

# Prezzi del rischio: Assicurazioni e opzioni

Anno 2019

Versione del 9-04-2019

Docente: Luigi Accardi

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione: il prezzo del rischio</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Il caso e la sua quantificazione</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Rischi economici</b>	<b>6</b>
3.1	Eventi casuali . . . . .	6
3.2	Schemi di rischio (dicotomico) . . . . .	7
3.3	Varie tipologie di rischio . . . . .	8
3.4	Rischi d'uso . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Guadagno medio e guadagno atteso</b>	<b>10</b>
4.1	Dilemma dell'avversione al rischio e limiti dei criteri basati solo sul guadagno atteso . . . . .	15
4.2	Esperimenti di Tversky e Kahneman . . . . .	16
4.3	Varianza e rischio . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Scommesse</b>	<b>18</b>
5.1	Scommesse leali . . . . .	18
5.2	Posta di una scommessa . . . . .	20
5.3	Rischio di puro azzardo . . . . .	21
5.4	Scommesse multiple: Lotterie senza costi . . . . .	22
5.5	Lotterie con costi . . . . .	22
5.6	Scommesse asimmetriche . . . . .	23
5.7	Scommesse e tasso d'interesse . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Schemi di rischio associati ad investimenti</b>	<b>26</b>
6.1	Arbitraggio e misure neutre al rischio . . . . .	27
6.2	Differenze tra investimenti e giochi d'azzardo . . . . .	28
6.3	Indice di rischio percentuale e guadagno atteso positivo . . . . .	29

6.4	L'indice di rischio percentuale di un investimento . . . . .	33
6.5	Sensibilità del guadagno atteso alla probabilità . . . . .	34
6.6	* Paragone tra guadagni attesi . . . . .	36
6.7	* Paragone dei guadagni attesi di due rischi con uguale probabilità . . . . .	37
6.8	* Paragone tra gli indici di rischio percentuale di due rischi con uguale probabilità . . . . .	38
6.9	* Relazioni tra guadagno atteso e indice di rischio percentuale	39
6.10	* Rischi catastrofici: posizione del problema . . . . .	40
6.11	Tipologie di contratti economici . . . . .	41
<b>7</b>	<b>Contratti assicurativi</b>	<b>43</b>
7.1	Schema matematico del contratto di assicurazione . . . . .	44
7.2	Il Teorema della conservazione del guadagno . . . . .	45
7.3	Il guadagno atteso dell'assicurato ( $A$ ) . . . . .	46
7.4	Il guadagno atteso dell'assicuratore ( $B$ ) . . . . .	47
7.5	Condizioni minimali di coerenza economica . . . . .	48
7.6	I costi di $A$ . . . . .	49
7.7	La condizione che il rischio dell'assicuratore sia di tipo investimento . . . . .	50
<b>8</b>	<b>Assicurazioni di rischi d'uso</b>	<b>54</b>
8.1	La funzione guadagno dell'assicurato ( $A$ ) in un rischio d'uso . . . . .	55
<b>9</b>	<b>Contratti assicurativi standard</b>	<b>59</b>
9.1	Condizioni di coerenza economica per contratti standard . . . . .	61
9.2	Variazione dell'indice di rischio percentuale dopo un contratto assicurativo standard . . . . .	63
9.3	Il guadagno di $A$ dopo il contratto. . . . .	68
9.4	Il Guadagno di $B$ dopo il contratto . . . . .	69
<b>10</b>	<b>Contratti ragionevoli in media</b>	<b>70</b>
10.0.1	Contratti ragionevoli in media con premio pre-assegnato	74
10.0.2	Interpretazione economica delle condizioni del Teorema 11 . . . . .	76
10.0.3	Contratti ragionevoli in media con franchigia pre-assegnata . . . . .	77

<b>11 Contratti assicurativi equi in rischio (ER)</b>	<b>80</b>
<b>12 Contratti assicurativi equi in media</b>	<b>88</b>
12.1 Contratti equi in media con premio o franchigia pre-assegnati	91
12.2 Guadagni attesi dopo un contratto equo in media . . . . .	100
12.3 Contratti equi e ragionevoli in media . . . . .	101
12.4 Contratti assicurativi universalmente equi in media . . . . .	101
<b>13 Opzioni</b>	<b>105</b>
13.1 Modelli matematici di opzioni call europee . . . . .	105
13.2 Le condizioni di coerenza economica . . . . .	108
13.3 La scommessa sottostante a un'opzione . . . . .	110
13.4 Il postulato di Black e Scholes e l'ipotesi di non arbitraggio . .	114
<b>14 Inequivalenza tra opzioni e assicurazioni</b>	<b>116</b>
<b>15 Conclusioni</b>	<b>118</b>
<b>16 Problemi del 16-05-2018</b>	<b>120</b>
<b>17 Problemi su opzioni e assicurazioni</b>	<b>120</b>
<b>18 Problemi risolti</b>	<b>127</b>
Sono escluse dal programma tutte le sezioni contrassegnate da un asterisco ( * ) e tutte le sezioni dalla 17 fino alla fine.	

# 1 Introduzione: il prezzo del rischio

Fino a pochi anni fa il rischio era visto come qualcosa da esorcizzare.

Oggi é una merce: si compra, si vende, si scambia, si affitta e si sub-affitta.

Si pone quindi il problema di definire il prezzo di questa merce.

Come per ogni altra merce, anche per il rischio, il prezzo é una categoria astratta, che non ha un significato assoluto, disgiunto da un preciso contesto. Essendo impossibile parlare di prezzo del rischio in termini obiettivi, la cosa migliore che si puó fare é accettare l'idea che il prezzo sia una convenzione, che nasce da un accordo tra piú parti, e cercare di stabilire alcuni criteri che permettano di impostare su basi razionali tale accordo.

Come si vedrá di tali criteri ne esistono molti (potenzialmente una infinitá).

Per parlare di *prezzo del rischio* occorre premettere alcune riflessioni sulla parola *rischio* che, come molti altri termini del linguaggio comune, viene usata di frequente ma, quando si tenta di darle una definizione precisa, ci si imbatte in questioni sottili e di non facile soluzione.

Innanzitutto occorre precisare che esistono molti tipi di rischio e che non tutti sono valutabili economicamente. Nel seguito restringeremo la nostra attenzione a questo tipo di rischi. Essi sono caratterizzati dalle seguenti proprietá:

- (i) se si verifica un evento, denotato con il simbolo  $+$ , un soggetto  $A$  guadagna una certa somma  $G_+$  (guadagno netto);
- (ii) se si verifica un evento, denotato con il simbolo  $-$ , un soggetto  $A$  perde una certa somma  $G_-$  (perdita netta);
- (iii) i due complessi di condizioni (eventi)  $\{+, -\}$  sono mutuamente incompatibili: se si verifica uno di essi, l'altro non puó verificarsi
- (iv) almeno uno dei due complessi di condizioni (eventi)  $\{+, -\}$  si verifica (tertium non datur)
- (v) il soggetto  $A$  non sa quale dei due eventi  $\{+, -\}$  si verificherá. Questo fatto si esprime dicendo che gli eventi  $\{+, -\}$  sono *casuali o aleatori rispetto al soggetto  $A$* .

L'esistenza di una molteplicitá di criteri sottolinea come questi non siano da intendersi come regole da applicare meccanicamente, ma come ausili al decisore che servono a porre in luce diversi aspetti del problema.

Piú precisamente il presente studio é il tentativo di dare una forma matematica al seguente problema:

Un soggetto  $A$  vuole condividere con un soggetto  $B$  un rischio economicamente valutabile, cioè una prospettiva di un guadagno  $G_+$  con probabilità  $p$  oppure di una perdita  $G_-$  con probabilità  $1 - p$ .

A tal fine è disposto a cedere a  $B$  una frazione  $p_a G_+$  ( $p_a \in (0, 1)$ ) del potenziale guadagno (il prezzo del rischio) e, in corrispettivo, chiede a  $B$  di coprire, in caso di insuccesso, una frazione della perdita  $(1 - f_a)G_-$  ( $f_a \in [0, 1)$ ).

Definire la coppia  $(p_a, f_a)$  equivale a definire un contratto. Con quali criteri definire un tale contratto?

Questo è uno schema molto idealizzato, ma un semplice calcolo, basato sull'attesa condizionata, mostra che il più complesso e realistico rischio può essere ricondotto a questo schema. In questo caso  $G_+$  (resp.  $G_-$ ) rappresenta il guadagno atteso (resp. perdita attesa) condizionato all'ipotesi di guadagno (resp. perdita). Nella pratica questa operazione di **condizionamento** è implicitamente eseguita dal decisore che, non potendo esaminare individualmente tutte le possibilità, potenzialmente infinite, tenta di rispondere a domande del tipo: *se perdo, quanto è ragionevole attendersi come perdita?* o simmetricamente *se guadagno, quanto è ragionevole attendersi come guadagno?*.

Conviene partire dallo studio delle *condizioni minimali*, che possono essere considerate come l'analogo economico delle *condizioni necessarie* in matematica. E' certamente possibile introdurre condizioni più sofisticate, ma queste condizioni minimali dovrebbero poter costituire una base sulla quale conseguire un accordo universalmente condiviso.

Lo schema astratto di rischio delineato sopra include i giochi d'azzardo, le assicurazioni, gli investimenti, le opzioni, ... e molte altre realtà di interesse economico.

La prima parte del lavoro è dedicata a una distinzione matematica tra giochi d'azzardo e investimenti. Si introduce un indice numerico (indice di rischio percentuale) che discrimina tra i due. L'idea intuitiva è che un gioco d'azzardo è leale se il valore atteso del guadagno è zero, mentre un requisito minimale per un investimento è che almeno il guadagno sperato sia positivo. Poi, e questa è la parte principale del testo, si introducono vari tipi di contratti assicurativi, determinati da differenti criteri minimali (ragionevolezza in media, equità in media, equità in rischio, ...). Intuitivamente un contratto è *tanto migliore* quanto maggiore è il numero di criteri minimali che esso soddisfa.

Infine si studia la relazione tra contratti assicurativi e opzioni. Il risultato principale ottenuto (v. il Teorema 23 della sezione 14) è che lo schema attua-

le del prezzo di una opzione non può essere ricondotto ad una assicurazione essendo matematicamente equivalente a un gioco di puro azzardo.

La nostra conclusione é che, se si vuole che il prezzo di una opzione soddisfi i requisiti minimali che distinguono un investimento da un gioco d'azzardo, allora occorre cambiare l'attuale meccanismo di prezzi e adottare schemi del tipo di quelli proposti nel presente lavoro, che generalizzano quelli dei contratti assicurativi.

## 2 Il caso e la sua quantificazione

Un *evento* é una possibilitá, cioè qualcosa che può accadere o no.

Spesso non é possibile prevedere se un dato evento accadrá o no.

In presenza di un tale difetto di conoscenza si parla di *evento aleatorio, o casuale, o incerto*.

Spesso si suppone che l'informazione disponibile, relativamente a una certa famiglia di eventi in un certo orizzonte temporale, sia fissata una volta per tutte e che, data tale informazione, sia possibile quantificare l'incertezza di un dato evento attribuendo ad esso un numero, compreso tra 0 e 1, e chiamato *la probabilità di tale evento*.

La probabilità é quindi un modo di quantificare le possibilitá: io so che un piano finanziario ha "buone" possibilitá di guadagnare: ma quanto buone? Per esempio: cosa significa se un consulente dice: "questo piano ha il 70% di probabilità di guadagnare"?

Su domande di questo genere esiste una cospicua letteratura dalla quale si può concludere che le probabilità sono fortemente intrise di valutazioni soggettive e che ogni tentativo di eliminare completamente tali valutazioni é destinato all'insuccesso. Possiamo sintetizzare queste conclusioni nella frase: *in economia le probabilità basiche non si misurano o si calcolano, ma si stimano*.

