\frac{G_-}{C_B} \iff \frac{C_B}{G_-} < \frac{C_B}{C_A} + p$$

In questo caso le due disuguaglianze (194) e (195) equivalgono rispettivamente a

$$1 - (1-p)\frac{G_-}{C_A} < \frac{pG_+}{C_B} \iff C_B - (1-p)C_B\frac{G_-}{C_A} < pG_+$$

$$\frac{pG_+}{C_A} < \left(\frac{C_B}{C_A} + p\right)\frac{G_-}{C_B} - 1 \iff pG_+ < (C_B + pC_A)\frac{G_-}{C_B} - C_A = G_- + pG_-\frac{C_A}{C_B} - C_A$$

Pertanto il primo intervallo in (193) é non vuoto se e solo se vale la condizione di compatibilitá:

$$C_B - (1-p)C_B\frac{G_-}{C_A} < G_- + pG_-\frac{C_A}{C_B} - C_A$$

$$\iff C_A + C_B < G_- + pG_-\frac{C_A}{C_B} + (1-p)G_-\frac{C_B}{C_A}$$

$$\iff C_A + C_B < G_-\left(1 + p\frac{C_A}{C_B} + (1-p)\frac{C_B}{C_A}\right)$$

$$\iff \frac{C_A}{G_-} + \frac{C_B}{G_-} < 1 + p\frac{C_A}{C_B} + (1-p)\frac{C_B}{C_A}$$

$$\iff 0 < \left(1 - \frac{C_B}{G_-}\right) + \left(p\frac{C_A}{C_B} - \frac{C_A}{G_-}\right) + (1-p)\frac{C_B}{C_A}$$

$$\iff 0 < \left(1 - \frac{C_B}{G_-}\right) + \frac{C_A}{C_B}\left(p - \frac{C_B}{G_-}\right) + (1-p)\frac{C_B}{C_A}$$

e la condizione (199) assicura che

$$1 - \frac{C_B}{G_-} > p - \frac{C_B}{G_-} > 0 \qquad ;$$

Quindi

$$\left(1 - \frac{C_B}{G_-}\right) + \frac{C_A}{C_B}\left(p - \frac{C_B}{G_-}\right) + (1-p)\frac{C_B}{C_A} > (1-p)\frac{C_B}{C_A} > 0$$

Teorema 21 Data $f_a \in (0,1)$, un $p_a \in (C_B/G_+, 1)$ tale che la coppia (f_a, p_a) definisca un contratto equo in media esiste se e solo se

$$f_a \in [0,1) \cap \tag{200}$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A+C_B} - \frac{1}{p}\right) \ , \ \frac{1}{\rho}\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A+C_B}\right)\right)$$

e il secondo intervallo in (200) é non vuoto se e solo se

$$\frac{C_A}{C_B} + \frac{pG_+}{(1-p)G_-} > \frac{C_B}{(1-p)G_-} \tag{201}$$

$$\frac{C_B}{pG_-}\left(1 + p\frac{G_+}{C_A}\right) \leq 1 + \frac{C_B}{C_A} \tag{202}$$

$$\frac{C_A}{G_+} + (1-p)\frac{G_-}{G_+} < \frac{C_A}{C_B} + (1-p) \tag{203}$$

In questo caso l'intersezione in (200) é non vuota e p_a é univocamente determinato dalla identitá:

$$p_a = p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A+C_B} - \rho f_a\right) \tag{204}$$

Dimostrazione. Sappiamo che le coppie (f_a, p_a) EM sono quelli che soddisfano la condizione (188), cioé

$$\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A+C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p}$$

$$\iff p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A+C_B} - \rho f_a\right) = p_a$$

Quindi, se un premio p_a tale che la coppia (f_a, p_a) sia equa in media esiste, esso é necessariamente dato dalla (204).
Essendo $p > 0$, la condizione $p_a > C_B/G_+$ implica il seguente estremo superiore sulla franchigia:

$$p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\rho f_a\right)=p_a>\frac{C_B}{G_+}$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\rho f_a>\frac{C_B}{pG_+}$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}+\frac{C_A}{C_A+C_B}\rho+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\frac{C_B}{pG_+}>\rho f_a$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\rho+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\frac{C_B}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}>\rho f_a$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}+\frac{1}{\rho}\frac{C_B}{C_A+C_B}\left(1-\frac{C_B}{pG_+}\right)>f_a$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}+\frac{C_B}{C_A+C_B}\left(\frac{pG_+}{(1-p)G_-}-\frac{C_B}{(1-p)G_-}\right)>f_a$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\left(1+\frac{C_B}{C_A}\frac{pG_+-C_B}{(1-p)G_-}\right)>f_a$$

Affinché tale disuguaglianza sia possibile é necessario che

$$1+\frac{C_B}{C_A}\frac{pG_+-C_B}{(1-p)G_-}>0 \iff \frac{C_A}{C_B}+\frac{pG_+}{(1-p)G_-}>\frac{C_B}{(1-p)G_-}$$

che é la (201).

Per lo stesso motivo, la condizione $p_a < 1$ implica il seguente estremo inferiore sulla franchigia:

$$p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\rho f_a\right)<1$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\rho f_a<\frac{1}{p}$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\frac{1}{p}<\rho f_a$$

$$\iff \frac{1}{\rho}\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\frac{1}{p}\right)<f_a$$

Essendo $f_a<1$, ció implica che

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\frac{1}{p}\right)<1$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\frac{1}{p}<\rho$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}+\frac{C_A}{C_A+C_B}\rho+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\rho<\frac{1}{p}$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}+\frac{C_B}{C_A+C_B}\rho+\frac{C_B}{C_A+C_B}<\frac{1}{p}$$

$$\iff \frac{C_A}{pG_+}+\rho+1<\frac{1}{p}\frac{C_A+C_B}{C_B}$$

$$\iff \frac{C_A}{G_+}+(1-p)\frac{G_-}{G_+}+p<\frac{C_A}{C_B}+1$$

$$\iff \frac{C_A}{G_+}+(1-p)\frac{G_-}{G_+}<\frac{C_A}{C_B}+(1-p)$$

che é la (203).

La condizione di coerenza economica (186) equivale all'estremo superiore sulla franchigia:

$$f_a+p_aG_+/G_-<1$$

$$\iff f_a+p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\rho f_a\right)G_+/G_-<1$$

$$\iff f_a+p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)\frac{G_+}{G_-}+p\frac{C_B}{C_A+C_B}\frac{G_+}{G_-}-p\rho\frac{G_+}{G_-}f_a<1$$

$$\iff f_a+p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)\frac{G_+}{G_-}+p\frac{C_B}{C_A+C_B}\frac{G_+}{G_-}-(1-p)f_a<1$$

$$\iff p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)\frac{G_+}{G_-}+p\frac{C_B}{C_A+C_B}\frac{G_+}{G_-}+pf_a<1$$

$$\iff pf_a<1-p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)\frac{G_+}{G_-}+p\frac{C_B}{C_A+C_B}\frac{G_+}{G_-}$$

ció richiede innanzitutto che

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq 1-p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)\frac{G_+}{G_-}+p\frac{C_B}{C_A+C_B}\frac{G_+}{G_-} \\
\iff & p\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)\frac{G_+}{G_-}+p\frac{C_B}{C_A+C_B}\frac{G_+}{G_-} \leq 1 \\
\iff & \frac{C_A}{C_A+C_B}\frac{C_B}{pG_+}+\rho+\frac{C_B}{C_A+C_B} \leq \frac{G_-}{pG_+} \\
\iff & \frac{C_A}{C_A+C_B}C_B+\rho pG_+ +\frac{C_B}{C_A+C_B}pG_+ \leq G_- \\
\iff & \frac{C_A}{C_A+C_B}C_B+(1-p)G_- +\frac{C_B}{C_A+C_B}pG_+ \leq G_- \\
\iff & \frac{C_A}{C_A+C_B}C_B+\frac{C_B}{C_A+C_B}pG_+ \leq pG_- \\
\iff & C_B+\frac{C_B}{C_A}pG_+ \leq \frac{C_A+C_B}{C_A}pG_- \\
\iff & 1+\frac{pG_+}{C_A} \leq \left(1+\frac{C_B}{C_A}\right)\frac{pG_-}{C_B} \\
\iff & \frac{C_B}{pG_-}+\frac{C_B}{C_A}\frac{G_+}{G_-} \leq 1+\frac{C_B}{C_A} \iff \frac{C_B}{pG_-}\left(1+p\frac{G_+}{C_A}\right) \leq 1+\frac{C_B}{C_A}
\end{aligned}
$$

che é la (202).

La compatibilitá tra estremo inferiore e estremo superiore richiede che

$$
\frac{1}{\rho}\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}-\frac{1}{p}\right) < \frac{1}{\rho}\left(\frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}\right)
$$

che é automaticamente soddisfatta. Quindi l'intervallo (200), delle franchigie ammissibili, non é mai vuoto se le condizioni (202) e (203) sono soddisfatte.

13.2 Guadagni attesi dopo un contratto equo in media

Proposizione 8 *Nelle condizioni del Teorema (20), dato p_a, sia f_a l'unica franchigia tale che il contratto (f_a, p_a) sia equo in media. Allora risulta*

$$\langle G_A \rangle = \frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\langle G \rangle - C_B \right) \tag{205}$$

$$\langle G_B \rangle = \frac{C_B}{C_A + C_B} \left(\langle G \rangle - C_B \right) \tag{206}$$

Dimostrazione. Per il teorema sulla conservazione del guadagno

$$G_A + G_B = G - C_B \cdot 1$$

quindi

$$\langle G_A \rangle + \langle G_B \rangle = \langle G \rangle - C_B \iff \langle G_B \rangle = \langle G \rangle - \langle G_A \rangle - C_B$$

Da ció, usando la definizione di contratto equo in media, si deduce che in un tale contratto:

$$\frac{\langle G_A \rangle}{C_A} = \frac{\langle G_B \rangle}{C_B} = \frac{\langle G \rangle - \langle G_A \rangle - C_B}{C_B} \iff \langle G_A \rangle \left(\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} \right) = \frac{\langle G \rangle}{C_B} - 1$$

$$\iff \langle G_A \rangle \left(\frac{C_A + C_B}{C_A C_B} \right) = \frac{\langle G \rangle}{C_B} - 1 \iff \langle G_A \rangle \left(\frac{C_A + C_B}{C_A} \right) = \langle G \rangle - C_B$$

$$\iff \langle G_A \rangle = \frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\langle G \rangle - C_B \right)$$

che equivale alla (205). Similmente, usando ancora il teorema della conservazione del guadagno:

$$\langle G_B \rangle = \langle G \rangle - \langle G_A \rangle - C_B$$

$$= \langle G \rangle - \frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\langle G \rangle - C_B \right) - C_B = \langle G \rangle - \frac{C_A}{C_A + C_B} \langle G \rangle + \frac{C_A}{C_A + C_B} C_B - C_B$$

$$= \frac{C_B}{C_A + C_B} \langle G \rangle - \frac{C_B}{C_A + C_B} C_B = \frac{C_B}{C_A + C_B} \left(\langle G \rangle - C_B \right)$$

□

13.3 Contratti equi e ragionevoli in media

Teorema 22 Un contratto equo in media é anche ragionevole in media se e solo se

$$\langle G \rangle > C_B \tag{207}$$

(quindi il rischio iniziale dev'essere di tipo investimento). In questo caso il guadagno atteso sia di A che di B é strettamente positivo.

Dimostrazione La disuguaglianze (205), (206) mostrano che $\langle G_A \rangle$ e $\langle G_B \rangle$ sono positivi se e solo se $\langle G \rangle \geq 0$. D'altra parte, in un contratto ragionevole in media dev'essere $\langle G_B \rangle > 0$. Un tale contratto puó essere equo in media se e solo se $\langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle > 0$. Da ció segue l'asserto.

Osservazione.
Se un contratto é sia equo che ragionevole in media, allora

$$pG_+ > \langle G \rangle = pG_+ - (1-p)G_- > C_B$$

13.4 Contratti assicurativi universalmente equi in media

Dal Teorema (19) sappiamo che, dato il rischio $\{G_+, G_-, p\}$, le coppie (f_a, p_a), EM con capitali investiti (C_A, C_B), sono quelle che soddisfano la condizione (188), cioé la (213)

$$\frac{C_A}{C_A + C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \tag{208}$$

In molti casi pur senza conoscere esattamente la probabilitá di successo, é possibile che assicurato e assicuratore concordino nel valutarla pittosto alta. In questi casi le considerazioni che seguono mostrano che é possibile determinare un contratto equo in media **indipendentemente dalla probabilitá** p. Poiché, come si é detto piú volte in numerose situazioni risulta estremamente difficile stimare la probabilitá di successo p, contratti del genere possono essere molto interessanti.