Nei problemi di interesse reale rarissimamente é possibile determinare esattamente il valore di una probabilità: il meglio che in genere si riesce a fare é di determinare un certo intervallo di confidenza relativo alle probabilità in questione. Pertanto, per le applicazioni, é importante poter stimare le variazioni indotte sulle nostre previsioni da una variazione della stima delle probabilità in esse coinvolte.

In conseguenza di ciò occorre che una **teoria del prezzo del rischio**, per essere ritenuta accettabile, deve condurre a risultati che sono **robusti** rispetto

a piccole variazioni delle probabilità coinvolte. In altri termini: una teoria che implichi grosse variazioni nel prezzo in corrispondenza di piccole variazioni delle probabilità non può essere considerata valida.

A parte queste considerazioni generali, nel seguito la nozione di probabilità sarà trattata come primitiva.

L'Appendice del presente corso contiene una definizione formale del modello matematico standard di probabilità (modello di Kolmogorov).

La disciplina che si occupa del problema di stimare le probabilità di determinati eventi è la statistica.

Nel seguito supporremo che le probabilità siano già state stimate e ci interesseremo delle conseguenze che si possono trarre da tali stime. Pertanto tutti i ragionamenti che seguono saranno condizionati a quest'ipotesi.

**Esempio.**

L'investitore  $A$  propone un piano d'investimenti il risultato del quale è uno dei due eventi:

(i)  $A$  guadagna: evento  $+$

(ii)  $A$  non guadagna: evento  $-$

In questo caso lo spazio degli eventi (o delle possibilità) è:

$$\Omega = \{+, -\}$$

A ciascuno degli eventi  $+$ ,  $-$  un individuo  $A$  può associare una probabilità

$$p(\pm|A) =: p(\pm)$$

cioè un numero compreso tra 0 e 1 che quantifica il *grado di credenza* che  $A$  attribuisce al verificarsi dell'evento  $+$ ,  $-$ .

Nel nostro schema idealizzato le uniche due possibilità sono "guadagnare" ( $+$ ) o "perdere" ( $-$ ) ed esse sono mutuamente esclusive. Ciò si esprime attraverso l'identità:

$$p_+ + p_- = p(+) + p(-) = 1 \tag{1}$$

La funzione

$$P : s \in \Omega = \{+, -\} \rightarrow p_s \in [0, 1]$$

soddisfa l'identità (1), quindi è **una misura di probabilità** su  $\Omega$  e la coppia

$$(\Omega, P) = (\{+, -\}, \{p_+, p_-\})$$

é **uno spazio di probabilità**.

Se sullo spazio  $\Omega$  degli eventi (o delle possibilità) é definita una misura di probabilità  $P$ , una qualsiasi funzione  $X$ , definita su  $\Omega$  e a valori reali é *una variabile casuale (o aleatoria)* (v. Appendice).

Nel seguito i termini *variabile casuale* e *variabile casuale a valori reali* saranno considerati sinonimi poiché la nostra attenzione sarà limitata a quest'ultimo tipo di variabili casuali.

## 3 Rischi economici

### 3.1 Eventi casuali

#### Esempi

(i) l'evento  $+$  corrisponde al fatto che il valore di un'azione al tempo 1 supera una soglia  $K$  e  $G_-$  é la somma che  $A$  perde se tale valore non supera la soglia  $K$ .

(ii)  $G_-$  é il valore, attualizzato al tempo 1, della somma che un giocatore  $A$  deve pagare al tempo 0 per partecipare a una scommessa.

(iii)  $G_-$  é il valore, attualizzato al tempo 1, della somma che un investitore  $A$  deve investire al tempo 0 per partecipare a un investimento.

Quando si verifica una situazione che soddisfa le 5 condizioni sopra-elencate si dice che *il soggetto  $A$  sta correndo un rischio (dicotomico)*.

Piú in generale, per *rischio* si intende la possibilità di una perdita combinata a un difetto di conoscenza circa il prodursi di tale evento.

La situazione descritta sopra può essere formalizzata nel modo seguente.

**Definizione 1** Una **funzione guadagno** su  $\Omega = \{+, -\}$  é una funzione  $G$ , definita sullo spazio degli eventi (o delle possibilità) e a valori reali:

$$G : \Omega = \{+, -\} \rightarrow \mathbb{R}$$

con la proprietà che  $G(+)$  é un numero positivo e  $G(-)$  un numero negativo.

Intuitivamente essa descrive quanto guadagna  $A$  se accade l'evento  $+$  e quanto perde se accade l'evento  $-$ . Piú precisamente:

(i) se accade l'evento  $+$ ,  $A$  guadagna  $G(+)$  =:  $G_+ \geq 0$

(ii) se accade l'evento  $-$ ,  $A$  perde  $G(-)$  =:  $-G_- \leq 0$

Per esempio,  $A$  deve pagare  $G_-$  per poter entrare in un piano d'investimenti e, se tale piano ha successo, il suo guadagno netto sarà  $G_+$ , altrimenti perde il capitale investito.

Osservare che, per una funzione guadagno  $G$  l'insieme  $H$  dei valori é:

$$(G(+), G(-)) = (G_+, -G_-) \quad (2)$$

Poiché la funzione  $G$ , sullo spazio  $\Omega = (\{+, -\})$ , é univocamente definita mediante la (2) dai due numeri positivi  $(G_+, G_-)$ , nel seguito spesso parleremo della *funzione guadagno*  $(G_+, G_-)$ .

### 3.2 Schemi di rischio (dicotomico)

**Definizione 2** Uno *schema di rischio dicotomico* (nel seguito spesso diremo semplicemente un "rischio") per  $A$  é determinato da 3 numeri

$$\{G_+, G_-, p\} \quad (3)$$

con le seguenti proprietà:

$$G_+ \geq 0$$

é la somma che  $A$  guadagna se l'evento  $+$  si verifica

$$G_- > 0$$

é la somma che  $A$  perde se l'evento  $-$  si verifica

$$p(+) := p \in [0, 1]$$

é la probabilità che l'evento  $+$  si verifichi.

Lo schema di rischio (3)  $\{G_+, G_-, p\}$  viene detto: - standard se soddisfa le seguenti due condizioni:

$$G_+ > 0 \quad ; \quad G_- > 0 \quad (4)$$

- catastrofico (resp. non catastrofico) se

$$G_+ < G_- \quad \text{resp.} \quad G_+ \geq G_-$$

### Osservazioni.

(i) Come si é già visto, dato che per il tertium non datur almeno uno dei due eventi  $\{+, -\}$  si verifica, la probabilità che l'evento  $-$  si verifichi é

$$p(-) = 1 - p \in [0, 1]$$

(ii) I modelli dicotomici del tipo: ( $A$  guadagna  $- A$  non guadagna) sono molto idealizzati e, in una analisi piú approfondita, vanno sostituiti con modelli *a scala*, in cui gli eventi possibili sono molti (virtualmente infiniti) e la funzione guadagno assume una molteplicitá (eventualmente infinita) di valori.

Nel seguito tuttavia ci occuperemo solo del caso dicotomico.

**Definizione 3** *La quantità*

$$r_A := (1 - p)G_- \tag{5}$$

sará detta **indice del rischio** dello schema  $\{G_+, G_-, p\}$ .

**Osservazione.** In altre parole:  
*l'indice del rischio é la perdita pesata con la sua probabilità.*

### 3.3 Varie tipologie di rischio

Non in tutte le situazioni rischiose é possibile quantificare, i guadagni o le perdite, cioé definire i numeri  $G_+$  e  $G_-$ . Tra le varie possibilità che possono darsi distinguiamo quattro casi principali:

- (i) sia  $G_-$  che  $G_+$  sono certi
- (ii)  $G_-$  é certo,  $G_+$  é incerto
- (iii)  $G_+$  é certo,  $G_-$  é incerto
- (iv)  $G_+$  e  $G_-$  sono entrambi incerti.

Caso (i)

é tipico di molti giochi d'azzardo. Per esempio, puntando una certa somma alla roulette, non si sa se si vince, ma se si vince l'ammontare della vincita é univocamente determinato.

Caso (ii)

Un venture capitalist investe una somma  $G_-$  in una nuova azienda. In questo caso il massimo che egli puó perdere é  $G_-$ . In prima approssimazione si puó identificare il massimo della perdita con la perdita. Tuttavia quello che puó guadagnare é incerto poiché non sempre é possibile prevedere i guadagni di

una nuova azienda.

Caso (iii)

Un esempio importante é quello delle commesse o degli appalti: un'azienda si aggiudica una commessa del valore di  $G_+$ , che é quello che prenderá. I costi che dovrá sostenere per realizzarlo cioé  $G_-$  sono però aleatori.

Altro esempio del caso (iii): un avvocato, pagato a success fee, stabilisce che la sua parcella in caso di successo é  $G_+$ . Anche supposta nota  $p$ , la probabilità di successo valutare  $G_-$  é difficile poiché quello che l'avvocato perde é il suo tempo, la sua competenza,...

Queste si possono parzialmente stimare (stima conservativa sulla base del valore attuale). Ma la stima, per esempio, del tempo libero investito é molto piú difficile.

Caso (iv)

Un industriale fonda una nuova impresa. Se non é lui stesso a porre una soglia superiore,  $G_-$  é incerto (si tratta di quello che alla fine avrá investito). Allo stesso modo é incerto  $G_+$  (cioé quello che alla fine avrá guadagnato).

### 3.4 Rischi d'uso

Ci sono situazioni in cui é possibile valutare o stimare:

(i) la perdita  $G_-$ , in caso di evento  $-$ ;

(ii) la probabilità  $(1 - p)$  di tale evento

ma non é facile quantificare  $G_+$  in caso di evento  $+$ , e in molti casi l'unica possibilitá ragionevole é quella di porre  $G_+ = 0$ .

In casi di questo genere si parla di **rischi d'uso**.

**Esempio (1).** Un esempio tipico é il furto di un'opera d'arte.

Riferendoci solo al valore economico e prescindendo da eventuali fattori emotivi, possiamo ritenere noto il valore di mercato  $V$  di un'opera d'arte.

Se  $A$  possiede l'opera e questa viene rubata, il danno economico subito da  $A$  é quindi

$$-G_- = -V$$

Se l'opera non viene rubata entro un certo periodo non é facile quantificare il guadagno economico proveniente ad  $A$  da questo evento (evento  $+$ ).

La probabilità che un'opera d'arte di un certo tipo venga rubata é stimabile mediante le statistiche relative a eventi del genere.

**Esempio (2).** Il furto di un'automobile.

Per un generico cittadino  $A$ , che per esempio non fa il trasportatore di pro-

fessione, non é facile valutare quanto possesso di una automobile contribuisca al suo reddito.

Tuttavia se questa automobile viene rubata, la perdita  $G_-$  subita da  $A$  é facilmente quantificabile poiché corrisponde al valore dell'automobile all'istante del furto.

Una stima della probabilità di furto di un'automobile, di un determinato tipo, é stimabile, una volta note le statistiche sui furti delle auto.

**Esempio (3).** Un discorso analogo si può fare sostituendo al rischio del furto il rischio di causare un incidente.

Per costruire un modello matematico di tali rischi ragioniamo come segue. Prima del contratto se  $A$  non fa un incidente (evento  $+$ ) allora non perde e non guadagna nulla:

$$G_A^0(+)=0$$

Se  $A$  fa un incidente (evento  $-$ ) allora perde  $G_-$ :

$$G_A^0(-)=-G_-$$

In tutti questi casi é ragionevole supporre che lo schema di rischio ad essi associato sia del tipo:

$$\{0, G_-, p\}$$

I rischi corrispondenti a questo schema saranno chiamati *rischi d'uso*.

## 4 Guadagno medio e guadagno atteso

**Definizione 4** Sia  $\{G_+, G_-, p\}$  uno schema di rischio. La funzione guadagno ad esso associata é per definizione:

$$G(+)=G_+ \quad ; \quad G(-)=-G_-$$

Il guadagno atteso di tale funzione, detto anche guadagno atteso del rischio é:

$$E(G)=E_P(G)=M(G)=\dots=\langle G \rangle := G_+p - G_-(1-p)$$

In alcuni casi il valor medio di una grandezza non ha nulla di aleatorio cioè *valor medio* e *valore atteso* non sono la stessa cosa.

**Esempio (1). Verifica delle previsioni di guadagno.**

Una azienda produce un software che vende a diverse categorie di clienti con un guadagno diverso, dipendente dalla categoria.

Per esempio, se venduto a un singolo individuo, il software avrà un prezzo, se venduto a una banca o un ministero con una licenza d'uso per  $M$  utenti, il guadagno per utente sarà tanto più piccolo quanto più  $M$  è grande.

Sia  $S$  l'insieme delle possibili categorie di utenti.

L'azienda ritiene che su un cliente della categoria  $s \in S$  guadagnerà  $G(s)$  e, sulla base di ricerche di mercato, ritiene che tra tutti i suoi clienti, una frazione  $p_s$  apparterrà alla categoria  $s$ .

Su questa base l'azienda prevede che il suo guadagno medio per cliente della categoria  $s$  sarà

$$G(s)p_s$$

e quindi il suo guadagno medio per cliente sarà

$$\sum_{s \in S} G(s)p_s = \langle G \rangle_{\text{prev}}$$

Alla fine dell'anno l'azienda ha raggiunto  $N$  clienti e

$$N = \sum_{s \in S} N_s$$

è la loro suddivisione per categorie.

Quindi il guadagno attuale medio per cliente sarà:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N G_n = \frac{1}{N} \sum_{s \in S} \sum_{\text{categoria}} G_{s_j} = \sum_{s \in S} G(s) \frac{N_s}{N} = \langle G \rangle_{\text{att}}$$

Come si vede il valor medio si può calcolare come media aritmetica su tutti i clienti oppure come media pesata per categoria. Il numero è lo stesso, ma il secondo metodo contiene più informazione.

**Esempio 1** Una fabbrica produce  $N$  stampanti. Se il pezzo non ha difetti, il produttore guadagna  $G_+$ , se il pezzo è difettoso, il produttore perde  $G_-$ . Entrambe le cifre sono intese al netto del costo.

Dopo la produzione totale, una frazione  $p_+$  di stampanti risulta perfetta e una frazione  $p_-$  invece risulta difettosa. Denotiamo:

- $N$  il numero di stampanti prodotte
  - $N_+$  il numero di stampanti senza difetti
  - $N_-$  il numero di stampanti con difetti
- Il guadagno totale del produttore é quindi

$$G_+N_+ - G_-N_- = B$$

Il guadagno medio del produttore per ogni singola stampante (cioé il guadagno medio per unità prodotta) é

$$\frac{B}{N} = G_+ \frac{N_+}{N} - G_- \frac{N_-}{N} = G_+p_+ - G_-p_-$$

Quindi: il guadagno del produttore per unità prodotta coincide con il valore atteso della variabile casuale

$$G \equiv \{(G_+, G_-), (p_+, p_-)\}$$

tuttavia nella situazione descritta tutto é perfettamente determinato e non vi é nulla di casuale.

### **Esempio (3).**

Un'officina propone all'imprenditore dell'esempio precedente, di effettuare dei lavori sugli impianti di produzione, che diminuiranno i pezzi difettosi del 30% lasciando inalterata la capacità produttiva.

Qual é il prezzo massimo che l'imprenditore può pagare per tali lavori nell'ipotesi che nel prossimo esercizio l'imprenditore cambierà completamente l'impianto?

#### **Risposta.**

Dato che la capacità produttiva é inalterata, il numero di unità prodotte é ancora  $N$ .

Il numero di unità difettose, dopo il rinnovo degli impianti, sarà:

$$M_- = N_- - \frac{30}{100} N_- = \left(1 - \frac{3}{10}\right) N_- = (7/10)N_-$$

Dato che  $M_+ + M_- = N$  e:

$N - M_- = M_+$  = numero di unità non difettose dopo il rinnovo, si ha che

$$M_+ = N - M_- = N - \left(1 - \frac{3}{10}\right) N_- = N - \frac{7}{10} N_-$$

Quindi il guadagno dopo il rinnovo sarà:

$$\begin{aligned} G_+M_+ - G_-M_- &= G_+ \left( N - \frac{7}{10} N_- \right) - G_- \left( \frac{7}{10} \right) N_- = \\ &= G_+ \left( N - N_- + \frac{3}{10} N_- \right) - G_- N_- + G_- \frac{3}{10} N_- = (G_+N_+ - G_-N_-) + (G_+ + G_-) \frac{3}{10} N_- \end{aligned}$$

Dato che  $G_+N_+ - G_-N_-$  é il guadagno prima del rinnovo, l'imprenditore con il rinnovo guadagnerebbe

$$(G_+ + G_-) \frac{3}{10} N_-$$

Pertanto questa é la massima cifra che l'imprenditore può pagare per il rinnovo. (A questa conclusione si può arrivare direttamente, senza fare conti: come?)

**Esempio (4).**

Come varia la risposta alla domanda dell'Esempio (3) sulla convenienza dell'investimento per far diminuire del 30% i pezzi difettosi se contemporaneamente il nuovo impianto aumenta la produzione di pezzi sani del 5%?

**Risposta.**

In questo caso la capacità produttiva cambia da  $N$  a  $N + \frac{5}{100} N_+$  e si tratta solo di pezzi sani. Quindi il guadagno totale dopo il rinnovo sarà quello vecchio aumentato di  $G_+ \frac{1}{20} N_+$ , cioè

$$(G_+ + G_-) \frac{3}{10} N_- + G_+ \frac{1}{20} N_+$$

Pertanto questa é la massima cifra che l'imprenditore può pagare per il rinnovo. Questo si può verificare anche facendo il conto direttamente.

**Esempio (5).**

Come varia la risposta alla domanda dell'Esempio (3) sulla convenienza dell'investimento per far diminuire del 30% i pezzi difettosi se contemporaneamente il nuovo impianto aumenta la produzione di pezzi (non necessariamente sani) del 5%?

**Risposta.**

Nuovo numero totale di stampanti prodotte:

$$M := N + \frac{5}{100} N = \left( 1 + \frac{1}{20} \right) N = \frac{21}{20} N$$

Diminuire del 30 % il numero di pezzi difettosi ( $N_- \rightarrow N_- - (30/100)N_-$ ) equivale a far diminuire del 30 % la frazione di pezzi difettosi

$$N_-/N \rightarrow N_-/N - (30/100)N_-/N = \frac{N_-}{N} \frac{7}{10}$$

Il nuovo numero di pezzi difettosi sar  quindi dato dalla nuova frazione dei pezzi difettosi moltiplicata per nuovo numero totale, cio :

$$\left(\frac{N_-}{N} \frac{7}{10}\right) \frac{21}{20}N = \frac{21}{20} \left(\frac{7}{10}N_-\right) = \frac{147}{200}N_- =: M_-$$

Il nuovo numero pezzi sani  

$$M_+ := \frac{21}{20}N - M_- = \frac{21}{20}N - \frac{147}{200}N_-$$

Di conseguenza il nuovo guadagno sar :

$$\begin{aligned} G_+M_+ - G_-M_- &= G_+ \left(\frac{21}{20}N - \frac{147}{200}N_-\right) - G_- \frac{147}{200}N_- = \\ &= G_+ \frac{21}{20}N - N_- \frac{147}{200}(G_+ + G_-) = G_+ \frac{210}{200}N_+ + N_- \left(\frac{210}{200}G_+ - \frac{147}{200}(G_+ + G_-)\right) = \\ &= G_+ \frac{210}{200}N_+ + N_- \left(\frac{63}{200}G_+ - \frac{147}{200}G_-\right) = G_+ \frac{210N_+}{200} + \frac{63N_-}{200} - G_- \frac{147N_-}{200} \end{aligned}$$

Dato che il vecchio guadagno  

$$G_+N_+ - G_-N_-$$

la differenza sar 

$$\begin{aligned} G_+ \left(\frac{210N_+ + 63N_-}{200} - N_+\right) + G_- \left(N_- - \frac{147}{200}N_-\right) &= G_+ \left(\frac{10N_+ + 63N_-}{200}\right) + G_- \frac{63N_-}{200} \\ &= G_+ \frac{1}{20}N_+ + (G_+ + G_-) \frac{63}{200}N_- = G_+ \frac{N_+}{20} + (G_+ + G_-) \frac{3}{10}N_- + (G_+ + G_-) \frac{3}{200}N_- \end{aligned}$$

## 4.1 Dilemma dell'avversione al rischio e limiti dei criteri basati solo sul guadagno atteso

Il guadagno atteso é un numero ben definito una volta assegnato lo schema di rischio. Tuttavia, anche supponendo che tutti e tre i numeri che definiscono lo schema di rischio siano esattamente valutati, il suo significato puó essere fortemente soggettivo.

Ciò é illustrato dal seguente problema.

**Problema.** *Quale sceglieresti tra le due seguenti alternative?*

(I) Se scegli I ricevi  $x$  Euro.

(II) Se scegli II tiri un dado e, se esce un numero minore o uguale di 2, non ricevi niente; altrimenti ricevi  $10x$  E.

Nel primo caso hai un guadagno sicuro di  $x$  euro.

Nel secondo non guadagni niente con probabilità  $2/6 = 1/3$  oppure guadagni  $10x$  E con probabilità  $4/6 = 2/3$ , corrispondente ad un guadagno atteso di

$$0 \cdot \frac{2}{6} + 10x \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{3}x \geq 6,6x$$

che é molto maggiore del guadagno sicuro corrispondente al primo caso.

In casi come questo molti esiterebbero a sostituire un guadagno certo con uno incerto, anche se molto maggiore.

Nei contratti assicurativi si realizza la situazione inversa, cioè l'idea dell'assicurazione é che:

(i)  $A$  é disposta ad accettare una perdita certa per eliminare, o almeno attenuare, il rischio di una perdita incerta ma piú grande di quella certa.

(ii)  $B$  é disposto, in cambio di un guadagno certo, ad accettare una perdita incerta ma piú grande del suo guadagno.

Tuttavia essa é realistica e si presenta nei quiz televisivi dove un concorrente deve decidere se continuare, correndo il rischio di perdere ciò che ha guadagnato, oppure rinunciare all'opportunità di aumentare, anche notevolmente, ciò che ha vinto fino a quel momento incassando tale somma.

Osservare che il precedente esempio puó essere facilmente modificato sostituendo la alternativa (1) con una in cui si guadagna 1 E con probabilità molto vicina ad 1 e nulla con probabilità molto vicina allo zero.

## 4.2 Esperimenti di Tversky e Kahneman

Tversky e Kahneman presentarono a un ampio gruppo di soggetti la seguente situazione immaginaria. Supponiamo che gli Stati Uniti siano attaccati da una malattia che, secondo le previsioni causerá la morte di 600 persone.

Vengono messi a punto due programmi alternativi per fronteggiarla. Si ipotizzi che le stime scientifiche degli esiti dei due programmi siano le seguenti:

- se sará adottato il programma *A*, 200 persone saranno salvate;
- se sará adottato il programma *B*, con  $1/3$  di probabilitá si salveranno 600 persone e con  $2/3$  di probabilitá nessuno si salverá.

Il 72% degli interpellati scelse il programma *A*.

A un secondo gruppo di persone, le due alternative furono presentate come segue:

- se sará adottato il programma *A*, 400 persone moriranno;
- se sará adottato il programma *B*, con  $1/3$  di probabilitá nessuno morirá e con  $2/3$  di probabilitá 600 persone moriranno.

In questo caso, la percentuale di scelta del programma *A* scendeva clamorosamente al 22% delle persone.

La prima formulazione enfatizza le 200 vite salvate, mentre la seconda le 400 vite perse.