Definizione 23 Un contratto (f_a, p_a), relativo al rischio iniziale $\{G_+, G_-, p\}$, sará detto **universalmente equo in media** se esiste un valore p_0 della probabilitá di successo con la proprietá che tale contratto risulti equo in media **qualunque sia il valore della probabilitá** $p \in (p_0, 1)$

Teorema 23 Un contratto universalmente equo in media per il rischio $\{G_+, G_-, p\}$, con capitali investiti C_A, $C_B < G_+$, esiste se e solo se

$$\frac{G_+}{G_-} \leq \frac{C_A}{C_B} \tag{209}$$

$$C_A < G_- \tag{210}$$

In questo caso esso é unico ed é dato da

$$f_a = \frac{C_B}{C_A + C_B} \left(\frac{C_A}{C_B} - \frac{G_+}{G_-} \right) \tag{211}$$

$$p_a = \frac{C_B}{C_A + C_B} \left(\frac{C_A}{G_+} + 1 \right) \tag{212}$$

Tale contratto sará anche ragionevole in media se e solo se vale la condizione (207) (cioé $\langle G \rangle > C_B$).

Dimostrazione. Dal Teorema 19 sappiamo che, dato il rischio $\{G_+, G_-, p\}$, le coppie (f_a, p_a), EM con capitali investiti (C_A, C_B), sono quelle che soddisfano la condizione (188), cioé la (213)

$$\frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \tag{213}$$

Se esiste una coppia (f_a, p_a) indipendente da p e che soddisfa la (213), essa é necessariamente unica. Infatti, supponendo per assurdo che due coppie $(f'_a, p'_a) \neq (f_a, p_a)$ soddisfino la (213), si dovrebbe avere

$$\rho f_a + \frac{p_a}{p} = \rho f'_a + \frac{p'_a}{p} \iff p\rho f_a + p_a = p\rho f'_a + p'_a$$

$$\iff p\rho(f_a - f'_a) = p'_a - p_a$$

e quindi, essendo $(f'_a, p'_a) \neq (f_a, p_a)$, dovrebbe essere $f'_a \neq f_a$ e $p'_a \neq p_a$.
Da ció seguirebbe che

$$\frac{(1-p)G_-}{G_+} = \frac{p'_a - p_a}{f_a - f'_a}$$

che é impossibile poiché il membro sinistro dipende da p e il destro, per ipotesi, no. Mostriamo ora che una tale coppia esiste.

Se, nella (213), f_a e p_a non dipendono da $p \in (p_0, 1)$, allora prendendo il limite della (213) per $p \to 1$, si trova

$$\frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{G_+} + \frac{C_B}{C_A + C_B} = p_a \iff \frac{C_B}{C_A + C_B} \left(\frac{C_A}{G_+} + 1 \right) = p_a$$

che é la (212).
Se il membro destro della (212) corrisponde a un possibile premio, allora la franchigia che rende il contratto EM é univocamente definita dalla (188), cioé:

$$\frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{1}{p} \frac{C_B}{C_A + C_B} \left(\frac{C_A}{G_+} + 1 \right)$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{1}{p} \frac{C_B}{C_A + C_B} \left(\frac{C_A}{G_+} + 1 \right) = \rho f_a$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\frac{C_B}{pG_+} + \frac{(1-p)G_-}{pG_+} \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \frac{C_A}{G_+} \right) = \frac{(1-p)G_-}{pG_+} f_a$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\frac{pG_+}{(1-p)G_-} \frac{C_B}{pG_+} + \frac{pG_+}{(1-p)G_-} \frac{(1-p)G_-}{pG_+} \right)$$

$$+ \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{pG_+}{(1-p)G_-} \left(1 - \frac{1}{p} \right) - \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{pG_+}{(1-p)G_-} \frac{C_A}{pG_+} = f_a$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\frac{C_B}{(1-p)G_-} + 1 \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{pG_+}{(1-p)G_-} \frac{p-1}{p} - \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{C_A}{(1-p)G_-} = f_a$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{(1-p)G_-} + \frac{C_A}{C_A + C_B}$$

$$- \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{G_+}{G_-} - \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{C_A}{(1-p)G_-} = f_a$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{G_+}{G_-} = f_a$$

$$\iff \frac{C_B}{C_A + C_B} \left(\frac{C_A}{C_B} - \frac{G_+}{G_-} \right) = f_a$$

che é la (211). Quindi anche f_a é indipendente da p.

Il valore di p_a dato da (212) é certamente > 0 e soddisfa la condizione di coerenza economica (187) se e solo se

$$p_a > C_B/G_+ \iff \frac{C_B}{C_A + C_B}\left(\frac{C_A}{G_+} + 1\right) > \frac{C_B}{G_+} \iff \frac{C_A}{G_+} + 1 > \frac{C_A + C_B}{G_+}$$

$$\iff 1 > \frac{C_B}{G_+}$$

che é soddisfatta per ipotesi. Tale valore di p_a é < 1 poiché $C_B < G_+$ e

$$\frac{C_B}{C_A + C_B}\left(\frac{C_A}{G_+} + 1\right) = \frac{C_A}{C_A + C_B}\frac{C_B}{G_+} + \frac{C_B}{C_A + C_B} < \frac{C_A}{C_A + C_B} + \frac{C_B}{C_A + C_B} = 1$$

Il valore (211) corrisponde a una possibile franchigia se e solo se le due seguenti disuguaglianze sono soddisfatte:

$$f_a := \frac{C_B}{C_A + C_B}\left(\frac{C_A}{C_B} - \frac{G_+}{G_-}\right) \geq 0$$

$$f_a + p_a G_+/G_- < 1$$

La prima disuguaglianza equivale a

$$\frac{C_A}{C_B} \geq \frac{G_+}{G_-}$$

che é la (209). La seconda disuguaglianza equivale a

$$f_a + p_a G_+/G_- < 1$$

$$\iff \frac{C_B}{C_A + C_B}\left(\frac{C_A}{C_B} - \frac{G_+}{G_-}\right) + \frac{C_B}{C_A + C_B}\left(\frac{C_A}{G_+} + 1\right) G_+/G_- < 1$$

$$\iff \frac{C_A}{C_B} - \frac{G_+}{G_-} + \left(\frac{C_A}{G_+} + 1\right)\frac{G_+}{G_-} < \frac{C_A + C_B}{C_B}$$

$$\iff \frac{C_A}{C_B} - \frac{G_+}{G_-} + \frac{C_A}{G_+}\frac{G_+}{G_-} + \frac{G_+}{G_-} < 1 + \frac{C_A}{C_B} \iff \frac{C_A}{G_-} < 1$$

che é la (210). Infine, essendo equo in media per costruzione, il contratto dato da (211) e (212) é anche ragionevole in media se e solo se vale la condizione (207).

14 Opzioni

Un'opzione é un esempio di *titolo derivato*, ossia di un titolo i cui rendimenti dipendono in qualche modo dai rendimenti di altri titoli. Essa consiste in un contratto tra due parti, un *titolare* (*holder*) ed un *garante* (*writer*).
Esistono diversi tipi di opzioni, che differiscono tra loro per la scelta della funzione guadagno. Nel seguito limiteremo la nostra analisi alle opzioni europee di *acquisto* (o di tipo "call").
Nel caso di un'opzione europea di tipo *call* il titolare, dietro corresponsione di un *premio*, detto *prezzo dell'opzione* (o *prime*), acquista il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare dal garante un attivo finanziario rischioso, *titolo sottostante* (*underlying risky asset* o *underlying security*), ad una scadenza (*maturity*) e ad un prezzo (*esercizio* o *strike price*) pattuiti all'atto della stipula del contratto.
Il garante in cambio del premio si fa carico dell'obbligo di garantire al titolare la possibilitá di scelta.
Un'opzione europea di *vendita* (*put option*) differisce dalla *call option* per il fatto che il titolare acquista il diritto di vendere al garante il titolo sottostante alla scadenza e al prezzo pattuiti all'atto della stipula del contratto.

14.1 Modelli matematici di opzioni call europee

Intuitivamente un portafoglio, relativo a un insieme di merci $\hat{S}$ (beni, azioni, ...) nell'orizzonte temporale T, é definito dalla storia dell'insieme $\hat{S}$ nel periodo di tempo T.
Il modello matematico di tale storia é un processo stocastico.

Definizione 24 *Un'opzione é definita da* 5 *oggetti*

$$\{(\Omega, P), T, (S_t)_{t\in T}, K, \pi\} \tag{214}$$

dove:
(i) (Ω, P) *é uno spazio di probabilitá, detto spazio delle possibilitá o degli stati del mondo*
(ii) $T \subseteq \mathbb{R}$ *é un sotto–insieme limitato di* $\mathbb{R}$, *detto orizzonte temporale. L'estremo superiore* $\overline{t}$ *di* T, *é detto scadenza dell'opzione.*
(iii) $\forall\, t \in T$, $S_t : \Omega \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ *é una variabile casuale a valori reali positivi detta valore del portafoglio sottostante al tempo* t.

(iv) $K \in \mathbb{R}_+$ é un numero positivo detto strike price.
(v) $\pi \in \mathbb{R}_+$ é un numero positivo detto prezzo dell'opzione.

Osservazione. La definizione (24) va intesa nel senso che le 5 quantitá in (214) caratterizzano l'opzione nel suo complesso, ma non nel senso che tali quantitá sono note a priori.
In effetti per il writer solo l'informazione S_0 é nota a priori e tutto il resto é da determinare.
L'holder si trova in una condizione analoga. Infatti, anche se spesso $\{S_0, K, \pi\}$ sono stabiliti dal garante e quindi dati per l'holder, questi deve lo stesso valutarli autonomamente per determinare se sono giusti o no.
Le motivazioni di A nell'acquisto di una opzione possono essere:
(i) Diminuire la perdita potenziale (cioé il rischio) accettando una diminuzione del guadagno potenziale.
(ii) Aumentare il guadagno potenziale accettando una perdita certa.
(iii) Aumentare il guadagno potenziale e diminuire la perdita potenziale.

Il **problema fondamentale dell'asset pricing** consiste nel trovare un modo ragionevole di esprimere il prezzo π in funzione degli altri dati del problema.

Nel seguito studieremo questo problema nella situazione semplificata definita dalle seguenti ipotesi:
(i) lo spazio delle possibilitá é binario

$$\Omega = \{+, -\} \tag{215}$$

(ii) l'orizzonte temporale consiste di 2 soli istanti:

$$T = \{0, 1\}$$

(iii) il prezzo del portafoglio sottostante all'istante 0 é fissato e noto:

$$S_0 = \text{ costante } \in \mathbb{R}_+$$

Denoteremo

$$S_1 = (S_1^+, S_1^-) = (S_1(+), S_1(-))$$

la variabile casuale a due valori corrispondente al valore attualizzato del portafoglio sottostante l'opzione al tempo 1, e

$$p = p(+)$$

la probabilitá dell'evento + che, al tempo 1, il prezzo dell'opzione sia salito. Per definizione quindi risulta:

$$S_1^- \leq S_0 \leq S_1^+ \tag{216}$$

In queste condizioni, in cui lo spazio Ω é fissato dalla (215), una opzione é definita dai seguenti 6 numeri:

$$\{p, S_0, S_1^+, S_1^-, K, \pi\} \tag{217}$$

Nel modello matematico standard usato in letteratura la funzione guadagno di A (che per noi é l'holder) dopo l'acquisto dell'opzione é allora:

$$G_A = \max\{S_1 - K, 0\} - \pi \tag{218}$$

Similmente la funzione guadagno di B (che per noi é il writer) dopo l'acquisto dell'opzione da parte di A é

$$G_B = -\max\{S_1 - K, 0\} + \pi = -G_A \tag{219}$$

Osservare che

$$G_B = -G_A \tag{220}$$

e che, prima del contratto di opzione, la funzione guadagno di A nel caso in cui decidesse di comprare direttamente il titolo sottostante, sarebbe:

$$G_A^0(+) = S_1^+ - S_0 \; ; \quad G_A^0(-) = -(S_0 - S_1^-) \tag{221}$$

Mentre B, prima del contratto, non ha alcun guadagno relativo al rischio in considerazione. Per scrivere esplicitamente le funzioni guadagno dopo il contratto distinguiamo 2 casi:
Caso (I): $S_1^- \leq K$

$$G_A(+) = S_1^+ - K - \pi \qquad ; \qquad G_A(-) = -\pi \tag{222}$$

$$G_B(+) = -(S_1^+ - K) + \pi \qquad ; \qquad G_B(-) = \pi \tag{223}$$

Caso (II): $S_1^- > K$

$$G_A(+) = S_1^+ - K - \pi \qquad ; \qquad G_A(-) = S_1^- - K - \pi \tag{224}$$

$$G_B(+) = -(S_1^+ - K) + \pi \qquad ; \qquad G_B(-) = -(S_1^- - K) + \pi \tag{225}$$

Osservare che in entrambi i casi sussiste la relazione:

$$G_A = -G_B \tag{226}$$

ció significa che **il contratto di opzione é una scommessa simmetrica**.