I risultati dei due esperimenti sono spiegati dagli Autori sulla base dell'*effetto-framing* (o *effetto-incorniciamento*), consistente nel fatto che le modalitá in cui le alternative sono presentate verbalmente condizionerebbero il processo decisionale.

Tale effetto é tanto potente da condizionare negli stessi termini la decisione di persone con specifica competenza professionale, come i medici.

+ essere salvato, – essere morto,  
 $N_A$  numero di persone salvate se si sceglie il programma  $A$ ,  
 $N_B$  numero di persone salvate se si sceglie il programma  $B$ ,

$$\langle N_A \rangle = N_A = 200$$

$$\langle N_B \rangle = 600 \frac{1}{3} + 0 \frac{2}{3} = 600 \frac{1}{3} = 200$$

### 4.3 Varianza e rischio

Spesso si sceglie di misurare il rischio con la varianza.

$$\langle (G - \langle G \rangle)^2 \rangle = \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2 =: \text{Var} (G)$$

che é una quantità quadratica in  $G$ , cioè, se si scala  $G$  secondo la legge

$$G \mapsto \lambda G$$

la varianza di  $G$  varia secondo la legge

$$\text{Var} (\lambda G) = \lambda^2 \text{Var} (G)$$

Per evitare numeri grandi, spesso si sceglie di misurare il rischio con la dispersione, che é la radice quadrata della varianza:

$$F(G) := \sqrt{\text{Var} (G)} = \sqrt{\langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2}$$

e che ha il vantaggio di trasformarsi con la prima potenza di  $\lambda$ :

$$D(\lambda G) = |\lambda| D(G)$$

**Osservazione.** La varianza

$$\langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2 = \langle (G - \langle G \rangle)^2 \rangle$$

non distingue tra:

- ricavi superiori alla media
- ricavi inferiori alla media

Il rischio reale é rappresentato solo dai ricavi inferiori alla media, cioè

$$(G - \langle G \rangle)_- = \begin{cases} G - \langle G \rangle & , \text{ se } G < \langle G \rangle \\ 0 & , \text{ se } G \geq \langle G \rangle \end{cases}$$

**Esercizio .** Calcolare di varianza e dispersione dello schema d'investimenti descritto nell'Esempio (1).

## 5 Scommesse

### 5.1 Scommesse leali

Una **scommessa** tra  $A$  e  $B$  é un contratto con le seguenti regole. Dato un evento  $X$ , che può accadere o non accadere, se  $X$  accade,  $B$  paga  $G_+$  Euro ad  $A$  e, se  $X$  non accade,  $A$  paga  $G_-$  Euro a  $B$ .

Denotiamo  $+$  l'evento che  $X$  accade e  $-$  quello che non accade. Allora, denotando  $G_A, G_B : \{+, -\} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni guadagno rispettivamente di  $A$  e di  $B$ , si ha che:

$$G_A(+) = G_+ \quad ; \quad G_A(-) = -G_- \quad (6)$$

$$G_B(+) = -G_+ \quad ; \quad G_B(-) = G_- \quad (7)$$

e quindi

$$G_A = -G_B \quad (8)$$

#### Osservazione.

La (8) é equivalente alla condizione

$$G_A + G_B = 0$$

Nella teoria dei giochi, questa proprietá si esprime dicendo che *una scommessa é un gioco a somma zero*. Ciò significa che quello che  $A$  guadagna é esattamente quello che  $B$  perde e viceversa.

Da quanto detto finora possiamo astrarre la seguente definizione di scommessa.

**Definizione 5** Una **scommessa** di  $A$  con  $B$  é determinata dallo schema di rischio (v. Definizione (2))

$$\{G_+, G_-, p\}$$

dove  $p$  é la probabilitá che  $B$  paghi  $G_+$  ad  $A$  e  $1 - p$  é la probabilitá che  $A$  paghi  $G_-$  a  $B$ .

$$Pr(G_A = G_+) = p \quad ; \quad Pr(G_A = -G_-) = 1 - p$$

La scommessa é detta **leale in media** (ovvero **un gioco d'azzardo**) se il guadagno atteso di  $A$  é uguale al guadagno atteso di  $B$ :

$$\langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle \quad (9)$$

**Teorema 1** La scommessa  $\{G_+, G_-, p\}$  é leale in media se e solo se una delle seguenti condizioni equivalenti é soddisfatta:

$$\langle G_A \rangle \geq 0 \quad ; \quad \langle G_B \rangle \geq 0 \quad (10)$$

$$\langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle = 0 \quad (11)$$

$$p = \frac{G_-}{G_+ + G_-} = \frac{1}{1 + G_+/G_-} \quad (12)$$

$$\frac{G_+}{G_-} = \frac{1}{p} - 1 \quad (13)$$

$$\left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-}{G_+} = 1 \quad (14)$$

$$G_+p = G_-(1 - p) \quad (15)$$

**Dimostrazione.** Tenuto conto della (8), dire che il guadagno atteso di  $A$  é uguale a quello di  $B$  significa dire che:

$$\langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle = \langle -G_A \rangle = -\langle G_A \rangle$$

e ciò equivale a dire che

$$\langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle = 0$$

che é la (11). Poiché  $G_B = -G_A$  anche i guadagni attesi sono opposti, quindi la (10) può valere se e solo se vale la (11). Il guadagno atteso di  $A$  é:

$$\langle G_A \rangle = G_+p - G_-(1 - p) \quad (16)$$

quindi (11) equivale a (15). La (16) equivale anche a

$$0 = G_+p - G_-(1 - p) \iff G_+p = G_-(1 - p) \iff \frac{G_+}{G_-} = \frac{1}{p} - 1$$

che é la (13). Infine

$$G_+p = G_-(1 - p) \iff (G_+ + G_-)p = G_- \iff p = \frac{1}{1 + G_+/G_-}$$

che é la (12).

**Osservazione** . La formula (12), o una delle sue versioni equivalenti (13), (14), (15), sarà detta **la formula fondamentale delle scommesse leali in media**.

Notare che tutte le formule fondamentali delle scommesse leali in media non dipendono separatamente da  $G_+$  e  $G_-$ , ma solo dal quoziente  $G_+/G_-$ , ciò implica che tali formule sono invarianti per dilatazione, cioè per la trasformazione

$$G_{\pm} \rightarrow \lambda G_{\pm} ; \quad \lambda > 0 \iff G \rightarrow \lambda G \quad (17)$$

## 5.2 Posta di una scommessa

**Definizione 6** *Se  $p \in [0, 1]$  è la probabilità di un evento. Si dice che la sua **posta** è di  $\frac{1}{p} - 1$  a uno.*

**Osservazione.** La condizione (13), di scommessa leale in media equivale a:

$$\frac{G_+}{G_-} = \frac{1}{p} - 1 \quad (18)$$

cioé al fatto che: **il quoziente  $G_+/G_-$  è uguale alla posta della scommessa.**

**Esempio 1** Se  $p = \frac{1}{2}$  la posta è  $2 - 1 = 1$  a 1

**Esempio 2** Se  $p = \frac{1}{6}$  la posta è  $6 - 1 = 5$  a 1 (gioco dei dadi).

Come si vede dalla (18) la posta di un evento rappresenta il rapporto tra guadagno e perdite in una scommessa leale.

Riassumendo: se conosco la probabilità di un evento, la sua posta è il quoziente delle somme che  $A$  e  $B$  devono scommettere affinché la scommessa risulti leale in media.

Viceversa, fissato il quoziente  $G_+/G_-$ , per ottenere una scommessa leale in media, occorre definire una probabilità in modo tale che la relazione (18) sia soddisfatta.

**Esempio 2** Estrazioni casuali con re-imbussolamento (variante del gioco del Lotto): si estrae a caso un numero su 90 poi, dopo aver letto il risultato, si re-imbussola la pallina estratta. Siano

–  $p = 1/90$  la probabilità di un numero (gioco leale)

–  $p(i, j) = 2/90^2 = 1/4050$  probabilità di un ambo (coppia di numeri non

ordinata). Il fattore 2 é dovuto al fatto che un ambo corrisponde alle 2 coppie ordinate  $(i, j)$  e  $(j, i)$ .

Supponiamo che giocare un ambo costi 1 Euro:  $G_- = 1 E$

Se il gioco fosse leale la vincita,  $G_+$  dovrebbe soddisfare l'equazione :

$$\frac{1}{4050} = \frac{1}{1 + G_+} \iff 1 + G_+ = 4050 \quad (19)$$

Quindi la vincita dovrebbe essere:

$$G_+ = 4051E \quad (20)$$

**Esercizio.** Come varia la conclusione dell'esempio precedente se l'estrazione avviene senza re-imbussolamento?

**Esercizio.** Supponiamo che un biglietto di lotteria costi 1 Euro e che il premio sia di 700.000 Euro. Supponiamo che siano stati venduti 2 Milioni di biglietti e che l'estrazione tra essi sia con probabilitá uniforme. Quanto dovrebbe essere la vincita se il gioco fosse leale?

### 5.3 Rischio di puro azzardo

Ispirati dal risultato sulle scommesse leali, introduciamo la seguente definizione.

**Definizione 7** Un rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  é detto *di puro azzardo* se il guadagno atteso ad esso associato é nullo:

$$\langle G \rangle = 0 \quad (21)$$

**Osservazione.** Un esempio tipico é l'acquisto di un biglietto di una lotteria ideale.

Ci si potrebbe chiedere: *se il guadagno atteso di  $A$  é nullo o addirittura negativo, perché mai  $A$  dovrebbe investire nel gioco?*

La risposta sta nel fatto che, in condizioni normali, nel gioco d'azzardo  $G_-$  (investimento per entrare nel gioco) é piccola mentre  $G_+$  é grande.

Anche se  $p$  é molto piccola, e quindi  $A$  sa che quasi certamente perderá  $G_-$ , il beneficio di vincere  $G_+$  é talmente grande che  $A$  é disponibile ad accettare un guadagno atteso negativo (ma sperabilmente piccolo) attratta dal miraggio di entrare nella zona di probabilitá piccola e di vincere. La logica é:

*Se perdo per me non cambia nulla. Se vinco, la mia vita cambia radicalmente.*

## 5.4 Scommesse multiple: Lotterie senza costi

Le regole del gioco sono:

- Si pagano  $c$  Euro per partecipare al gioco.
- Dopo il pagamento si riceve un numero progressivo.
- I biglietti si vendono dal tempo 0 al tempo  $T$ .
- Se, al tempo  $T$ ,  $N$  persone hanno acquistato il biglietto, al tempo  $T + 1$  si estrae a caso uno dei numeri assegnati e il possessore del numero estratto riceve  $Nc$  Euro.

In questo caso per ogni partecipante il rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  é dato da:

$$p = \frac{1}{N}$$

$$G_- = c$$

$$G_+ = Nc - c = (N - 1)c$$

Il suo guadagno atteso é

$$pG_+ - (1 - p)G_- = \frac{1}{N}(N - 1)c - \left(1 - \frac{1}{N}\right)c = 0$$

## 5.5 Lotterie con costi

Le regole sono come prima, ma il vincitore non riceve  $Nc$ , ma  $(N - M)c$ . Cioé una parte dei ricavi, pari a  $Mc$ , serve a coprire i costi di organizzazione. In questo caso  $p$  e  $G_-$  sono come prima, mentre

$$G_+ = (N - M - 1)c$$

Il guadagno atteso di un partecipante é

$$\langle G \rangle = pG_+ - (1 - p)G_- = \frac{1}{N}(N - 1 - M)c - \left(1 - \frac{1}{N}\right)c = -\frac{M}{N}c < 0$$

Quindi: in una lotteria con costi, anche se l'organizzatore rinuncia completamente al proprio guadagno il guadagno atteso del singolo partecipante é negativo.