Osservazione. La condizione (II) (cioé $S_1^- > K$) di fatto non si riscontra nelle opzioni reali, ma in linea di principio non é necessariamente incoerente. Infatti se, oltre a tale condizione, sono anche soddisfatte le condizioni

$$S_1^- - K < \pi < S_1^+ - K$$

allora l'opzione equivale a una scommessa simmetrica in cui, se esce $+$, B paga $S_1^+ - K - \pi$ ad A e, se esce $-$, B potrebbe guadagnare $\pi - (S_1^- - K)$ se fosse stato cosí accorto da fissare $\pi > (S_1^- - K)$.

14.2 Le condizioni di coerenza economica

Nella definizione (217) di opzione (binaria) non abbiamo posto vincoli sui 6 numeri che in essa compaiono.
Nella presente sezione esamineremo alcune *condizioni di coerenza economica*

in assenza delle quali risulterebbe irragionevole, per almeno uno dei contraenti, stipulare il contratto di opzione.
Concentreremo la nostra attenzione su quelle condizioni che non dipendono dalla definizione di prezzo dell'opzione. Nel seguito mostreremo che la definizione di prezzo dell'opzione puó introdurre ulteriori condizioni di coerenza (v. per esempio il Corollario (3)).

Lemma 8 *Indipendentemente dal criterio con cui é stato stabilito il prezzo, se la disuguaglianza*

$$S_1^- < S_0 \tag{227}$$

non é soddisfatta allora il contratto di opzione é economicamente incoerente.

Dimostrazione. Se la disuguaglianza (227) non é soddisfatta allora, se $S_1^- \geq S_0$, acquistando direttamente il titolo soggiacente, A non potrebbe mai perdere e guadagnerebbe con probabilitá positiva. Quindi non avrebbe motivo di acquistare l'opzione.
Osservazione. La condizione $S_1^+ \leq S_0$ non conduce necessariamente a incoerenze per quanto riguarda il contratto di opzione. Infatti, dato che il contratto di opzione non dipende da S_0, anche se questa condizione é soddisfatta é possibile scegliere K e π in modo tale che il contratto tra A e B risulti una scommessa leale. Il fatto che il contratto d'opzione non dipenda esplicitamente da S_0 é un segnale che tale contratto non é ben costruito. Infatti un contratto ben costruito dovrebbe tener conto di tutti i dati disponibili e non solo di una parte di essi.
Osservazione. La seguente condizione rafforza una delle disuguaglianze (227).

Lemma 9 *Se la condizione (227) é soddisfatta, allora indipendentemente dal criterio con cui é stato stabilito il prezzo, se la disuguaglianza*

$$\pi < S_0 - S_1^- \Leftrightarrow S_1^- + \pi < S_0 \tag{228}$$

non é soddisfatta, il contratto di opzione é economicamente incoerente.

Dimostrazione. Se la disuguaglianza (228) non é soddisfatta allora il prezzo pagato da A per corprirsi con l'opzione sarebbe superiore alla massima cifra che A potrebbe perdere se acquistasse direttamente il titolo soggiacente. Quindi A non avrebbe motivo di acquistare l'opzione.
Osservazione. Notare che questa condizione di coerenza é indipendente da S_1^+.

Lemma 10 *Indipendentemente da come é stato stabilito il prezzo, se le disuguaglianze*

$$S_1^- < K + \pi < S_1^+ \tag{229}$$

non sono soddisfatte, il contratto é economicamente incoerente.

Dimostrazione. Se risultasse $S_1^+ - K \leq \pi$, allora la funzione guadagno di A risulterebbe sempre negativa e non nulla. Perció A non sottoscriverebbe l'opzione. Supponiamo soddisfatta questa disuguaglianza.
Se risultasse $S_1^- - K \geq \pi$, allora eserciterebbe l'opzione sia nel caso $+$ che nel caso $-$. Quindi la funzione guadagno di B sarebbe sempre negativa e strettamente negativa in almeno un punto. Perció B non sottoscriverebbe l'opzione.
Osservazione. Se $S_1^- - K \leq 0$ (caso standard) allora $S_1^- \leq K \leq K + \pi$ e la prima delle disuguaglianze (229) é automaticamente soddisfatta.

14.3 La scommessa soggiacente a un'opzione

Abbiamo visto che una opzione equivale a una scommessa simmetrica tra A e B. Nell'ipotesi

$$S_1^- \leq K$$

Il rischio per A, associato all'opzione é definito da

$$\{S_1^+ - K - \pi, \pi, p\} \tag{230}$$

Quindi, se tutto ció che si sa sull'avvenire o no degli eventi $+$ e $-$ é la loro probabilitá (assenza di *insider trading*), é naturale convenire che un prezzo π dell'opzione é *accettabile, se rende tale scommessa leale*.

Osservazione. Se questa scelta sia davvero giusta o no dipende anche da come si attualizza al tempo di maturitá il prezzo pagato da A al tempo iniziale. In genere si usa il tasso bancario, ma questo é un punto delicato che sará discusso in seguito. In ogni caso, la differenza tra il prezzo attualizzato e quello non attualizzato é piccola per orizzonti temporali relativamente corti e prezzi non altissimi.

Teorema 24 *Per un'opzione (217) soddisfacente le condizioni di coerenza della sezione (14.2) le seguenti condizioni sono equivalenti:*
(i) Il guadagno atteso sia di A che di B é positivo.

$$\langle G_A \rangle, \langle G_B \rangle \geq 0$$

(ii) La scommessa associata al rischio (230) é leale in media i.e.:

$$\langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle = 0 \tag{231}$$

(iii) Il prezzo π é dato da:

$$\pi = p(S_1^+ - K) \tag{232}$$

Osservazione. La formula del prezzo leale (232) stabilisce una notevole differenza tra la logica del prezzo di una opzione e quella di una assicurazione, in particolare per i rischi d'uso. In questi ultimi infatti il premio leale in media é l'indice di rischio, cioé *la perdita pesata con la probabilitá*. Nel caso dell'opzione invece il premio diventa *il guadagno lordo pesato con la sua probabilitá*.
Dimostrazione.

$$\langle G_A \rangle \geq 0 \Leftrightarrow (S_1^+ - K - \pi)p \geq (1-p)\pi \Leftrightarrow (S_1^+ - K)p \geq \pi$$

D'altra parte

$$\langle G_B \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle G_A \rangle \leq 0 \Leftrightarrow (S_1^+ - K)p \leq \pi$$

e in entrambi i casi l'equivalenza vale sia per la disuguaglianza stretta che per l'uguaglianza. Quindi il valore simultaneo delle due disuguaglianze equivale sia alla (231) che alla (232).

Definizione 25 *Il* ***prezzo leale in media*** *dell'opzione*

$$\{(\{+,-\},(p,1-p)), S_0, S_1^{\pm}, K, \pi\}$$

é quello definito dalla (232).

Osservazione. Nella formula (232), del prezzo leale in media, non compaiono né S_0 né S_1^-.
Osservazione Dopo un contratto con prezzo leale, qualunque cosa accada, A perde il costo dell'opzione, che é

$$\pi = p(S_1^+ - K)$$

Se accade l'evento $+$, A guadagna

$$S_1^+ - (K+\pi) = S_1^+ - K - pS_1^+ + pK = (1-p)S_1^+ - (1-p)K = (1-p)(S_1^+ - K)$$

Se il portafoglio sottostante l'opzione soddisfa la condizione (di tipo investimento)

$$p > 1/2$$

ció significa che A perde con certezza una cifra piú alta di quella che guadagnerebbe se le cose andassero bene. In altre parole: se il portafoglio sottostante ha una probabilitá di salire maggiore di quella del lancio di una moneta non truccata, il titolare sa a priori che il suo eventuale guadagno dall'opzione sará inferiore al prezzo pagato (con certezza) per l'opzione stessa.

Osservazione (1). Il Teorema (24) va interpretato nel senso che, se A e B possono trovare un accordo sui seguenti punti:
– sul valore della probabilitá p dell'evento $+$
– sul fatto che, se l'evento $+$ accade, al tempo 1 il titolo varrá S_1^+
– sullo strike price K
– sulla scelta del criterio di scommessa leale per determinare il prezzo
allora, dopo questo accordo, A e B possono determinare univocamente il prezzo π attraverso l'identitá (232), cioé

$$\pi = p(S_1^+ - K)$$

Corollario 3 *Supponendo soddisfatta la (227), il prezzo leale in media (232) soddisfa le condizioni di coerenza (228) e (229) se e solo se vale una delle due coppie mutuamente esclusive di condizioni:*

$$S_1^- \leq K < S_1^+ \tag{233}$$

$$p < \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - K} \tag{234}$$

Oppure

$$K < S_1^- < S_1^+ \tag{235}$$

$$p \in \left(\frac{S_1^- - K}{S_1^+ - K}, \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - K} \right) \tag{236}$$

$$2S_1^- < K + S_0 \tag{237}$$

Dimostrazione. Sia $\pi = p(S_1^+ - K)$ il prezzo leale. Allora la condizione di coerenza (228) diventa:

$$S_1^- + \pi = S_1^- + p(S_1^+ - K) < S_0 \Leftrightarrow p < \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - K}$$

che é la (234). D'altra parte si ha

$$K + \pi = K + p(S_1^+ - K) = (1-p)K + pS_1^+$$

quindi, per il prezzo leale, la seconda disuguaglianza nella condizione di coerenza (229) diventa:

$$(1-p)K + pS_1^+ < S_1^+ \Leftrightarrow (1-p)K < (1-p)S_1^+ \Leftrightarrow K < S_1^+$$

che é la seconda disuguaglianza in (233). Infine la prima disuguaglianza nella condizione di coerenza (229) diventa:

$$S_1^- < K + \pi = K + p(S_1^+ - K) = (1-p)K + pS_1^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_1^- - pS_1^+ < (1-p)K \Leftrightarrow p(S_1^- - S_1^+) < (1-p)(K - S_1^-) \tag{238}$$

Se $S_1^- \leq K$, questa é sempre soddisfatta dato che il membro sinistro é negativo e quello destro positivo. Perció, in questo caso, le condizioni di coerenza (228) e (229) sono equivalenti a (233) e (234). Viceversa, se $S_1^- > K$, allora la (238) equivale a

$$p(S_1^+ - S_1^-) > (1-p)(S_1^- - K) \Leftrightarrow p(S_1^+ - K) > (S_1^- - K) \Leftrightarrow p > \frac{S_1^- - K}{S_1^+ - K}$$

e quindi le condizioni di coerenza (228) e (229) diventano equivalenti a (235) e (237). La (237) é la condizione affinché l'intervallo (237) non risulti vuoto.

Problema. Le condizioni di coerenza sono

$$S_1^- + \pi < S_0 < S_1^+$$

$$S_1^- < K + \pi < S_1^+$$

Se fosse

$$S_0 < K + \pi$$

Si avrebbe un'unica catena

$$S_1^- + \pi < S_0 < K + \pi < S_1^+$$

Puó essere

$$S_0 > K + \pi?$$

Non sembrano esserci ragioni economiche che impediscano questa disuguaglianza. Essa significa che il writer ritiene che il portafoglio soggiacente scenderá molto. Se fosse

$$S_1^- \geq K$$

allora la (238) sarebbe possibile se e solo se $S_1^+ \leq K$ che é incompatibile con $K + \pi < S_1^+$.

14.4 Il postulato di Black e Scholes e l'ipotesi di non arbitraggio

Nella sezione precedente si é visto che, per fissare in modo univoco il prezzo che rende leale la scommessa soggiacente a un'opzione, é necessario che A e B trovino un accordo sul valore della probabilitá p.
Non esiste un modo univoco per trovare tale accordo. Quindi é necessario che i presupposti soggiacenti a ciascuna scelta siano esplicitati in modo da poterli paragonare e scegliere in piena consapevolezza.
La proposta di Black e Scholes consiste nel convenire di calcolare la probabilitá p, dell'evento $+$, postulando che, se A comprasse al tempo 0 il titolo stesso invece che l'opzione, allora il suo rischio al tempo 1, cioé $\{S_1^+ - S_0, S_0 - S_1^-, p\}$ corrisponderebbe ad una scommessa leale. Come si é visto nella Sezione (6.1) questo postulato corrisponde all' **ipotesi di non arbitraggio**.
Dal Teorema (2) sappiamo che ció equivale a postulare che

$$p = \frac{1}{1 + \frac{S_1^+ - S_0}{S_0 - S_1^-}} = \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-} \tag{239}$$

Dopo il contratto la funzione guadagno di A cambia come descritto dalle uguaglianze (222), ma la probabilitá degli eventi $+$ e $-$ non cambia.
La giustificazione standard addotta per l'introduzione di questo postulato é che, se ci fosse una situazione di arbitraggio, la gente la sfrutterebbe e questa rapidamente scomparirebbe. In questo senso il non arbitraggio, in economia puó essere paragonato all'equilibrio termodinamico in fisica.
La validitá empirica di questa ipotesi merita un'indagine approfondita poiché, come si é detto piú volte, un investitore accorto fa del suo meglio per evitare investimenti il cui guadagno atteso sia reputato nullo.