Tuttavia la gente continua a giocare alla lotteria **se il costo del biglietto é sufficientemente piccolo.**

## 5.6 Scommesse asimmetriche

La differenza tra scommesse simmetriche e scommesse asimmetriche sta nel fatto che, nelle scommesse simmetriche non c'è investimento iniziale mentre nelle scommesse asimmetriche c'è. In questo senso le scommesse asimmetriche sono più simili agli investimenti.

**Definizione 8** Dato un evento  $X$ , che può accadere o non accadere, per **scommessa asimmetrica** (o con allibratore) su  $X$  tra il giocatore  $A$  e il banco  $B$  si intende un rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  con le seguenti regole.

- $A$  paga a  $B$   $G_-$  Euro per entrare nel gioco;
- se  $X$  accade,  $B$  paga  $(G_- + G_+)$  Euro ad  $A$ ;
- se  $X$  non accade,  $B$  si trattiene i  $G_-$  Euro ricevuti da  $A$ .

**Osservazione.** La scommessa asimmetrica  $\{G_+, G_-, p\}$  equivale alla scommessa simmetrica  $\{G_+, G_-, p\}$  nel senso che sia lo spazio di probabilità, sia le funzioni guadagno di  $A$  e di  $B$  coincidono nei due casi. L'unica differenza è che, nella scommessa asimmetrica, si considera il ricavo totale di  $A$  in caso di vincita, cioè  $G_+ + G_-$ , mentre in quella simmetrica, si considera solo il guadagno netto.

Le funzioni guadagno di  $A$  e di  $B$  sono date rispettivamente da

$$\begin{aligned} G_A(+) &= G_+ ; & G_A(-) &= -G_- \\ G_B(+) &= -G_+ ; & G_B(-) &= G_- \end{aligned}$$

**Esempio Caso della Roulette** Supponendo che la roulette non sia truccata (gioco leale), la probabilità che un giocatore  $A$  vinca puntando sul rosso è

$$p_A = \frac{18}{37}$$

La probabilità che il banco  $B$  vinca se  $A$  punta sul rosso è

$$p_B = P(\text{nero}) + P(0) = \frac{18}{37} + \frac{1}{37} = \frac{19}{37}$$

Il guadagno atteso di  $A$  è

$$\begin{aligned} p_A G_A(+) + (1 - p_A) G_A(-) &= \langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle = p_B G_B(+) + (1 - p_B) G_B(-) \\ \iff \frac{18}{37} G_+ - (1 - \frac{18}{37}) G_- &= \frac{19}{37} G_- - (1 - \frac{19}{37}) G_+ \end{aligned}$$

$$\iff 18G_+ - (37-18)G_- = 19G_- - (37-19)G_+ \iff 18G_+ - 19G_- = 19G_- - 18G_+$$

La condizione di lealtà in media, che garantisce uguali guadagni attesi ad  $A$  e a  $B$ , in questo caso diventa:

$$19G_- = 18G_+ \iff G_+ = \frac{19}{18}G_- \iff G_+ \sim 1,055G_-$$

Ricordando che il giocatore riceve  $G_- + G_+$ , si vede che, in condizioni di lealtà in media, un giocatore che puntasse sul rosso dovrebbe ricevere

$$G_- + G_+ \sim 1,055G_- + G_- = 2,055G_-$$

Ma nella roulette reale un giocatore che vince puntando sul rosso riceve solo 2 volte la posta puntata e non 2,055. Ciò garantisce al banco un guadagno di 55 millesimi su ogni vincita.

Per esempio, su 1000 vincite di 10 Euro il guadagno é

$$\frac{55}{10^3} 10^4 = 550 \text{ Euro}$$

Similmente, la probabilità che un giocatore  $A$  vinca puntando su un singolo numero, diciamo 1 é

$$p_A = \frac{1}{37}$$

e, in questo caso, la probabilità che vinca il banco  $B$  é

$$p_B = P(\neq 1) + P(0) = \frac{36}{37}$$

Quindi la condizione di lealtà in media é:

$$\begin{aligned} p_A G_A(+)+ (1-p_A)G_A(-) &= \langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle = p_B G_B(+)+ (1-p_B)G_B(-) \\ \iff \frac{1}{37}G_+ - \frac{36}{37}G_- &= \frac{36}{37}G_- - \frac{1}{37}G_+ \iff \frac{2}{37}G_+ = 2\frac{36}{37}G_- \\ &\iff G_+ = 36G_- \end{aligned}$$

Ricordando che ciò che il giocatore riceve é  $G_- + G_+$ , ciò significa che, in condizioni di lealtà in media, un giocatore che puntasse su un singolo numero dovrebbe ricevere 37 volte la posta puntata e non solo 36 volte. Ciò garantisce al banco un guadagno di una puntata su ogni vincita.

Per esempio, su 1000 vincite, tutte con puntate di 10 Euro, il guadagno é

$$10 \times 10^3 = 10.000 \text{ Euro}$$

## 5.7 Scommesse e tasso d'interesse

Nella scommessa asimmetrica se si verifica l'evento  $X$ ,  $A$  ricava

$$G_- + G_+ = G_- \left( 1 + \frac{G_+}{G_-} \right) =: G_-(1 + \tau)$$

Cioé: chi scommette una somma  $G_-$  e vince, riceve la somma  $(1 + \tau)G_-$ . In altre parole, se  $X$  si verifica,  $A$  ottiene quello che avrebbe ottenuto se avesse investito la somma  $G_-$  al tasso d'interesse  $G_+/G_-$ .

Per questo motivo il quoziente  $G_+/G_-$  sarà chiamato *il tasso d'interesse della scommessa*.

La condizione di scommessa leale in media richiede che:

$$\frac{G_+}{G_-} = \frac{1}{p_X} - 1 \iff 1 + \frac{G_+}{G_-} = 1 + \tau = \frac{1}{p_X}$$

e quindi si può esprimere dicendo che, **equiparando una scommessa leale ad un investimento finanziario, il fattore di capitalizzazione (cioé  $1 +$  tasso d'interesse) dev'essere uguale all'inverso della probabilità leale**. Equivalentemente, ricordando la definizione di posta, il tasso d'interesse dev'essere uguale alla posta:

$$\tau = \frac{1}{p_X} - 1$$

**Osservazione.** Notare che il tasso d'interesse della scommessa può dipendere da  $G_-$  solo nel caso in cui la stessa probabilità  $p_X$ , che garantisce il gioco leale in media, dipenda da  $G_-$ .

Se  $p_X$  non dipende da  $G_-$ , allora la condizione di gioco leale in media implica che  $B$  deve remunerare qualunque somma scommessa con lo stesso tasso d'interesse.

**Il caso in cui  $p_X$  dipenda da  $G_-$**  si può incontrare in alcuni contesti economici. Per esempio, se  $p_X$  é la probabilità di successo di un'impresa e  $G_-$  é l'investimento iniziale, allora é plausibile supporre che  $p_X$  dipenda da  $G_-$ . Infatti se, per esempio, gli investimenti sono insufficienti, allora la probabilità di successo diminuisce.

Nel seguito esamineremo alcune di queste possibili dipendenze.

## 6 Schemi di rischio associati ad investimenti

**Definizione 9** Un investimento (con 2 possibili esiti) é definito da 4 numeri positivi

$$\{I, R_-, R_+, p\} \quad (22)$$

interpretati come segue:

$I$  = capitale investito

$R_-$  = ricavo dalle vendite se accade l'evento  $-$

$R_+$  = ricavo dalle vendite se accade l'evento  $+$

$p$  = probabilità di ricavare  $R_+$ .

**Per definizione** "evento positivo" ( $+$ ) é un evento in cui non si perde, ciò corrisponde alla condizione

$$R_+ \geq I$$

Per motivi analoghi

$$R_- < I$$

L'investimento (22) é detto:

- **oculato** se

$$0 \leq R_- < I < R_+ \quad (23)$$

- **rischioso** se

$$R_- < 0 < I < R_+ \quad (24)$$

**non finanziabile** se  $R_+ < I$ .

**Osservazione.** In un investimento oculato l'investitore può perdere al più ciò che ha investito. Un caso tipico é l'investimento in azioni.

In un investimento rischioso la perdita può essere maggiore del capitale investito. Per esempio, se affonda una nave (o fallisce una azienda) l'armatore (o l'imprenditore) non solo perde il capitale investito in essa, ma deve anche risarcire le vittime (o rimborsare le merci perdute).

**Osservazione.** In modelli meno schematici il ricavo  $R$  in generale é una variabile casuale a piú valori. I due simboli  $R_+$ ,  $R_-$  vanno piú correttamente interpretati come: ricavo medio in caso di successo o, rispettivamente, di insuccesso.

**Lemma 1** L'investimento  $\{I, R_-, R_+, p\}$  equivale al rischio

$$\{G_+ := R_+ - I, G_- = I - R_-, p\}$$

In particolare il rischio associato é non catastrofico se e solo se:

$$I < \frac{1}{2}(R_+ + R_-)$$

**Dimostrazione** Supponiamo che  $A$  faccia l'investimento  $\{I, R_+, R_-, p\}$ . Allora, se  $A$  fattura  $R_+$  (risp.  $R_-$ ), il suo guadagno relativo netto sar 

$$G_+ = R_+ - I \quad ; \quad \text{risp.} \quad -G_- = -(I - R_-)$$

La condizione di non rischio non catastrofico  :

$$G_+ > G_- \iff R_+ - I > I - R_- \iff R_+ + R_- > 2I$$

## 6.1 Arbitraggio e misure neutre al rischio

**Definizione 10** (v. [Pliska97], sezione 1.2, pag. 9). Una opportunit  di arbitraggio   un rischio  $\{\Omega, G, P\}$  che soddisfa le due condizioni:

$$G \geq 0 \quad ; \quad \langle G \rangle > 0$$

In altre parole  $A$  non perde nulla qualunque cosa accada e fa un guadagno strettamente positivo  $G_+$  con probabilit  strettamente positiva.

Ricordare che nella definizione di schema di rischio si   supposto che  $G_-$  risulti sempre  $> 0$ .

**Esempio.** Sia  $\Omega = (+, -)$  con misura di probabilit   $(p, 1-p)$ . Allora, secondo le nostre notazioni, i valori di  $G$  sono  $(G_+, -G_-)$  e quindi una opportunit  di arbitraggio si pu  presentare se e solo se:

$$G_- = 0 \quad ; \quad G_+ > 0 \quad ; \quad p > 0$$

**Definizione 11** Dato un rischio  $\{(\Omega, P), G\}$  ogni misura di probabilit   $P^*$  equivalente a  $P$  e con la propriet  che

$$0 = \langle G \rangle^* = P^*(G) = \int G dP^* = \sum_{\omega \in \Omega} G(\omega) P^*(\omega) \quad (25)$$

  detta **neutra al rischio**.

Equivalentemente: una misura neutra al rischio   una misura di probabilit  equivalente a quella iniziale, per la quale il rischio diventa un gioco d'azzardo.

**Osservazione.** La condizione che  $P$  sia equivalente a  $P^*$  esclude le soluzioni banali, cioè quei casi in cui alcuni eventi considerati di probabilità zero per  $P$  acquistano una probabilità non nulla per  $P^*$  o viceversa. Senza di essa sarebbe banale, nella maggioranza dei casi, costruire esempi di misure neutre al rischio.

**Teorema 2** Dato il rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  con  $p > 0$ . Una misura neutra al rischio esiste se e solo se  $G_- \neq 0$ . In questo caso è unica ed è data da

$$(p^*, 1 - p^*) = \left( \frac{1}{1 + G_+/G_-}, \frac{1}{1 + G_-/G_+} \right) \quad (26)$$

**Dimostrazione.** La forma della misura neutra al rischio è data dalla (12) che equivale alla (26).

**Osservazione.** La (26) significa che, in un gioco d'azzardo, se il guadagno potenziale  $G_+$  è molto maggiore della perdita potenziale  $G_-$ , la probabilità leale è quasi nulla. Se invece la perdita potenziale  $G_-$  è molto maggiore del guadagno potenziale  $G_+$ , la probabilità si avvicina ad 1.

In questo senso l'investitore accorto dovrebbe ricercare situazioni lontane dal gioco d'azzardo, cioè evitare le condizioni in cui la misura di probabilità associata all'investimento è neutra al rischio.

## 6.2 Differenze tra investimenti e giochi d'azzardo

Si è visto che il rischio associato ad un investimento può essere equiparato a quello associato ad una scommessa, e quindi a un gioco, in cui  $A$  rappresenta l'investitore e  $B$  il mercato.

D'altra parte un investimento differisce da un gioco di puro azzardo per il fatto che uno non lo fa se non si aspetta di guadagnarci qualcosa, cioè se almeno la sua attesa di guadagno non è superiore a una certa soglia (strettamente positiva) stabilita dall'investitore stesso.

**Proposizione 1** La condizione di gioco leale in media, in un investimento, equivale al fatto che il ricavo atteso dell'investimento risulti pari alla somma investita.

**Dimostrazione.** La condizione è

$$\langle G \rangle = 0 \iff p = \frac{G_-}{G_+ + G_-}$$

che, in questo caso, dato che  $G_- = I - R_-$  e  $G_+ + G_- = R_+ - R_-$ , equivale a:

$$p = \frac{I - R_-}{R_+ - R_-} \quad ; \quad 1 - p = \frac{R_+ - I}{R_+ - R_-}$$

e quindi a:

$$\begin{aligned} \langle R \rangle &= R_+ p + R_- (1 - p) = R_+ \frac{I - R_-}{R_+ - R_-} + R_- \frac{R_+ - I}{R_+ - R_-} = \\ &= \frac{R_+ I - R_+ R_-}{R_+ - R_-} + \frac{R_- R_+ - R_- I}{R_+ - R_-} = \frac{(R_+ - R_-) I}{R_+ - R_-} = I \end{aligned}$$

La Proposizione 1 suggerisce di prendere come definizione della differenza fra un gioco d'azzardo e un investimento il fatto che il primo dovrebbe soddisfare la condizione di lealtà in media mentre il secondo si desidererebbe un guadagno atteso strettamente positivo.

### 6.3 Indice di rischio percentuale e guadagno atteso positivo

**Lemma 2** Sia  $\{G_+, G_-, p\}$  un rischio per  $A$ . Allora vale l'uguaglianza:

$$\langle G \rangle = p G_+ (1 - \rho) \quad (27)$$

cioé: *il guadagno atteso é uguale al guadagno virtuale pesato con il prodotto della sua probabilità per  $1 - \rho$ .*

In particolare le seguenti relazioni sono equivalenti:

$$\langle G \rangle \geq 0 \quad (\text{il guadagno atteso di } A \text{ é positivo}) \quad (28)$$

$$\rho_A = \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \frac{G_-}{G_+} \leq 1 \quad (29)$$

$$\frac{G_+}{G_-} \geq \frac{1}{p} - 1 \quad (30)$$

$$p \geq \frac{1}{1 + G_+/G_-} \quad (31)$$

**Dimostrazione.** La (27) segue da:

$$\langle G \rangle = pG_+ - (1-p)G_- = pG_+ \left[ 1 - \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \frac{G_-}{G_+} \right] = pG_+(1-\rho)$$

Data la (27), la mutua equivalenza di (28), (29), (30), é evidente. Infine (28) equivale a (31) poiché

$$\begin{aligned} \frac{p}{1-p} \geq \frac{G_-}{G_+} &\iff 1 - \frac{G_-}{G_+} \left( \frac{1-p}{p} \right) \geq 0 \iff \frac{(1-p)G_-}{pG_+} \leq 1 \iff \\ &\iff p \geq \frac{G_-/G_+}{1+G_-/G_+} = \frac{1}{1+G_+/G_-} \end{aligned}$$

**Definizione 12** Il quoziente

$$\rho_A := \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \frac{G_-}{G_+} = \frac{(1-p)G_-}{pG_+} \quad (32)$$

sará detto **indice di rischio percentuale** per  $A$ . Il prodotto

$$r_A := (1-p)G_- \quad (33)$$

sará detto **indice di rischio** per  $A$ . Notare che esso non dipende da  $G_+$ .

**Esercizio .** Nelle notazioni della sezione 5.5, supponiamo che  $N = 2.000.000$  ;  $M = 500.000$  ;  $c = 1$  Euro e che le estrazioni vengano fatte come descritto all'inizio di questa sezione. Calcolare l'indice di rischio percentuale sia per il concorrente che per l'organizzatore.

Risposta:

$$1 + \frac{1}{\frac{N-1}{M} - 1} \quad ; \quad \frac{M}{c} \left( 1 + \frac{1}{\frac{N-1}{M} - 1} \right)$$

**Lemma 3** In una scommessa tra  $A$  e  $B$ , associata al rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , per  $A$ , l'indice di rischio percentuale di  $B$  é l'inverso dell'indice di rischio percentuale per  $A$ .

**Dimostrazione.** Abbiamo visto che, in una scommessa simmetrica

$$G_B(+) = -G_+ \quad ; \quad G_B(-) = G_- \quad ; \quad p(-) = 1 - p$$

Ciò significa che il rischio per  $B$  é

$$\{G_-, G_+, 1 - p\}$$

cioé: scambiare i ruoli di  $A$  e  $B$  equivale a scambiare tra loro  $G_+$  e  $G_-$ ,  $p$  e  $(1 - p)$ . L'indice di rischio percentuale per  $B$  sarà quindi

$$\left(\frac{1}{1-p} - 1\right) \frac{G_+}{G_-} = \frac{p}{1-p} \frac{G_+}{G_-} = \left[\left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-}{G_+}\right]^{-1} = \frac{1}{\rho}$$

Con queste notazioni il Teorema (1) si può riformulare come segue.

**Corollario 1** La scommessa  $\{G_+, G_-, p\}$  é leale in media se e solo se l'indice di rischio per  $A$  é uguale all'indice di rischio percentuale per  $B$ . In questo caso l'indice di rischio di  $A$  é uguale all'indice di rischio di  $B$

**Dimostrazione.** Si é visto che l'indice di rischio percentuale per  $B$  é:

$$\rho_B = \frac{1}{\rho_A} \iff r_A = r_B \quad (34)$$

quindi, per il Lemma 3 l'uguaglianza può aver luogo se e solo se  $\rho_B = \rho_A = 1$ , cioè se la scommessa é leale.

La seconda affermazione segue da:

$$r_A = (1 - p)G_- \quad ; \quad r_B = pG_+$$

Quindi

$$r_A = r_B \iff (1 - p)G_- = pG_+ \iff \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-}{G_+} = 1$$

**Osservazione.** Dalla (32) segue che l'indice di rischio percentuale é una funzione decrescente della probabilità di successo  $p$ . Il valore minimo, cioè

$$\rho = 0$$

corrisponde quindi alla probabilità massima, cioè

$$p = 1$$

Inoltre  $\rho$  cresce linearmente in funzione della perdita potenziale  $G_-$  e decresce come l'inverso del guadagno potenziale  $G_+$ .

**Osservazione**

Il fatto che l'indice di rischio percentuale dipenda solo dal rapporto  $G_-/G_+$  suggerisce che, preso isolatamente, tale indice dia una informazione molto limitata.

Per esempio intuitivamente, a parità di probabilità, un rischio in cui  $A$  guadagna 1 ME o ne perde 2, è *più rischioso* di uno in cui  $A$  guadagna 1 E o ne perde 2. Tuttavia l'indice di rischio percentuale è lo stesso nei due casi.

**L'indice di rischio non presenta questo inconveniente.**

**Problema 1** Nelle notazioni della sezione (6.3) a parità di  $G_+$  e  $G_-$ , quali condizioni devono essere poste sulla probabilità  $p$  se si pone una soglia  $\alpha > 0$ , di guadagno atteso, al di sotto della quale  $A$  non entra nel gioco?

**Soluzione.** Se si vuole che

$$\alpha \leq E(G) = pG_+ - (1 - p)G_- = p(G_+ + G_-) - G_- \quad (35)$$

allora si deve scegliere

$$p \geq \frac{\alpha + G_-}{G_- + G_+} \quad (36)$$

e l'uguaglianza vale in (35) se e solo se essa vale in (36).

**Osservazione 1** A causa della possibilità di perdite, il guadagno atteso è sempre minore o uguale del guadagno  $G_+$ . Infatti

$$E(G) = pG_+ - (1 - p)G_- \leq pG_+ < G_+$$

è quindi ragionevole esprimere la soglia  $\alpha$  nella forma

$$\alpha = qG_+$$

dove  $q$  è un numero tra 0 e 1:

$$q \in (0, 1]$$

e la (36) diventa:

$$p \geq \frac{\alpha + G_-}{G_- + G_+} = \frac{qG_+ + G_-}{G_- + G_+} = \frac{q + \frac{G_-}{G_+}}{1 + \frac{G_-}{G_+}} \quad (37)$$

Osservare che la (37) può anche essere scritta nella forma

$$1 + \frac{G_-}{G_+} \geq \frac{p}{q} + \frac{1}{p} \frac{G_-}{G_+} \iff 1 \geq \frac{p}{q} + \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-}{G_+}$$

$$\iff 1 \geq \frac{p}{q} + \rho \quad (38)$$

In entrambe le forme si vede che la soluzione é invariante per la trasformazione (17) (cioé per dilatazione).

**Problema 2** Che condizione deve soddisfare la probabilità di successo  $p$  se  $G_+ = 3G_-$  e l'investitore vuole che il suo guadagno atteso sia  $\geq$  della metà del guadagno in caso di successo, come dev'essere la probabilità?

**Soluzione.** Sostituendo  $q = 1/2$  e  $G_-/G_+ = 1/3$  nella disuguaglianza (36) si trova

$$p \geq \frac{q + \frac{G_-}{G_+}}{1 + \frac{G_-}{G_+}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \sim 0,625$$

cioé la probabilità di successo dev'essere superiore al 62,5%.

**Esercizio.** Mostrare che l'investimento  $\{I, R_+, R_-, p\}$  ha guadagno atteso  $\geq \alpha$  se e solo se

$$p \geq \frac{\alpha + I - R_-}{R_+ - R_-} \quad (39)$$

## 6.4 L'indice di rischio percentuale di un investimento

**Proposizione 2** L'indice di rischio percentuale di un investimento é uguale a

$$\rho = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{I - R_-}{R_+ - I}$$

Se l'investimento é finanziabile, l'indice di rischio percentuale é  $\leq 1$  (cioé il guadagno atteso é positivo) se e solo se il valore atteso del ricavo é maggiore dell'investimento.

**Dimostrazione.** L'indice di rischio percentuale di un investimento é

$$\left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-}{G_+} = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{I - R_-}{R_+ - I}$$

Se l'investimento é finanziabile  $R_+ - I > 0$  e la condizione di guadagno atteso positivo diventa

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p} - 1\right)(I - R_-) \leq R_+ - I &\iff \left(\frac{1}{p} - 1\right)I + I = \frac{1}{p}I \leq R_+ + \left(\frac{1}{p} - 1\right)R_- \iff \\ &\iff I \leq pR_+ + (1 - p)R_- = \langle R \rangle \end{aligned}$$

che é la tesi.