Pertanto la scelta (239) di p determina univocamente, attraverso la (232) il prezzo π dell'opzione.

Teorema 25 *Se p é data dalla (239) allora il prezzo π dell'opzione é dato da:*

$$\pi = p(S_1^+ - K) = \frac{(S_0 - S_1^-)(S_1^+ - K)}{S_1^+ - S_1^-} \tag{240}$$

Dimostrazione. Sostituendo la (239) nella (232) si trova la (240).

Definizione 26 *Il prezzo dell'opzione (S_1^+, S_0, S_1^-, K) definito dalla (240) viene detto prezzo di Black & Scholes e denotato π_{BS}.*

Osservazione. La proposta di Black & Scholes fornisce un criterio definito per dare un prezzo alle opzioni, ma é basata su un postulato la cui validitá economica deve essere verificata caso per caso. é interessante quindi analizzare altri criteri che cerchino di limitare al massimo la componente di arbitrarietá nella definizione del prezzo di un'opzione.

Lemma 11 *Il prezzo leale é inferiore al prezzo di Black & Scholes se e solo se il rischio associato al portafoglio sottostante non é di tipo investimento. In altre parole:*

$$\pi_L < \pi_{BS} \Leftrightarrow \langle G \rangle < 0$$

Dimostrazione

$$\pi_L < \pi_{BS} \Leftrightarrow p(S_1^+ - K) < \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-}(S_1^+ - K) \Leftrightarrow p < \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-}$$

D'altra parte é noto che il guadagno atteso $\langle G \rangle$ é funzione strettamente crescente della probabilitá. Quindi, dato che $(S_0 - S_1^-)/(S_1^+ - S_1^-)$ é il valore della probabilitá che rende il gioco leale, si ha che:

$$p < \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-} \Leftrightarrow \langle G \rangle < 0$$

Osservazione.
Il Lemma (11) significa che, nei casi in cui il postulato di Black & Scholes non é valido perché il titolare é stato abbastanza oculato da puntare su un portafoglio di tipo investimento, se il garante ha fissato il prezzo di una opzione sullo stesso portafoglio secondo la regola di Black & Scholes, allora sta richiedendo un prezzo strettamente inferiore a quello che dovrebbe richiedere, aumentando notevolmente il suo rischio.

Corollario 4 *Il prezzo di BS é coerente se e solo se lo strike price soddisfa la condizione:*

$$K > S_1^- \tag{241}$$

Dimostrazione. Il prezzo di Black e Scholes é:

$$\pi_{BS} = \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-}\left(S_1^+ - K\right)$$

Quindi la condizione di coerenza economica (228) diventa

$$\frac{S_0 - S_-^-}{S_1^+ - S_1^-}(S_1^+ - K) < S_0 - S_1^- \Leftrightarrow \frac{S_1^+ - K}{S_1^+ - S_1^-} < 1 \Leftrightarrow S_1^+ - K < S_1^+ - S_1^- \Leftrightarrow K > S_1^-$$

Quindi, se π é prezzo di Black e Scholes, la (228) implica la (241). La prima delle condizioni di coerenza (229) é banalmente soddisfatta data la (241). La seconda equivale a

$$S_1^+ - K > \pi_{BS} = \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-}(S_1^+ - K) \Leftrightarrow 1 > \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-}$$

che é identicamente soddisfatta.

15 Inequivalenza tra opzioni e assicurazioni

Da quanto detto sopra segue che, intuitivamente, un'opzione call europea é assimilabile ad un'assicurazione con la quale l'assicurato (holder) limita a priori la sua perdita al prezzo d'esercizio e l'assicuratore (writer) incassa un premio per il rischio sopportato.
Per dare un significato preciso a questa idea intuitiva, occorre innanzitutto precisare una relazione di equivalenza tra assicurazioni e opzioni.
La seguente definizione sembra molto naturale.

Definizione 27 Un contratto C_1, con funzioni guadagno $G_A^{(1)}$, $G_B^{(1)}$, é detto equivalente a un contratto C_2 con funzioni guadagno $G_A^{(2)}$, $G_B^{(2)}$ se le funzioni guadagno di A e di B, relative ai due contratti, coincidono:

$$G_A^{(1)} = G_A^{(2)} \qquad ; \qquad G_B^{(1)} = G_B^{(2)}$$

Teorema 26 Nessun contratto assicurativo (p_a, f_a, C_B) su un rischio $\{G_+, G_-, p\}$ puó essere equivalente ad una scommessa simmetrica relativa allo stesso rischio.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che un contratto assicurativo (p_a, f_a), relativo al rischio $\{G_+, G_-, p\}$, sia equivalente ad una scommessa simmetrica relativa allo stesso rischio e denotiamo $G_A^{(ass)}$, $G_B^{(ass)}$ (risp. $G_A^{(ss)}$, $G_B^{(ss)}$) le funzioni guadagno di A e B dopo il contratto di assicurazione (risp. di scommessa simmetrica). Allora, secondo la Definizione (27) si deve avere

$$G_A^{(ass)} = G_A^{(ss)} \qquad ; \qquad G_B^{(ass)} = G_B^{(ss)}$$

D'altra parte, in una scommessa simmetrica

$$G_A^{(ss)} = -G_B^{(ss)}$$

Di conseguenza:

$$G_A^{(ass)} = G_A^{(ss)} = -G_B^{(ss)} = -G_B^{(ass)}$$

Ricordando le espressioni (104), (105), (106), (107) delle funzioni dell'assicurato e dell'assicuratore dopo il contratto assicurativo, ció implica che

$$G_A(-) = -f_a G_- - p_a G_+ = -G_B(-) \tag{242}$$

$$= -(-(1-f_a)G_- + p_a G_+ - C_B) = (1-f_a)G_- - p_a G_+ + C_B$$

$$\iff 0 = G_- + C_B$$

che é impossibile poiché G_- e C_B sono strettamente positivi.
Concludiamo che nessun contratto assicurativo relativo al rischio $\{G_+, G_-, p\}$ puó essere equivalente ad una scommessa simmetrica relativa allo stesso rischio, che é la tesi.

Osservazione.
Osserviamo per completezza che anche l'uguaglianza $G_A^{(ass)}(+) = -G_B^{(ass)}(+)$ conduce ad una contraddizione. Si ha

$$G_A^{(ass)}(+) = (1-p_a)G_+ = -G_B^{(ass)}(+) = -p_a G_+ + C_B$$

$$\Leftrightarrow p_a G_+ - G_+ = p_a G_+ - C_B \Leftrightarrow G_+ = C_B$$

che contraddice la condizione di coerenza economica (112).

Corollario 5 Nessn contratto di opzione, puó essere equivalente a un contratto assicurativo.

Dimostrazione Dal Teorema (26) segue che nessun contratto assicurativo puó essere equivalente ad una scommessa simmetrica. Poiché un contratto di opzione é una particolare scommessa simmetrica, esso non puó essere equivalente ad alcun contratto assicurativo.

16 Nuovo approccio alla determinazione del prezzo dell'opzione

Il Teorema (**??**), eventualmente con la sostituzione (**??**), mostra che, dato il meccanismo dell'opzione, la funzione guadagno di A risulta univocamente determinata e a sua volta determina univocamente i valori (f_a, p_a) e quindi il contratto assicurativo.
Conclusione:
poiché non c'é modo di equiparare un contratto di opzione call Europea ad un contratto assicurativo, l'unico modo per trasformare l'opzione, da gioco d'azzardo ad assicurazione al fine di limitare le perdite, é quello di cambiare il meccanismo dell'opzione assimilandolo fin dall'inizio a un meccanismo assicurativo.

17 Problemi del 16-05-2018

Problema 8 *Dato il rischio*

$$\{G_+, G_-, p\} = \{250.000E, 400.000E, 85\%\}$$

Determinare per quali valori del parametro C_B il contratto assicurativo

$$(f_a, p_a) = (0,4\ ,\ 0,65) \tag{243}$$

é ragionevole in media.

Problema 9 *Per quali valori del parametro C_B e del capitale C_A investito da A il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é anche equo in media?*

Problema 10 *(i) Per quali valori del parametro C_B e del capitale C_A investito da A il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é anche equo in rischio?*

(ii) Per quali valori del parametro C_B e del capitale C_A investito da A il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é anche equo sia in media che in rischio?

18 Problemi su opzioni e assicurazioni

Problema 11 Consideriamo un portafoglio con i seguenti parametri:

$$\{S_0 = 900 \text{ KE} \ , \ S_1^+ = 2.000 \text{ KE} \ , \ S_1^- = 100 \text{ KE}\} \tag{244}$$

Determinare per quali valori dei parametri liberi (capitali investiti, costi, probabilitá di successo) é possibile stipulare un contratto assicurativo equo in rischio su tale portafoglio.

Soluzione.

Il rischio associato al portafoglio $S \equiv \{S_0, S_1^+, S_1^-, p\}$ é

$$\{G_+, G_-, p\} := \{S_1^+ - S_0, S_0 - S_1^-, p\} = \{1.100, 800, p\} \tag{245}$$

Dato che in questo problema la franchigia é assegnata, dobbiamo applicare il Teorema 17 a questo rischio.
Sappiamo da questo teorema che tutte e sole le franchigie f_a per cui esiste un premio p_a tale che la coppia (f_a, p_a) definisca un contratto equo in rischio sono quelle che soddisfano la condizione:

$$f_a \in \left(\frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1 \ , \ \frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} \right] \cap \ [0, 1) \tag{246}$$

Nel nostro caso

$$G_+ = 1.100 > G_- = 800$$

e l'intervallo (246) diventa

$$f_a \in \left(\frac{800 + C_B}{1100} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1 \ , \ \frac{800 + C_B^2/C_A}{1100} \frac{C_A}{C_A + C_B} \right] \cap \ [0, 1) \tag{247}$$

Dal Teorema 17 sappiamo che tale intervallo in non é vuoto.
Quindi richiedere $f_a = 0$ pone la prima condizione necessaria:

$$\frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1 = \frac{800 + C_B}{1100} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1 \leq 0$$

$$\iff \frac{800 + C_B}{1100} \frac{C_A}{C_A + C_B} \leq 1 \iff (800 + C_B)C_A \leq 1100(C_A + C_B)$$

$$\iff 800C_A + C_B C_A \leq 1100C_A + 1100C_B \iff C_B C_A \leq 300C_A + 1100C_B$$

$$\iff C_B(C_A - 1100) \leq 300C_A \iff C_B \leq \frac{300C_A}{C_A - 1100} = \frac{300}{1 - 1100/C_A}$$

$$\iff C_B \leq \frac{300}{1 - 1100/C_A} \tag{248}$$

Poiché $C_B > 0$, una tale condizione é possibile se e solo se

$$1 - 1100/C_A > 0 \iff 1 > 1100/C_A \iff C_A > 1100 \tag{249}$$

D'altra parte, dal Teorema 16 sappiamo che, per una coppia equa in rischio, la condizione di coerenza economica $f_a + p_a G_+/G_- < 1$ equivale a

$$C_A < G_- \text{ (= 800 nel nostro caso)} \tag{250}$$

Dato che la (250) contraddice la (250), concludiamo che:
per nessun valore dei parametri liberi é possibile stipulare un contratto assicurativo equo in rischio sul portafoglio in questione

Problema 12 Dato il portafoglio (244), cioé:

$$\{S_0 = 900 \text{ KE}\ ,\ S_1^+ = 2.000 \text{ KE}\ ,\ S_1^- = 100 \text{ KE}\} \tag{251}$$

determinare:
(i) un intervallo di probabilitá di crescita del portafoglio $S \equiv \{S_0, S_1^+, S_1^-\}$
(ii) un intervallo di premio p_a
(iii) uno strike price K
tali che, in un contratto assicurativo ragionevole in media e a franchigia nulla per il rischio associato al portafoglio $S \equiv \{S_0, S_1^+, S_1^-\}$, il premio pagato per il contratto assicurativo risulti uguale al prezzo ottenuto con la prescrizione di Black e Scholes.