## 6.5 Sensibilitá del guadagno atteso alla probabilitá

Vogliamo studiare come varia il guadagno atteso al variare della probabilitá di successo, diciamo, da  $p$  a  $p + \varepsilon$ . Dev'essere

$$0 < p + \varepsilon < 1 \iff \varepsilon < 1 - p \quad ; \quad p > -\varepsilon$$

Sotto queste condizioni si ha:

$$\begin{aligned} \langle G \rangle_{p+\varepsilon} &= G_+(p + \varepsilon) - (1 - p - \varepsilon)G_- = \langle G \rangle_p + \varepsilon(G_+ + G_-) \\ \iff \Delta \langle G \rangle_p &:= G_+(p + \varepsilon) - \langle G \rangle_{p+\varepsilon} = (1 - p - \varepsilon)G_- = \varepsilon(G_+ + G_-) \end{aligned}$$

Facciamo l'ipotesi di rischi di tipo investimento cioé

$$p > 1/2 \iff 1 - p < 1/2$$

**Caso (1):**  $\varepsilon > 0$  (la probabilitá di successo cresce). Quindi

$$\varepsilon \in [0, 1 - p] \subseteq [0, 1/2)$$

### Esempio 3

$$\varepsilon = \frac{3}{1000} \quad ; \quad G_+ = 10ME \quad ; \quad G_- = 90ME$$

e la variazione del guadagno atteso é

$$\Delta \langle G \rangle_p = \frac{3}{1000} \cdot 100 = \frac{3}{10} \sim 0,3ME \quad (40)$$

In questo caso la condizione di guadagno atteso positivo é

$$0 \leq \langle G \rangle_p = 10p - (1 - p)90 = 100p - 90 \iff p \geq 90/100$$

Se supponiamo che sia

$$p = 91/100$$

Allora il guadagno atteso diventa

$$\langle G \rangle_p = 10 \cdot \frac{91}{100} - 90 \frac{9}{100} = \frac{91}{10} - \frac{81}{10} = \frac{10}{10} = 1ME$$

Vediamo quindi che, nel caso in esame, un aumento del 3/1000 nella probabilità conduce a un aumento del guadagno atteso pari ai 3/10 del guadagno atteso iniziale.

**Problema.** Discutere il caso  $\varepsilon < 0$ , cioè  $\varepsilon \in (-p, 0)$ .

#### **Esempio 4**

Se, con i dati dell'Esempio 3, si sceglie :

$$\varepsilon = -\frac{3}{1000}$$

allora questa variazione nella previsione della probabilità porta il guadagno atteso, da una previsione iniziale di

$$\langle G \rangle_p = 1ME$$

alla previsione

$$\langle G \rangle_{p+\varepsilon} \sim 700.000E$$

Quindi c'è una diminuzione del guadagno atteso pari ai 3/10 del guadagno atteso iniziale. Ciò era prevedibile essendo questo caso il simmetrico del precedente.

#### **In particolare:**

Se la perdita potenziale è molto più grande del guadagno potenziale, una minima variazione nelle probabilità induce considerevoli fluttuazioni nel guadagno atteso.

**Problema 3** *A* propone a *B* un investimento che, se va male, costerà a *B* una perdita netta pari a:

$$G_- = 100.000 E$$

tuttavia la probabilità che l'investimento vada bene é

$$p = 90\%$$

se voi foste  $B$  quale sarebbe il minimo  $G_+$  (guadagno netto dell'investimento) per il quale accettereste di investire?

**Soluzione.** In mancanza di altre informazioni io applicherei il criterio del guadagno atteso positivo. Dato che il guadagno atteso é

$$\langle G \rangle = pG_+ - (1 - p)G_-$$

La condizione di guadagno atteso positivo equivale a:

$$\langle G \rangle > 0 \iff pG_+ > (1 - p)G_- \iff G_+ > \left(\frac{1}{p} - 1\right) G_-$$

Nel nostro caso:

$$\frac{1}{p} - 1 = \left(\frac{90}{100}\right)^{-1} - 1 = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$$

Quindi il guadagno minimo deve soddisfare la condizione:

$$G_+ > \frac{1}{9} \cdot 10^5 = \frac{100.000}{9} \sim 11.111$$

## 6.6 \* Paragone tra guadagni attesi

**Proposizione 3** Il guadagno atteso é una funzione strettamente crescente della probabilità di successo  $p$ .

**Dimostrazione.** Si ha

$$\langle G \rangle = p(G_+ + G_-) - G_-$$

quindi

$$\frac{d}{dp} \langle G \rangle = G_+ + G_- > 0$$

**Osservazione** Dalla proposizione (3) segue che, a parità di guadagni, cioè se

$$G_+ = G'_+ \quad ; \quad G_- = G'_-$$

allora paragonare i guadagni attesi equivale a paragonare le probabilità, cioè le seguenti affermazioni si equivalgono:

$$\langle G \rangle > \langle G' \rangle$$

$$p > p'$$

**Teorema 3** Dati due rischi

$$\{G_+, G_-, p\} ; \quad \{G'_+, G'_-, p'\}$$

e detti  $\rho, \rho'$  i rispettivi indici di rischio percentuale, se  $G_+, G'_+ \neq 0, \rho, \rho' \neq 1, p, p' \neq 0$ , allora risulta:

$$\frac{\langle G \rangle}{\langle G' \rangle} = \frac{pG_+(1 - \rho)}{p'G'_+(1 - \rho')} \quad (41)$$

**Dimostrazione.** La tesi segue dalla identità (27) (cioé  $\langle G \rangle = pG_+(1 - \rho)$ ).

**Definizione 13** La quantità a membro sinistro di (41) é detta **indice di rischio percentuale relativo**.

## 6.7 \* Paragone dei guadagni attesi di due rischi con uguale probabilità

Il seguente teorema é utile per paragonare il guadagno atteso di due rischi con uguale probabilità. Per esempio quelli relativi a un portafoglio prima o dopo aver sottoscritto una opzione su di esso.

**Teorema 4** Dati due rischi con uguale probabilità

$$\{G_+, G_-, p\} ; \quad \{G'_+, G'_-, p\}$$

e supponendo che risulti  $G_+ > G'_+$ , le seguenti affermazioni sono equivalenti:

$$\langle G \rangle > \langle G' \rangle \quad (42)$$

$$\left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_- - G'_-}{G_+ - G'_+} < 1 \quad (43)$$

**Dimostrazione.**

$$\begin{aligned} \langle G \rangle > \langle G' \rangle &\iff G_+p - (1-p)G_- > G'_+p - (1-p)G'_- \iff \\ &\iff p(G_+ - G'_+) > (1-p)(G_- - G'_-) \iff G_+ - G'_+ > \left(\frac{1}{p} - 1\right)(G_- - G'_-) \end{aligned}$$

Se  $G_+ > G'_+$ , ciò equivale a:

$$\left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_- - G'_-}{G_+ - G'_+} < 1$$

**Lemma 4** *Nelle ipotesi del Teorema (4), se inoltre  $G'_- < G_-$ , le seguenti condizioni sono equivalenti:*

$$\begin{aligned} \langle G \rangle < \langle G' \rangle \\ \frac{1 - G'_+/G_+}{1 - G'_-/G_-} > \rho \end{aligned}$$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned} \langle G \rangle < \langle G' \rangle &\iff \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G'_- - G_-}{G'_+ - G_+} < 1 \iff \tag{44} \\ &\iff \frac{G'_- - G_-}{G'_+ - G_+} < \left(\frac{1}{p} - 1\right)^{-1} \iff \frac{G_- G'_-/G_- - 1}{G_+ G'_+/G_+ - 1} < \left(\frac{1}{p} - 1\right)^{-1} \iff \\ &\iff \frac{G'_-/G_- - 1}{G'_+/G_+ - 1} = \frac{1 - G'_-/G_-}{1 - G'_+/G_+} < \left[\left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-}{G_+}\right]^{-1} = \frac{1}{\rho} \iff \\ &\iff \rho < \frac{1 - G'_+/G_+}{1 - G'_-/G_-} \end{aligned}$$

## 6.8 \* Paragone tra gli indici di rischio percentuale di due rischi con uguale probabilità

Siano

$$\{G_+, G_-, p\} \quad ; \quad \{G'_+, G'_-, p\}$$

due rischi con uguale probabilità.  $A$  può accettare che il suo guadagno atteso dopo il contratto sia inferiore a quello prima del contratto qualora anche il suo indice di rischio percentuale risulti minore. In questo modo  $A$  compenserebbe la diminuzione del guadagno atteso con una corrispondente riduzione del rischio.

**Lemma 5** Le seguenti condizioni sono equivalenti:

$$\frac{G'_-}{G_-} < \frac{G'_+}{G_+} \quad (45)$$

$$\rho' < \rho$$

**Dimostrazione.** Si ha

$$\rho' < \rho \iff \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G'_-}{G'_+} < \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-}{G_+} \iff \frac{G'_-}{G'_+} < \frac{G_-}{G_+} \iff \frac{G'_-}{G_-} < \frac{G'_+}{G_+} \quad (46)$$

Perció, la condizione che l'indice di rischio percentuale di  $A$  dopo il contratto sia minore di quello prima del contratto equivale alla (45).

## 6.9 \* Relazioni tra guadagno atteso e indice di rischio percentuale

La (27) mostra che  $\langle G \rangle$  (risp.  $\rho$ ) si esprime come funzione di  $pG_+$  e di  $\rho$  (risp.  $\langle G \rangle$ ).

Ci si puó chiedere se questa dipendenza sia o no monotona, cioé se ad un aumento del guadagno atteso corrisponda una diminuzione dell'indice di rischio percentuale o viceversa.

La risposta a ciascuna di queste domande é negativa. Infatti i due rischi

$$\{G_+, G_-, p\} ; \quad \{\lambda G_+, \lambda G_-, p\}$$

hanno lo stesso indice di rischio percentuale per ogni  $\lambda > 0$ . Quindi, se per esempio fosse vero che

$$\rho' \leq \rho \Rightarrow \langle G \rangle \leq \langle G' \rangle$$

allora, lo stesso varrebbe per l'uguaglianza e quindi per ogni  $\lambda > 0$ , dovrebbe risultare

$$\langle G \rangle \leq \langle G' \rangle = \langle \lambda G \rangle = \lambda \langle G \rangle$$

il che é possibile solo se  $\langle G \rangle = \langle G' \rangle = 0$ .

**Esercizio 1.** Paragonare i seguenti due rischi

$$p = 90 \quad ; \quad G_+ = 20 \quad ; \quad G_- = 100$$

$$p = 90 \quad ; \quad G'_+ = 15 \quad ; \quad G'_- = 69$$

Calcolando l'indice di rischio percentuale relativo si trova:

$$\left(\frac{100}{90} - 1\right) \frac{100 - 69}{20 - 15} = \frac{1}{9} \cdot \frac{31}{5} = \frac{31}{45} < 1$$

Quindi

$$\langle G \rangle > \langle G' \rangle$$

Facendo il calcolo direttamente si trova la stessa conclusione

$$\begin{aligned} \langle G \rangle &= \frac{9}{10}20 - \frac{1}{10}100 = 18 - 10 = 8 \\ \langle G' \rangle &= \frac{9}{10}15 - \frac{1}{10}69 = \frac{135 - 69}{10} = \frac{66}{10} = 6,6 \\ \langle G \rangle - \langle G' \rangle &= 1,4 \end{aligned}$$

**Esercizio.**

Cosa accade nell'esercizio precedente se, a parità degli altri dati,  $p' = 85\%$ ?

**Risposta** Se

$$p' = 85\% = \frac{85}{100}$$

allora:

$$\begin{aligned} \langle G \rangle &= \frac{85}{100}20 - \frac{15}{100}100 = \frac{85}{5} - 15 = 17 - 15 = 2 \\ \langle G' \rangle &= \frac{85}{100}15 - \frac{15}{100}69 = \frac{85}{20}3 - \frac{3}{20}69 \\ &= \frac{255 - 207}{20} = \frac{48}{20} = 2,4 \end{aligned}$$

Cioè  $\langle G' \rangle > \langle G \rangle$ . Quindi una diminuzione del 5% nella probabilità può condurre alla conclusione opposta.

## 6.10 \* Rischi catastrofici: posizione del problema

Nella Definizione (2) è stata introdotta la nozione di *rischio catastrofico* definito dalla condizione  $G_- > G_+$ .

In letteratura spesso si incontra il termine *rischio catastrofico* riferito a un evento (catastrofe) con probabilità piccola, denotata nel seguito  $1 - p$ , che comporta per'ò, per un soggetto  $A$ , una perdita grande.