Se questa condizione fosse soddisfatta, se voi foste il titolare, scegliereste di fare il contratto assicurativo o l'opzione?
Stessa domanda se voi foste il garante.

Soluzione.

Si é visto che il rischio associato al portafoglio $S \equiv \{S_0, S_1^+, S_1^-, p\}$ é dato dalla , cio'e

$$\{G_+, G_-, p\} := \{S_1^+ - S_0, S_0 - S_1^-, p\} = \{1.100, 800, p\} \tag{252}$$

Dato che in questo problema la franchigia é assegnata, dobbiamo applicare il Teorema 15 a questo rischio.
Da questo Teorema sappiamo che, dato un rischio $\{G_+, G_-, p\}$ e un costo C_B per l'assicuratore, condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di franchigie f_a per le quali esista una coppia (f_a, p_a) ragionevole in media é che valga la condizione

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \iff \frac{C_B}{G_+} < p(1 - \rho) \tag{253}$$

In particolare dev'essere $\rho \in (0, 1)$. Con i dati del problema

$$\rho = \frac{(1-p)G_-}{pG_+} = \frac{(1-p)8}{p11} < 1$$

$$\iff \frac{(1-p)8}{p11} < 1 \iff 8 - p8 < p11 \iff 8 < p19$$

Quindi una prima condizione sulla probabilitá é che

$$p > \frac{8}{19} \sim 0,4210 \tag{254}$$

La condizione necessaria diventa

$$\frac{C_B}{p1100} + \frac{(1-p)800}{p1100} < 1 \iff C_B + (1-p)800 < p1100 \iff C_B < p1100 - (1-p)800$$

$$C_B < p1900 - 800 \tag{255}$$

che fornisce una stima superiore di C_B in funzione della probabilitá p.
Da (254) segue che

$$p1900 - 800 > \frac{8}{19}1900 - 800 = 0$$

quindi il membro destro é positivo. Pertanto

$$C_B \in (0\ ,\ p1900 - 800) \qquad ; \qquad p \in \left(\frac{8}{19}\ ,\ 1\right) \sim (0{,}421\ ,\ 1) \tag{256}$$

Il Teorema 15 afferma che, se la condizione necessaria (254) é soddisfatta, allora ogni franchigia f_a nell'intervallo

$$\left(1 - \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-}\ ,\ 1\right] \cap [0,1) \tag{257}$$

ha la proprietá che per ogni premio p_a nell'intervallo

$$\left(p\rho(1-f_a) + \frac{C_B}{G_+}\ ,\ p(1-\rho f_a)\right] \tag{258}$$

la coppia (f_a, p_a) é ragionevole in media. Inoltre nessuno dei due intervalli é vuoto. La condizione (257) é compatibile con la scelta $f_a = 0$ se e solo se

$$1 - \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} \leq 0 \iff 1 \leq \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} \iff (1-p)G_- \leq pG_+ - C_B$$

$$\iff C_B \leq pG_+ - (1-p)G_- = p1100 - (1-p)800$$
$$\iff C_B \leq p1100 - 800 + p800 = p1900 - 800$$

e questa é identicamente soddisfatta a causa della (256).
Quindi, con i dati del problema, l'intervallo di franchigia (257) diventa

$$[0,1) \tag{259}$$

mentre l'intervallo di premio (258) diventa

$$\left(p\rho + \frac{C_B}{G_+}\ ,\ p\right] = \left((1-p)\frac{8}{11} + \frac{C_B}{11}\ ,\ p\right] \tag{260}$$

e sappiamo dalla teoria che questo intervallo non é vuoto (lo si puó anche verificare direttamente).
Per verificare le condizioni di coerenza economica, essendo la franchigia data, dobbiamo applicare le condizioni della Proposizione 4 che, con i dati del problema, diventano

$$C_B < G_- = 800 \tag{261}$$

$f_a = 0$ e, dato che $G_+ > G_-$:

$$p_a \in \left(\frac{C_B}{G_+} \; , \; (1 - f_a)\frac{G_-}{G_+} \right) = \left(\frac{C_B}{1100} \; , \; \frac{8}{11} \right) \sim \left(\frac{C_B}{1100} \; , \; 0,7272 \right) \tag{262}$$

e sappiamo dalla teoria che l'intervallo non é vuoto (nel nostro caso ció segue subito da (261) e (262)).
Riassumendo: per p e C_B negli intervalli (256), per ogni p_a nell'intervallo (262), il contratto assicurativo $(0, p_a)$ é ragionevole in media.

Paragone con una opzione di Black e Scholes

Vogliamo ora determinare uno strike price K per l'opzione associata al portafoglio (251) in modo tale che il prezzo di Black e Scholes dell'opzione risulti uguale al premio totale del contratto assicurativo. Ció significa che K deve soddisfare la condizione

$$\pi_{BS} = p_{BS}(S_1^+ - K) = p_a G_+$$

$$\iff K = S_1^+ - \frac{p_a G_+}{p_{BS}} \tag{263}$$

Nel nostro caso, ricordando la (244), cioé

$$\{S_0 = 900 \text{ KE} \; , \; S_1^+ = 2.000 \text{ KE} \; , \; S_1^- = 100 \text{ KE}\}$$

si ha

$$p_{BS} = \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-} = \frac{800}{1900} = \frac{8}{19} \sim 0,4210$$

e l'espressione (263) di K diventa

$$K = S_1^+ - \frac{p_a G_+}{p_{BS}} = 2000 - \frac{19}{8} p_a 1100 = 2000 - 19 \times 137,5 p_a$$

$$\iff K = 2000 - p_a 2612,5 \tag{264}$$

Dato che $K > 0$, si ha

$$2000 > p_a 2612,5 \iff \frac{2000}{2612,5} \sim 0,7655 > p_a$$

Dal Corollario 4 sappiamo che il prezzo di BS é coerente se e solo se lo strike price soddisfa la condizione:

$$K > S_1^- \tag{265}$$

che con i dati del problema e la (264) diventa

$$K = 2000 - p_a 2612,5 > 100 \iff 1900 > p_a 2612,5$$

$$\iff \frac{1900}{2612,5} = \frac{8}{11} \sim 0,7272 > p_a$$

Questa é sempre soddisfatta data la (262). In conclusione:
per ogni p_a nell'intervallo (262), il premio totale del contratto assicurativo $(0, p_a)$ é uguale al prezzo di Black e Scholes dell'opzione associata al portafoglio (251) con strike price dato dalla (264).

aaa

Con un tale contratto d'opzione, se il portafoglio sale, il titolare A paga

$$K + \pi_{BS} = 2000 - p_a 2612,5 + p_a 1100 = 2000 - p_a 1512,5$$

con un guadagno di

$$S_1^+ - (K + \pi_{BS}) = p_a 1512,5$$

Comprando le azioni e assicurandosi contro il ribasso, se il portafoglio sale, il costo totale per l'assicurato A é

$$S_0 + p_a 1100 = 900 + p_a 1100$$

con un guadagno di

$$S_1^+ - (S_0 + p_a 1100) = (1 - p_a) 1100$$

Osserviamo che

$$p_a 1512,5 < (1 - p_a) 1100 = 1100 - p_a 1100 \iff p_a (1512,5 + 1100) = p_a 2612,5 < 1100$$

$$\iff p_a < \frac{1100}{2612,5} \sim 0,4210$$

e che l'estremo superiore per p_a é molto alto dato che corrisponde a un premio pari a poco meno della metá del guadagno, che certamente non é una

situazione molto comune.
Ció implica che, in situazioni realistiche p_a, e quindi il guadagno di A in caso di evento positivo, risulterá molto minore nel contratto di opzione che in quello di assicurazione.
Con lo stesso contratto, se il valore del portafoglio scende, dato che l'assicurazione é senza franchigia, A perde la stessa cifra in entrambi i contratti, cioé $\pi_{BS} = p_a 1100$.
Concludiamo che, in situazioni realistiche, il contratto di assicurazione é globalmente migliore per A rispetto a quello di opzione.

Consideriamo ora il punto di vista dell'assicuratore o del garante.
Con il contratto assicurativo, se il portafoglio sale, l'assicuratore B guadagna $p_a 1100 - C_B$ e se scende, perde $800 + C_B$.
Con il contratto d'opzione, se il portafoglio sale, il garante perde esattamente quello che il titolare guadagna, cioé $p_a 1512,5$. Se scende, il garante B guadagna $\pi_{BS} = p_a 1100$.
Comparando le perdite di B in caso di evento negativo per lui si trova che

$$p_a 1512,5 < 800 + C_B - p_a 1100 \iff p_a 2612,5 < 800 + C_B$$

Per valori di p_a molto vicini al massimo, diciamo $p_a = 0,42$, si trova

$$0,42 \times 2612,5 = 1097,25 < 800 + C_B \iff 297,25 < C_B$$

Cioé, diciamo $p_a = 0,42$, la perdita di B nel contratto d'opzione puó essere minore di quella nel contratto di assicurazione solo quando i costi C_B di quest'ultimo per il singolo contratto sono superiori a $297,25$ KE.
Dato che costi di quest'ordine di grandezza sono decisamente troppo alti per un singolo contratto, concludiamo che, per valori realistici di C_B, la perdita di B nel contratto d'opzione sará maggiore di quella nel contratto di assicurazione.

Quindi il contratto di assicurazione é piú conveniente del contratto di opzione sia pe A che3 per B.

19 Problemi risolti

Problema 13 *Dato il rischio*

$$\{G_+, G_-, p\} = \{250.000E, 400.000E, 85\%\}$$

Determinare per quali valori del parametro C_B il contratto assicurativo

$$(f_a, p_a) = (0,4\ ,\ 0,65) \tag{266}$$

é ragionevole in media.

Soluzione. La condizione di coerenza

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} < 1 \tag{267}$$

non dipende da C_B ed é necessaria per l'esistenza di un contratto assicurativo ragionevole in media. Quindi conviene verificarla per prima. Infatti, se essa non é soddisfatta é inutile andare oltre. In unitá di KE si trova:

$$p_a G_+ = 0,65 \cdot 250 = \frac{65}{100} 250 = \frac{65}{2} 5 = \frac{325}{2}$$

$$p_a \frac{G_+}{G_-} = \frac{325}{2G_-} = \frac{325}{2 \cdot 400} = \frac{325}{800} = 0,4062 \tag{268}$$

Pertanto

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = 0,4 + 0,4062 = 0,8062 < 1$$

Quindi la condizione di coerenza (267) é soddisfatta.

Anche la condizione necessaria per la esistenza di coppie ragionevoli in media

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \tag{269}$$

non dipende dal contratto (p_a, f_a). Nel nostro caso:

$$\rho = (\frac{100}{85} - 1)\frac{400.000}{250.000} = (\frac{3}{17})\frac{40}{25} = \frac{120}{425} \sim 0,282 < 1$$

$$pG_+ = \frac{85}{100} \times 250.000 = 85 \times 2500 = 212.500$$

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \iff \frac{C_B}{212.500} + 0,282 < 1$$

$$\iff \frac{C_B}{212.500} < 1 - 0,282 \iff \frac{C_B}{212.500} < 0,718$$

$$C_B < 0,718 \times 212.500 = 152.575\ E$$

Quindi la condizione necessaria (269) é soddisfatta per tutti i C_B nell'intervallo

$$C_B \in (0\ ,\ 152.575) \tag{270}$$

Fissato un C_B in tale intervallo, le coppie RM sono caratterizzate dalle disuguaglianze:

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) < p_a \leq 1 - \rho(f_a + p_a G_+/G_-) \tag{271}$$

Tra queste, quelle che soddisfano la condizione di ammissibilitá, definiscono un contratto. Nel nostro caso

$$\frac{G_+}{G_-} = \frac{250.000}{400.000} = \frac{25}{40} = 0,625 \tag{272}$$

e si é visto nella (268) che $p_a G_+/G_- = 0,4062$. Quindi la prima disuguaglianza nella (271) é

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) < p_a \iff \frac{C_B}{212.500} + 0,282(1 - (0,4 + 0,4062)) < 0,65$$

$$\iff \frac{C_B}{212.500} + 0,282(1 - 0,8062) = \frac{C_B}{212.500} + 0,282(0,1938) \sim \frac{C_B}{212.500} + 0,0546$$

$$\iff \frac{C_B}{212.500} < 0,65 - 0,0546 = 0,5953 \iff C_B < 0,5953 \times 212.500 = 126.511,535$$

che restringe i C_B all'intervallo

$$C_B \in (0\ ,\ 126.511,535) \tag{273}$$

La seconda disuguaglianza nella (271) é

$$0,65 \leq 1 - 0,282(0,4 + 0,4062) \iff 0,65 \leq 1 - 0,0546 \iff 0,65 \leq 0,9454$$

che é automaticamente soddisfatta e non dipende da C_B.
Abbiamo giá visto che la condizione di coerenza economica:

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} < 1$$

é soddisfatta. Resta quindi da trovare quali C_B soddisfano la condizione di coerenza economica:

$$C_B < p_a G_+ \iff C_B < \frac{325}{2} = 162,5 \tag{274}$$

Ma dalla (273) sappiamo che, in unitá di E, $C_B \in (0\ ,\ 126.511,535)$. Dato che

$$126.511,535 < 162.500$$

concludiamo che tutti i C_B nell'intervallo (273) soddisfano la condizione di coerenza economica (274).
Quindi per tutti questi C_B il contratto é ragionevole in media.

Problema 14 *Per quali valori del parametro C_B e del capitale C_A investito da A il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é anche equo in media?*

Soluzione . Dal Problema 13 sappiamo che per tutti i C_B nell'intervallo (273) e qualunque sia C_A (che non compare in questo problema) il contratto (266) é ragionevole in media. Dal Teorema 19 sappiamo che, dato il rischio $\{G_+, G_-, p\}$ le coppie (f_a, p_a), EM con capitali investiti (C_A, C_B), sono quelle che soddisfano la condizione:

$$\frac{C_A}{C_A + C_B}\left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \tag{275}$$

Questa, nel caso in esame diventa

$$\frac{C_A}{C_A + C_B}\left(\frac{C_B}{\frac{85}{100}250.000} + 0,282\right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = 0,282 \cdot 0,4 + \frac{100 \cdot 0,65}{85}$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A + C_B}\frac{C_B}{85 \times 2500} + \frac{C_A}{C_A + C_B}0,282 + \frac{C_B}{C_A + C_B} = 0,1128 + 0,7647$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A + C_B}\frac{C_B}{212.500} + \frac{C_A}{C_A + C_B}0,282 + \frac{C_B}{C_A + C_B} = 0,8775$$

$$\iff C_A\frac{C_B}{212.500} + C_A 0,282 + C_B = 0,8775 C_A + 0,8775 C_B$$

$$\iff C_B\left(\frac{C_A}{212.500} + (1 - 0,8775)\right) = C_A(0,8775 - 0,282)$$

$$\iff C_B\left(\frac{C_A}{212.500}+0,1225\right)=C_A0,5955$$

$$\iff C_B=\frac{0,5955C_A}{\frac{C_A}{212.500}+0,1225} \tag{276}$$

Questa condizione é compatibile con la (273), cioé $C_B \in (0\ ,\ 126.511,535)$ se e solo se

$$\begin{aligned} C_B=\frac{0,5955C_A}{\frac{C_A}{212.500}+0,1225} &< 126.511,535 \\ \iff 0,5955C_A &< C_A\frac{126511,535}{212500}+126511,535\times 0,1225 \\ &= C_A0,5953+15497,6630 \\ \iff C_A(0,5955-0,5953) &= 0,0002C_A < 15497,6630 \\ \iff C_A &< \frac{15497,6630}{0,0002}=77.348.315 \end{aligned} \tag{277}$$

cioé il capitale investito da A deve essere minore di $77.348.315\ E$.
Se questa condizione é soddisfatta concludiamo che il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é sia ragionevole che equo in media se e solo se C_B é dato dalla (276).

Problema 15 *(i) Per quali valori del parametro C_B e del capitale C_A investito da A il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é oltre che ragionevole ed equo in media anche equo in rischio?*

(ii) Esistono valori del parametro C_B e del capitale C_A investito da A tali che il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é, oltre che ragionevole ed equo in media, anche equo in rischio?

Soluzione . Dal Lemma (**??**) sappiamo che, dato il rischio $\{G_+,G_-,p\}$, una coppia $(f_a,p_a)\in[0,1)\times(0,1)$ é equa in rischio se e solo se

$$f_a+p_a\frac{G_+}{G_-}=\left(1+\frac{C_B}{G_-}\right)\frac{C_A}{C_A+C_B} \tag{278}$$

Nel caso in esame $(f_a,p_a)=(0,4\ ,\ 0,65)$, $G_-=400.000E$ e, nella (268) si é giá calcolato che $p_aG_+/G_-=0,4062$. Quindi, in unitá di E, la (278) diventa:

$$0,4+0,4062=0,8062=\left(1+\frac{C_B}{400.000}\right)\frac{C_A}{C_A+C_B}$$

$$\iff 0,8062 = \frac{C_A}{C_A + C_B} + \frac{C_B}{400.000}\frac{C_A}{C_A + C_B}$$

$$\iff 0,8062C_A + 0,8062C_B = C_A + \frac{C_A}{400.000}C_B$$

$$\iff (0,8062 - 1)C_A = -0,138C_A = \left(\frac{C_A}{400.000} - 0,8062\right)C_B$$

$$\iff \frac{0,138C_A}{0,8062 - \frac{C_A}{400.000}} = C_B \tag{279}$$

Questa disuguaglianza é possibile se e solo se

$$0 < 0,8062 - \frac{C_A}{400.000} \iff \frac{C_A}{400.000} < 0,8062$$

$$\iff C_A < 0,8062 \times 400.000 = 322.480 \tag{280}$$

Ció restringe il valore di da 77.348.315 E che é il valore dato dalla (277) a 322.480. Se la condizione (280) é soddisfatta, il valore di C_B dato dalla (279) é compatibile con la (273), cioé

$$C_B = \frac{0,138C_A}{0,8062 - \frac{C_A}{400.000}} < 126511,535$$

$$\iff 0,138C_A < 126511,535 \times 0,8062 - C_A\frac{126.511,535}{400.000}$$

$$= 126511,5995 - C_A 0,3162$$

$$\iff C_A(0,138 + 0,3162) = C_A 0,4542 < 126511,5995$$

$$\iff C_A(0,138 + 0,3162) = C_A < \frac{126511,5995}{0,4542} = 278.537,2071$$

Questa condizione restringe ulteriormente il capitale C_A investito da A da 322.480 dato dalla (280) a

$$C_A < 278.537,2071 \tag{281}$$

Se questa é soddisfatta, il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é oltre che ragionevole in media anche equo in rischio se e solo se C_B é dato dalla (279). Ció risponde alla domanda (i).

Per rispondere alla domanda (ii) ricordiamo che per l'equitá in rischio la condizione (281) é necessaria. Se questa é soddisfatta, la condizione (277) dle Problema 14 é certamente soddisfatta poiché $278.537, 2071 < 77.348.315$. D'altra parte, la condizione di equitá in rischio (279) fornisce per C_B il valore

$$\frac{0,138C_A}{0,8062 - \frac{C_A}{400.000}} = C_B$$

mentre la condizione di equitá in media (276) fornisce per C_B il valore

$$C_B = \frac{0,5955}{\frac{C_A}{212.500} + 0,1225}$$

Le due sono compatibili se e solo se

$$\frac{0,138C_A}{0,8062 - \frac{C_A}{400.000}} = \frac{0,5955}{\frac{C_A}{212.500} + 0,1225}$$

$$\iff 0,138C_A \left(\frac{C_A}{212.500} + 0,1225 \right) = 0,5955 \left(0,8062 - \frac{C_A}{400.000} \right)$$

$$\iff C_A^2 \frac{0,138}{212500} + 0,138 \times 0,1225C_A = 0,5955 \times 0,8062 - C_A \frac{0,5955}{400.000}$$

$$\iff C_A^2 6,4942 + 1,1265C_A = 0,48 - C_A 0,000001$$

$$\iff C_A^2 6,4942 + (0,000001 + 1,1265)C_A - 0,48 = 0$$

$$\iff C_A^2 6,4942 + 1,1265C_A - 0,48 = 0$$

Dove l'ultima equivalenza é dovuta al fatto che stiamo approssimando tutto alla quarta cifra decimale. Quest'ultima é una equazione di 2–o grado che si risolve completando il quadrato:

$$C_A^2 6,4942 + 1,1265C_A - 0,48 = 0 \iff C_A^2 + \frac{1,1265}{6,4942} C_A - \frac{0,48}{6,4942} = 0$$

$$\iff C_A^2 + 0,1734C_A - 0,0739 = 0$$

$$\iff (C_A + 0,0867)^2 - 0,0075 - 0,0739 = 0$$

$$\iff (C_A + 0,0867)^2 = 0,0814$$

$$\iff C_A = 0,0867 \pm \sqrt{0,0814} = 0,0867 \pm 0,2853$$

Dato che dev'essere $C_A > 0$, si ottiene

$$C_A = 0,0867 + 0,2853 = 0,372 \tag{282}$$

Il corrispondente valore di C_B si ottiene inserendo nella (276) il valore di C_A dato dalla (282). Quindi

$$\begin{aligned} C_B &= \frac{0,5955 C_A}{\frac{C_A}{212.500} + 0,1225} = \frac{0,5955 \times 0,372}{\frac{0,372}{212.500} + 0,1225} = \frac{0,2215}{1,7505 + 0,1225} \\ &= \frac{0,2215}{1,8725} = 0,1182 < C_A \end{aligned} \tag{283}$$

Questo valore di C_A soddisfa la (276) e quindi a maggior ragione la (280) e anche la condizione $C_B < C_A$.
Quindi dal punto di vista matematico, nelle condizioni del Problema, un contratto assicurativo che soddisfi tutti e tre i criteri, di ragionevolezza ed equitá in media ed equitá in rischio, esiste per l'unico valore di C_A dato dalla (281).
Osserviamo tuttavia che questo valore di C_A é troppo piccolo per essere economicamente significativo (meno di 4 E).
Pertanto dal punto di vista economico possiamo concludere che, mentre esistono sia contratti ragionevoli ed equi in media che contratti ragionevoli ed equi in rischio non esistono contratti che soddisfano simultaneamente tutti e tre i criteri.
aaa xxx

Problema 16 *Dato il rischio:*

$$\{G_+, G_-, p\} = \{1,7ME \ , \ 4,1ME \ , \ 70\%\}$$

per quali f_a esiste un premio p_a tale che il contratto assicurativo (p_a, f_a) sia ragionevole in media?

Soluzione . L'indice del rischio $\{G_+, G_-, p\}$ é:

$$\rho = (\frac{1}{p} - 1)\frac{G_-}{G_+} = (\frac{10}{7} - 1)\frac{4,1}{1,7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{41}{17} = \frac{123}{119} \sim (1,03) > 1$$

Quindi tale rischio non puó soddisfare la condizione necessaria per la ragionevolezza in media della coppia (p_a, f_a)

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \tag{284}$$

Concludiamo che, tale rischio non esistono contratti assicurativi ragionevoli in media.

Problema 17 *Nelle ipotesi del Problema (284), supponendo inoltre che*

$$C_B = 50.000 = 0,05\ ME \qquad ; \qquad C_A = G_- = 4,1ME \tag{285}$$

Domanda (1)*. Esistono contratti (p_a, f_a) equi in rischio?*
Domanda (2)*. Come variereste i parametri (288) per ottenere una conclusione opposta a quella della domanda precedente?*

Domanda (1): Soluzione.
Sappiamo che una coppia (f_a, p_a) é equa in rischio se e solo se valgono le relazioni:

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} \tag{286}$$

Con i dati del Problema (284) si ha $\{G_+, G_-, p\} = \{1,7ME\ ,\ 4,1ME\ ,\ 70\%\}$, quindi

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} \iff f_a + p_a \frac{17}{41} = \left(1 + \frac{0,05}{4,1}\right) \frac{1}{1 + C_B/C_A}$$

$$\iff f_a + p_a \frac{17}{41} = (1 + 0,0121) \frac{1}{1 + 0,0121} = 1 \tag{287}$$

Quindi anche se coppie eque in rischio esistono sempre, nessuna di tali coppie puó corrispondere a un contratto poiché la condizione di coerenza economica

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = f_a + p_a \frac{17}{41} < 1$$

non puó essere soddisfatta.

Domanda (2): Soluzione.
Dalla (287) segue che basta aumentare di poco il denominatore affinché la condizione di coerenza economica risulti soddisfatta.
Per esempio, se invece della (288), si suppone che

$$C_B = 50.000 = 0,05\ ME \qquad ; \qquad C_A = 3,7ME \tag{288}$$

(e.g. A é un industriale ed ha potuto usufruire di agevolazioni statali) allora la condizione di equitá in rischio diventa

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} \iff f_a + p_a \frac{17}{41} = \left(1 + \frac{0,05}{4,1}\right) \frac{1}{1 + (0,05/3,7)}$$

$$\iff f_a + p_a \frac{17}{41} \sim \frac{1 + 0,0121}{1 + 0,0135} = \frac{1,0121}{1,0135} = 0,9986 < 1 \tag{289}$$

Se si vuole una franchigia f_a, il premio é univocamente determinato da

$$p_a = \iff p_a = (0,9986 - f_a)\frac{41}{17}$$

Quindi le franchigie per le quali un contratto equo in rischio esiste devono soddisfare le disuguaglianze

$$f_a < 0,9986$$

$$(0,9986 - f_a)\frac{41}{17} < 1 \iff (0,9986 - f_a) < \frac{17}{41} = 0,4146$$
$$\iff 0,9986 - 0,4146 = 0,584 < f_a$$

cioé devono appartenere all'intervallo

$$(0,584\ ,\ 0,9986)$$

Problema 18 *In connessione con un rischio $\{G_+, G_-, p\}$, per A, un assicuratore B propone ad A di pagare*

$$p_a G_+ = 5\ ME$$

per un contratto privo di franchigia

$$f_a = 0$$

con un rischio di perdita netta, in caso di catastrofe, pari a

$$G_- = 100\ ME$$

e con una probabilitá di successo pari a:

$$p = 90\%$$

Se voi foste il cliente per quali valori di G_+ accettereste questo contratto secondo il criterio di ragionevolezza in media?

Soluzione. Dalle dispense segue che una condizione necessaria per la ragionevolezza in media della coppia (p_a, f_a) é che risulti

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \tag{290}$$

In questo caso tali coppie sono caratterizzate dalle disuguaglianze:

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) < p_a \leq 1 - \rho(f_a + p_a G_+/G_-) \tag{291}$$

Tra queste, quelle che soddisfano la condizione di ammissibilitá, definiscono un contratto.
Nel nostro caso:

$$\rho = \left(\frac{100}{90} - 1\right)\frac{G_-}{G_+} = \left(\frac{10}{9} - 1\right)\frac{100}{G_+} = \frac{1}{9}\frac{100}{G_+} = p_a\frac{1}{9}\frac{100}{p_a G_+} = p_a\frac{1}{9}\frac{100}{5}$$

$$= p_a\frac{100}{45} = p_a 2,2222$$

Quindi la condizione necessaria impone

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \iff \frac{C_B}{\frac{10}{9}G_+} + p_a 2,2222 < 1 \iff \frac{C_B}{G_+} + p_a 2,2222\frac{10}{9} < \frac{10}{9}$$

$$\iff p_a\frac{C_B}{p_a G_+} + p_a 2,2222\frac{10}{9} < \frac{10}{9} \iff p_a\left(\frac{C_B}{5} + 2,2222 \times 1,1111\right) < 1,1111$$

$$\iff p_a\left(\frac{C_B}{5} + 2,4691\right) < 1,1111$$

Nel caso di franchigia nulla la condizione (291) diventa

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - p_a G_+/G_-) < p_a \leq 1 - \rho p_a G_+/G_- = 1 - p_a \left(\frac{1}{p} - 1\right) \qquad (292)$$

La seconda disuguaglianza equivale a

$$p_a \leq 1 - p_a \left(\frac{1}{p} - 1\right) = p_a \frac{1}{p} - p_a$$

$$\iff 2p_a \leq p_a \frac{1}{p} \iff 2 \leq \frac{1}{p} \iff p \leq \frac{1}{2}$$

Ma nel nostro caso si sa che

$$p = 90\% = \frac{9}{10} > \frac{1}{2}$$

Quindi la proposta dell'assicuratore non puó essere ragionevole in media.
Il cliente sa che il suo guadagno atteso é positivo se e solo se

$$1 - \rho(f_a + p_a G_+/G_-) \geq p_a \iff 1 - p_a \rho G_+/G_- \geq p_a \qquad (293)$$

$$1 \geq p_a + p_a \rho G_+/G_- = p_a \left(1 + \left(\frac{10}{9} - 1\right)\right) = p_a \frac{10}{9} \iff \frac{9}{10} \geq p_a$$

$$\iff \frac{9}{10} G_+ \geq p_a G_+ \iff \frac{9}{10} G_+ \geq 5 \iff G_+ \geq 5\frac{10}{9} \sim 5,555$$

Quindi se il guadagno del cliente é $> 5,555$, cioé di poco superiore al premio, egli accetta il contratto. Se invece tale guadagno é $< 5,555$ egli non lo accetta.

Problema 19 *Un cliente A propone ad una assicurazione B di pagare*

$$5,3 \ M\ E \text{ (milioni di Euro)}$$

per un contratto privo di franchigia

$$f_a = 0$$

con un rischio di perdita netta, in caso di catastrofe pari a

$$G_- = 89ME$$

Secondo il criterio dei contratti ragionevoli in media:

(1) Determinare la soglia dei costi C_B per l'assicuratore, al di sopra della quale l'assicuratore non stipulerebbe il contratto.

(2) Supponiamo che i costi per l'assicuratore siano circa la 100–ma parte della soglia massima (1). Se voi foste l'assicuratore, come stimereste l'intervallo della probabilitá di successo p che vi permetterebbe di accettare il contratto?

(3) Supponendo che C_B sia uguale alla sua soglia massima, se come assicuratore stimaste che la probabilitá di successo é

$$p = 90\%$$

sareste disposto ad accettare il contratto?

Spiegate i motivi delle vostre scelte e commentate il significato economico dei risultati.

Domanda (1): Soluzione.
I dati del problema sono:

$$p_a G_+ = 5,3 \qquad ; \qquad G_- = 89 \qquad ; \qquad f_a = 0 \tag{294}$$

Sappiamo che, per ogni franchigia $f_a \in [0,1)$ l'intervallo

$$\left(\frac{C_B}{G_+} + p\rho(1-f_a)\ ,\ \min\left\{p(1-\rho f_a)\ ,\ (1-f_a)\frac{G_-}{G_+})\right\}\right] \subset (0,1) \tag{295}$$

é non vuoto se

$$\frac{C_B}{G_+} + p\rho(1-f_a) < 1$$

e, per ogni p_a in tale intervallo, la coppia (f_a, p_a) é ragionevole in media.
Nel nostro caso $f_a = 0$ e l' intervallo del premio diventa

$$\left(\frac{C_B}{G_+} + p\rho\ ,\ \min\left\{p\ ,\ \frac{G_-}{G_+})\right\}\right] \iff \frac{C_B}{G_+} + p\rho < p_a \le \min\left\{p\ ,\ \frac{G_-}{G_+})\right\} \tag{296}$$

La 1–a disuguaglianza é

$$\frac{C_B}{G_+} + p\rho < p_a \iff C_B + p\rho G_+ < p_a G_+ \iff C_B + (1-p)G_- < p_a G_+$$

$$\iff \frac{C_B}{G_-} + 1 - \frac{p_a G_+}{G_-} < p$$

Nel nostro caso

$$\frac{p_a G_+}{G_-} = 5,3/89 = 0,0595$$

Quindi la 1–a disuguaglianza diventa

$$\frac{C_B}{G_-} + 1 - 0,0595 = \frac{C_B}{G_-} + 0,9405 < p$$

Affinché essa abbia soluzione é necessario che

$$\frac{C_B}{G_-} + 0,9405 < 1 \iff \frac{C_B}{G_-} < 1 - 0,9405 = 0,0595 \iff C_B < 0,0595 G_-$$

$$\iff C_B < 0,0595 \times 89 = 5,2955$$

Se C_B non soddisfa questa disuguaglianza, l'intervallo dei premi ragionevoli in media é vuoto.
Poiché nel problema l'unitá di misura é il milione di Euro, in casi normali tale soglia é soddisfatta. In tale caso la condizione di coerenza economica $p_a G_+ > C_B$ é soddisfatta. Quindi tal teorema generale sappiamo che anche la condizione di coerenza economica $f_a + p_a G_+/G_- < 1$ é soddisfatta. Quindi se $C_B < 5,2955$ esistono contratti ragionevoli in media.

Domanda (2): Soluzione.
Dalla domanda (1) sappiamo che se si vuole un contratto ragionevole in media, deve aver luogo la stima inferiore per la probabilitá:

$$\frac{C_B}{G_-} + 0,9405 < p$$

Consideriamo l'altra uguaglianza in (296), cioé

$$p_a \leq \min\left\{p \ , \ \frac{G_-}{G_+}\right\} \iff p_a \frac{G_+}{G_-} \leq \min\left\{p \frac{G_+}{G_-} \ , \ 1\right\}$$

Da ció segue che, se

$$p\frac{G_+}{G_-} > 1$$

l'intervallo di probabilitá é

$$p \in \left(\frac{C_B}{89} + 0,9405\ ,\ 1\right]$$

Se invece

$$p\frac{G_+}{G_-} \leq 1$$

allora si deve avere

$$p_a\frac{G_+}{G_-} \leq p\frac{G_+}{G_-} \iff p_a \leq p$$

e l'intervallo di probabilitá diventa

$$\left(\max\left\{p_a\ ,\ \frac{C_B}{89} + 0,9405\right\}\ ,\ 1\right)$$

In particolare la seconda disuguaglianza in (296) puó solo far crescere l'estremo inferiore dell'intervallo di probabilitá.

Supponendo $C_B = 0,0529 = 5,2955/100$ si trova

$$p > \frac{0,0529}{89} + 0,9405 = 0,0005 + 0,9405 = 0,9410 \tag{297}$$

Domanda (3): Soluzione.
Poiché, come assicuratore, stimo la probabilitá di successo pari al 90%, ma la stima precedente pone un limite inferiore alla probabilitá pari al 94% concluderei che un contratto ragionevole in media non é possibile e quindi tenterei di stimare il mio guadagno atteso.

Problema 20 *Dato il rischio:*

$$\{G_+, G_-, p\} = \{5\ ME\ ,\ 6,5\ ME\ ,\ 0.89\}$$

Esiste un intervallo di costi C_B tale che il contratto:

$$(f_a, p_a) = (0, 1/8)$$

risulti ragionevole in media?

Soluzione.
Dalle dispense segue che una condizione necessaria per la ragionevolezza in media della coppia (p_a, f_a) é che risulti

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \tag{298}$$

In questo caso tali coppie sono caratterizzate dalle disuguaglianze:

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) < p_a \leq 1 - \rho(f_a + p_a G_+/G_-) \tag{299}$$

Tra queste, quelle che soddisfano la condizione di ammissibilitá, definiscono un contratto. Nel nostro caso:

$$\rho = \left(\frac{100}{89} - 1\right)\frac{6,5}{5} = (1,1235 - 1) \times 1,3 = 0,1235 \times 1,3 = 0,1606$$

$$pG_+ = \frac{89}{100}5 = \frac{89}{20} = 4,45$$

Perció

$$\frac{C_B}{pG_+}+\rho = \frac{C_B}{4,45}+0,1606 < 1 \iff C_B < (1-0,1606)4,45 = 0,8394\times 4,45 = 3,7353$$

Quindi la condizione necessaria é soddisfatta per tutti i C_B nell'intervallo

$$C_B \in (0 \ , \ 3,7353)$$

La 2–a disuguaglianza in (299) é

$$p_a \leq 1-\rho p_a G_+/G_- = 1-p_a\left(\frac{1}{p} - 1\right) = 1-\frac{p_a}{p}+p_a \iff \frac{p_a}{p} < 1 \iff p_a < p$$

Dato che nelle nostre ipotesi

$$p_a = \frac{1}{8} = 0,125 < 0,89 = p$$

la condizione precedente é rispettata. La 1–a disuguaglianza in (299) é

$$\frac{C_B}{pG_+}+\rho(1-(f_a+p_aG_+/G_-)) = \frac{C_B}{pG_+}+\rho\left(1 - p_aG_+/G_-\right) = \frac{C_B}{pG_+}+\left(\rho - p_a\left(\frac{1}{p} - 1\right)\right) < p_a$$

$$\Longleftrightarrow \frac{C_B}{pG_+}+\rho-\frac{p_a}{p}+p_a<p_a \Longleftrightarrow \frac{C_B}{pG_+}+\rho<\frac{p_a}{p} \Longleftrightarrow p\left(\frac{C_B}{pG_+}+\rho\right)<p_a$$

$$\Longleftrightarrow \frac{89}{100}\left(\frac{C_B}{4,45}+0,1606\right)<0,125$$

$$\Longleftrightarrow \frac{C_B}{4,45}+0,1606<0,125\frac{100}{89}=0,125\times 1,1235=0,1404$$

$$\Longleftrightarrow \frac{C_B}{4,45}+0,1606<0,1404 \Longleftrightarrow \frac{C_B}{4,45}<0,1404-0,1606=-0,0201$$

Ma questa é impossibile. Concludiamo che, con i dati del problema, non esiste un intervallo di costi C_B tale che il contratto $(f_a, p_a) = (0, 1/8)$ risulti ragionevole in media

Problema 21 *Dato il rischio:*

$$\{G_+, G_-, p\} = \{6\ ME\ ,\ 4\ ME\ ,\ 0,97\}$$

Determinare per quali f_a e C_B il contratto (f_a, p_a) con

$$p_a = 1/8$$

é ragionevole in media.

Soluzione.
Sappiamo che una condizione necessaria per la ragionevolezza in media della coppia (p_a, f_a) é che risulti

$$\frac{C_B}{pG_+}+\rho<1 \tag{300}$$

In questo caso tali coppie sono caratterizzate dalle disuguaglianze:

$$\frac{C_B}{pG_+}+\rho(1-(f_a+p_aG_+/G_-))<p_a\leq 1-\rho(f_a+p_aG_+/G_-) \tag{301}$$

Tra queste, quelle che soddisfano la condizione di ammissibilitá, definiscono un contratto. Nel nostro caso:

$$\rho=\left(\frac{1}{p}-1\right)\frac{G_+}{G_-}=\left(\frac{100}{97}-1\right)\frac{6}{4}=\frac{3}{97}\frac{6}{4}=\frac{18}{388}=0,0463<1 \tag{302}$$

Quindi, dato che

$$pG_+ = 0,97\times 6 = 5,82 \tag{303}$$

la condizione necessaria diventa

$$\frac{C_B}{5,82} + 0,0463 < 1 \iff C_B < 5,82(1 - 0,0463) = 5,82 \times 0,9537 = 5,5505$$

che definisce l'intervallo

$$C_B \in (0\ ,\ 5,5505) \tag{304}$$

La 2–a disuguaglianza nella (301) é

$$p_a \leq 1 - \rho f_a - p_a \rho G_+/G_- \iff p_a \left(1 + \left(\frac{1}{p} - 1\right)\right) = \frac{p_a}{p} \leq 1 - 0,0463 f_a$$

$$p_a \leq p\,(1 - 0,0463 f_a) = 0,97\,(1 - 0,0463 f_a) = 0,97 - 0,97 \times 0,0463 f_a = 0,97 - 0,0449 f_a$$

Quindi nel nostro caso si deve avere

$$p_a = 1/8 = 0,125 \leq 0,97 - 0,0449 f_a \iff 0,125 - 0,97 = -0,845 \leq -0,0449 f_a$$

$$\iff 0,845 \geq 0,0449 f_a \iff \frac{0,845}{0,0449} = 18,8195 \geq f_a$$

che é identicamente soddisfatta poiché $f_a < 1$. Quindi la 2–a disuguaglianza nella (301) non pone limiti sulla franchigia.
La 1–a disuguaglianza nella (301) é

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) < p_a$$

$$\iff \frac{C_B}{pG_+} + \rho - \rho f_a - \rho p_a G_+/G_- < p_a$$

$$\iff \frac{C_B}{pG_+} + \rho - \rho f_a - p_a \left(\frac{1}{p} - 1\right) < p_a$$

$$\iff \frac{C_B}{pG_+} + \rho - \rho f_a < \frac{p_a}{p}$$

$$\iff \frac{C_B}{pG_+} + \rho - \frac{p_a}{p} < \rho f_a$$

Nel nostro caso questa é equivalente a

$$\iff \frac{C_B}{5,82} + 0,0463 - \frac{1}{8 \times 0,97} < 0,0463 f_a$$

$$\iff \frac{C_B}{5,82} + 0,0463 - \frac{1}{7,76} < 0,0463 f_a$$
$$\iff \frac{C_B}{5,82} + 0,0463 - 0,1288 < 0,0463 f_a$$
$$\iff \frac{C_B}{5,82} - 0,0825 < 0,0463 f_a$$
$$\iff C_B - 5,82 \times 0,0825 < 5,82 \times 0,0463 f_a$$
$$\iff C_B - 0,4801 < 0,2694 f_a$$
$$\iff \frac{C_B - 0,4801}{0,2694} < f_a$$

Da cui si deduce che dev'essere

$$\frac{C_B - 0,4801}{0,2694} < 1 \iff C_B - 0,4801 < 0,2694 \iff C_B < 0,2694 + 0,4801$$
$$\iff C_B < 0,2694 + 0,4801 = 0,7495$$

Quindi l'intervallo (304), cioé

$$C_B \in (0\ ,\ 5,5505)$$

si restringe a

$$C_B \in (0\ ,\ 0,7495) \tag{305}$$

Per ogni C_B in quest'intervallo e per ogni franchigia nell'intervallo

$$f_a \in \left(\frac{C_B - 0,4801}{0,2694}\ ,\ 1 \right) \cap [0\ ,\ 1) \tag{306}$$

la coppia $(1/8, f_a)$ é ragionevole in media.
La 1–a condizione di coerenza economica impone che

$$f_a + p_a G_+/G_- = f_a + \frac{1}{8}\frac{6}{4} = f_a + \frac{8}{32} = f_a + 0,25 < 1$$
$$f_a < 1 - 0,25 = 0,75$$

Tenuto conto di (306), ció é possibile se e solo se

$$\frac{C_B - 0,4801}{0,2694} < 0,75 \iff C_B - 0,4801 < 0,2694 \times 0,75 = 0,202$$

$$\iff C_B < 0,202 + 0,4801 = 0,6821$$

Quindi l'intervallo (305) si restringe a

$$C_B \in (0 \ , \ 0,6821) \tag{307}$$

La 2–a condizione di coerenza economica impone che

$$C_B < p_a G_+ = \frac{1}{8} 6 = 0,75$$

e, data la (307), questa é automaticamente soddisfatta. In conclusione: per ogni $C_B \in (0 \ , \ 0,6821)$ e per ogni $f_a \in \left(\frac{C_B - 0,4801}{0,2694} \ , \ 1 \right) \cap [0 \ , \ 1)$, la coppia $(1/8, f_a)$ é ragionevole in media.

Problema 22 *Nelle condizioni dell'esercizio 21 esistono franchigie* f_a *che rendono il contratto equo e ragionevole in media? In caso affermativo determinarle.*

Soluzione.
Nell'esercizio 21 il rischio é

$$\{G_+, G_-, p\} = \{6 \ ME \ , \ 4 \ ME \ , \ 0,97\}$$

ed il premio é

$$p_a = 1/8$$

Sappiamo che, dato il rischio $\{G_+, G_-, p\}$ le coppie (f_a, p_a), EM con capitali investiti (C_A, C_B), sono quelle che soddisfano la condizione:

$$\frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \tag{308}$$

Nel nostro caso, ricordando dalle (303), (302), (303) che

$$pG_+ = 5,82 \qquad ; \qquad \rho = 0,0463 \qquad ; \qquad pG_+ = 5,82$$

questa diventa

$$\frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\frac{C_B}{5,82} + 0,0463 \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = 0,0463 f_a + \frac{1}{8 \times 0,97}$$

$$\iff \frac{C_A}{C_A+C_B}\left(\frac{C_B}{5,82}+0,0463\right)+\frac{C_B}{C_A+C_B}=0,0463f_a+\frac{1}{7,76}$$

$$\iff \frac{1}{1+C_B/C_A}\left(\frac{C_B}{5,82}+0,0463\right)+\frac{1}{1+C_A/C_B}=0,0463f_a+0,1288$$

$$\iff \frac{1}{1+C_B/C_A}\left(\frac{C_B}{5,82}+0,0463\right)+\frac{1}{1+C_A/C_B}-0,1288=0,0463f_a$$

$$\iff \frac{1}{1+C_B/C_A}\left(\frac{C_B}{5,82\times 0,0463}+1\right)+\frac{1}{0,0463}\frac{1}{1+C_A/C_B}-\frac{0,1288}{0,0463}=f_a$$

$$\iff \frac{1}{1+C_B/C_A}\left(\frac{C_B}{0,02694}+1\right)+\frac{1}{0,0463}\frac{1}{1+C_A/C_B}-2,7818=f_a$$

La condizione $f_a \in [0,1)$ impone due disuguaglianze. La prima é

$$\frac{1}{1+C_B/C_A}\left(\frac{C_B}{0,02694}+1\right)+\frac{1}{0,0463}\frac{1}{1+C_A/C_B}-2,7818\geq 0$$

$$\iff \frac{1}{1+C_B/C_A}\left(\frac{C_B}{0,02694}+1\right)+\frac{1}{0,0463}\frac{1}{1+C_A/C_B}\geq 2,7818$$

$$\iff \frac{C_B}{0,02694}+1+\frac{1}{0,0463}\frac{1+C_B/C_A}{1+C_A/C_B}\geq 2,7818(1+C_B/C_A)=2,7818+2,7818\frac{C_B}{C_A}$$

$$\iff \frac{C_B}{0,02694}+\frac{1}{0,0463}\frac{1+C_B/C_A}{1+C_A/C_B}\geq 1,7818+2,7818\frac{C_B}{C_A}$$

$$\iff C_B+\frac{0,02694}{0,0463}\frac{1+C_B/C_A}{1+C_A/C_B}\geq 0,02694\times 1,7818+0,02694\times 2,7818\frac{C_B}{C_A}$$

$$\iff C_B+0,5818\frac{1+C_B/C_A}{1+C_A/C_B}\geq 0,048+0,0749\frac{C_B}{C_A}$$

$$\iff C_B(1+C_A/C_B)+0,5818\,(1+C_B/C_A)\geq 0,048(1+C_A/C_B)+0,0749\frac{C_B}{C_A}(1+C_A/C_B)$$

$$\iff C_B\frac{C_A+C_B}{C_B}+0,5818\frac{C_A+C_B}{C_A}\geq 0,048\frac{C_A+C_B}{C_B}+0,0749\frac{C_B}{C_A}\frac{C_A+C_B}{C_B}$$

$$\iff (C_A+C_B)+0,5818\frac{C_A+C_B}{C_A}\geq 0,048\frac{C_A+C_B}{C_B}+0,0749\frac{C_A+C_B}{C_A}$$

$$\iff C_AC_B(C_A+C_B)+0,5818C_B(C_A+C_B)\geq 0,048C_A(C_A+C_B)+0,0749C_B(C_A+C_B)$$

$$\iff C_A C_B(C_A{+}C_B){+}(0,5818-0,0749)\, C_B(C_A{+}C_B) \geq 0,048 C_A(C_A{+}C_B)$$

$$\iff C_A C_B(C_A+C_B)+0,5069 C_B(C_A+C_B) \geq 0,048 C_A(C_A+C_B)$$

$$\iff C_A C_B+0,5069 C_B \geq 0,048 C_A \iff C_B(C_A+0,5069) \geq 0,048 C_A$$

$$\iff C_B \geq \frac{0,048 C_A}{C_A+0,5069}$$

Ricordando dalla (**??**) che

$$C_B \in (0\ ,\ 0,75)$$

ció restringe l'intervallo di C_B a

$$C_B \in \left(\frac{0,048 C_A}{C_A+0,5069}\ ,\ 0,75\right) \tag{309}$$

L'intervallo (309) é non vuoto se e solo se

$$\frac{0,048 C_A}{C_A+0,5069} < 0,75 \iff 0,048 C_A < 0,75(C_A{+}0,5069) = 0,75 C_A{+}0,75{\times}0,5069$$

$$\iff C_A(0,048-0,75) = C_A(-0,702) < 0,75 \times 0,3801$$

Dato che questa condizione é identicamente soddisfatta, essa non pone alcun limite su C_A.
Riassumendo: per ogni C_B nell'intervallo (309) e per ogni C_A, la franchigia

$$f_a = \frac{1}{1+C_B/C_A}\left(\frac{C_B}{0,02694}+1\right)+\frac{1}{0,0463}\frac{1}{1+C_A/C_B}-2,7818 \tag{310}$$

definisce una coppia equa in rischio. Per tale coppia la 1–a condizione di coerenza economica impone che

$$f_a + p_a G_+/G_- = f_a + \frac{1}{8}\frac{6}{4} = f_a + \frac{8}{32} = f_a + 0,25 < 1$$

e, tenuto conto della (310), questa diventa

$$\frac{1}{1+C_B/C_A}\left(\frac{C_B}{0,02694}+1\right)+\frac{1}{0,0463}\frac{1}{1+C_A/C_B}-2,7818+0,25 < 1$$

Bibliografia essenziale

[Ba900] L. Bachelier:
Theorie de la spéculation
Annales Scientifiques de L'école Normale Supérieure III 17 (1900) 21–88
Traduzione inglese in: [Ba64] L. Bachelier:
Theory of speculation
in: The Random Character of Stock Market Prices, P.H. Cootner Ed.,
M.I.T. Press, Cambridge, MA (1964)

[Pliska97] Stanley R. Pliska:
Introduction to Matematical Finance. Discrete time models,
Blackwell Publishers (1997)