Il problema nasce tipicamente nel contesto dei premi assicurativi. Un'assicurazione si riferisce a una situazione in un certo senso speculare a quella di

una lotteria: nella lotteria la perdita ( $G_-$ ) é piccola ma molto probabile, cioè la sua probabilità  $1 - p$  é molto vicina a 1; nell'assicurazione,  $1 - p$  é molto vicina a 0 ma  $G_-$  é grande. Denotiamo:

- $G_+$  il guadagno in assenza di catastrofe
- $G_-$  la perdita se la catastrofe si verifica
- $1 - p$  la probabilità della catastrofe.

In altri termini, quando si parla di *rischi catastrofici* si pensa a una situazione in cui:

$$1 - p \ll p \iff \frac{1}{2} \ll p \quad ; \quad G_- \gg G_+ \quad (47)$$

Come al solito, per evitare casi banali (guadagno o perdita sicura) supporremo che

$$0 < p < 1$$

## 6.11 Tipologie di contratti economici

Intuitivamente un *contratto economico* (nel seguito semplicemente *contratto*) tra  $A$  e  $B$  é un accordo su come ripartire i costi, i guadagni e le perdite di un investimento economico, che in generale saranno aleatori.

I parametri che caratterizzano un tale contratto sono quindi i guadagni e le perdite potenziali, che definiscono le rispettive funzioni guadagno, e i costi, rappresentati dal capitale investito.

**Definizione 14** Un **contratto** tra  $A$  e  $B$  relativo al rischio

$$\{G_+, G_-, p\} \quad (48)$$

é definito da 6 quantità:

$$\{\Omega, P, G_A, G_B, C_A, C_B\} \quad (49)$$

dove:

- $\Omega$  é un insieme, detto *spazio delle possibilità, o degli eventi*.
- $P$  é una misura di probabilità su  $\Omega$
- $G_A, G_B : (\Omega, p) \rightarrow \mathbb{R}$  sono variabili casuali dette rispettivamente **funzione guadagno di  $A$**  e di  **$B$** .

- $C_A, C_B : (\Omega, p) \rightarrow \mathbb{R}$  sono variabili casuali dette rispettivamente **capitale investito (o costi) da A** e da **B**.

**Osservazione.** Le funzioni guadagno di  $A$  e di  $B$  dipendono da  $G_+, G_-, C_A, C_B$ , dalle caratteristiche specifiche del contratto (assicurazione, opzione, ...) e devono soddisfare alcune condizioni di *coerenza economica*, in assenza delle quali non sarebbe economicamente razionale, per almeno uno dei due potenziali contraenti, sottoscrivere il contratto. Tali condizioni saranno discusse caso per caso.

Intuitivamente si vorrebbe che un contratto fosse *leale*, nel senso di non privilegiare alcuno dei due contraenti. Un criterio universale di *lealtà* di un contratto che, dato uno schema di rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  e i costi  $C_A, C_B$  permetta di determinare univocamente le funzioni guadagno di  $A$  e di  $B$ , non esiste. Quello che si può fare è concordare alcuni criteri generali che definiscano tali funzioni a meno di alcuni parametri e definire precisamente gli insiemi di variabilità di tali parametri. La determinazione di tali parametri dipenderà da ulteriori criteri, che non possono essere universali, ma dipenderanno da ulteriori condizioni, specifiche dei singoli contratti. Per la scelta dei criteri generali esistono moltissime possibilità, alcune delle quali sono le seguenti.

**Definizione 15** Un contratto tra  $A$  e  $B$  è detto:

- **equo in media** se il guadagno atteso per unità di capitale investito è uguale per entrambi:

$$\left\langle \frac{G_A}{C_A} \right\rangle = \left\langle \frac{G_B}{C_B} \right\rangle \quad (50)$$

- **ragionevole in media** se il guadagno atteso è positivo per entrambi:

$$\langle G_A \rangle \geq 0 \quad ; \quad \langle G_B \rangle \geq 0 \quad (51)$$

- **equo in rischio** se l'indice di rischio per unità di capitale investito è uguale per entrambi:

$$\frac{r_A}{C_A} = \frac{r_B}{C_B} \quad (52)$$

- **equo in rischio percentuale** se l'indice di rischio percentuale per unità di capitale investito è uguale per entrambi:

$$\frac{\rho_A}{C_A} = \frac{\rho_B}{C_B} \quad (53)$$

**Osservazione.** In molti casi i capitali investiti  $C_A, C_B$  non sono aleatori. In tali circostanze la condizione di equità in media di un contratto si può esprimere mediante l'identità

$$\frac{\langle G_A \rangle}{\langle G_B \rangle} = \frac{C_A}{C_B} \iff \frac{\langle G_A \rangle}{C_A} = \frac{\langle G_B \rangle}{C_B}$$

che esprime l'uguaglianza dei rapporti tra guadagni attesi e capitali investiti.

**Osservazione.** Nel seguito analizzeremo i 4 tipi di contratto introdotti nella Definizione 15 nell'ambito dei contratti assicurativi.

é intuitivamente chiaro che un contratto é *tanto piú equo* quanto maggiore é il numero di criteri di equità che esso soddisfa. Dal punto di vista matematico ciò si traduce nel fatto che gli insiemi dei parametri che garantiscono la soddisfazione simultanea di piú criteri é non vuoto. Vedremo in seguito che tale condizione non sempre é può essere soddisfatta.

## 7 Contratti assicurativi

Intuitivamente, si parla di un **contratto assicurativo** relativo al rischio  $\{G_+, G_-, p\}$

$$\{G_+, G_-, p\} \tag{54}$$

al quale corrisponde la funzione guadagno

$$G(+) = G_+ \quad ; \quad G(-) = -G_- \tag{55}$$

se  $A$  é disposta a corrispondere a  $B$  una somma, detta premio, al fine di diminuire l'entità di una eventuale perdita, mentre  $B$ , in cambio del premio, é disposto a coprire una parte della perdita di  $A$ .

Il problema che intendiamo affrontare nel seguito di queste lezioni é la determinazione di un insieme di criteri mediante i quali quantificare tale somma. A tal fine introduciamo le seguenti notazioni.

– *Il premio totale*  $P_a$  di un contratto é ciò che  $A$  é disposta a pagare per l'assicurazione. Se

$$G_+ > 0$$

allora si può introdurre il *premio*  $p_a$ , espresso come frazione del guadagno di  $A$  che definisce il premio attraverso la identità:

$$P_a := p_a G_+$$

–  $f_a$  *fattore rischio residuo o franchigia*, cioè la frazione di perdita che  $A$  è disposta a sopportare.

Per semplificare l'esposizione supporremo che:

- (i) l'assicurazione resti valida per una unità di tempo, per esempio un anno,
- (ii) tutti i pagamenti avvengano alla fine di questa unità di tempo.

Se si conviene di considerare equivalenti:

- (i) la somma  $S$  versata all'inizio dell'unità di tempo
- (ii) la somma  $(1 + \tau)S$  versata alla fine dell'unità di tempo, dove  $\tau$  è il tasso d'interesse in quella unità

allora questo schema equivale a quello più consueto, in cui l'assicurazione viene pagata in anticipo, nel senso che lo schema consueto è ottenuto da questo dividendo il premio  $P_a$  per  $1 + \tau$ , cioè:

$$P_a^{(\text{consueto})} = \frac{p_a}{1 + \tau}$$

## 7.1 Schema matematico del contratto di assicurazione

**Definizione 16** Un **contratto assicurativo** tra  $A$  (assicurato) e  $B$  (assicuratore), relativo al rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , è un contratto

$$\{\{+, -\}, p, G_A, G_B, C_A, C_B\} \quad (56)$$

nel senso della Definizione (14), caratterizzato dalle funzioni guadagno

$$G_A(+) = G_+ - P_a \quad ; \quad G_A(-) = -(f_a G_- + P_a) = -G_-(f_a + P_a/G_-) \quad (57)$$

$$G_B(+) = P_a - C_B \quad ; \quad G_B(-) = -(1 - f_a)G_- + P_a - C_B \quad (58)$$

dove:

- $P_a \in \mathbb{R}_+^*$  è il premio totale,
- $f_a \in [0, 1)$  è la franchigia,
- $C_A \in \mathbb{R}_+^*$  ( $C_B \in \mathbb{R}_+^*$ ) è il capitale investito  $A$  ( $B$ )

**Osservazione.** Quando non ci sono possibilità di confusione, il riferimento al rischio iniziale e ai costi è implicito e si parla di **contratto assicurativo**  $(f_a G_-, P_a)$  di  $A$  con  $B$  oppure  $(f_a, p_a)$  nel caso in cui  $G_+ > 0$ .

**Osservazione.** Un contratto  $(f_a G_-, P_a)$  cambia la funzione guadagno di  $A$

da (55) a (57) e introduce per  $B$  la funzione guadagno (58). Conseguentemente lo schema di rischio per  $A$  cambia da (54) in

$$\{G_+ - P_a, f_a G_- + P_a, p\} \quad (59)$$

e per  $B$  viene introdotto il seguente schema di rischio:

$$\{P_a - C_B, (1 - f_a)G_- + C_B - P_a, p\} \quad (60)$$

## 7.2 Il Teorema della conservazione del guadagno

**Teorema 5** In un contratto assicurativo riguardante il rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  la somma delle funzioni di guadagno di  $A$  e di  $B$  é uguale alla funzione guadagno iniziale meno i costi di  $B$ :

$$G_A + G_B = G - C_B \cdot 1 \quad (61)$$

In particolare la somma degli indici di rischio di  $A$  e di  $B$  é costante ed uguale all'indice del rischio iniziale meno l'indice di rischio relativo ai costi di  $B$ . Ovvero, denotando

$$r = (1 - p)G_- \quad (62)$$

$$r_A = (1 - p)(f_a G_- + P_a) \quad (63)$$

$$r_B = (1 - p)((1 - f_a)G_- - P_a + C_B) \quad (64)$$

gli indici del rischio iniziale e di quelli per  $A$  e per  $B$  dopo il contratto, risulta:

$$r_A + r_B = r + C_B(1 - p) \quad (65)$$

**Dimostrazione.** Da (55), (57) e (58), la somma delle funzioni guadagno di  $G_A$  e di  $G_B$  é data da:

$$G_A(+) + G_B(+) = G_+ - P_a + P_a - C_B = G_+ - C_B$$

$$G_A(-) + G_B(-) = -(f_a G_- + P_a) - (1 - f_a)G_- + P_a - C_B = -G_- - C_B \quad (66)$$

e ciò é equivalente a (61). Cambiando il segno di entrambi i membri di (66) e moltiplicandoli per  $1 - p$ , si trova

$$r_A + r_B = (1 - p)(f_a G_- + P_a) + (1 - p)((1 - f_a)G_- - P_a + C_B) = r + C_B(1 - p)$$

che é (65).

**Osservazione** Dal Teorema (61) segue che nessun contratto assicurativo può distruggere un rischio, cioè condurre a una situazione in cui sia l'assicurato che l'assicuratore abbiano la certezza non perdere, cioè  $G_A, G_B \geq 0$  (arbitraggio positivo sia per  $A$  che per  $B$ ). Infatti la (61) implica che  $G_A + G_B < G$ . Quindi, dato che  $G$  assume un valore strettamente negativo, non può essere somma di 2 funzioni positive.

Dato che Teorema (61) segue che un contratto assicurativo non può distruggere un rischio, ma solo suddividerlo, é naturale chiedersi:

*quali criteri utilizzare per effettuare la distribuzione tra perdite e guadagni virtuali?*

Soltanto una volta fissati tali criteri potremo rispondere a problemi più precisi come, per esempio:

(i) *fissato un premio, come distribuire il rischio fra l'assicuratore ed assicurato (franchigia)?*

(ii) *fissata una distribuzione del rischio fra l'assicuratore e l'assicurato (franchigia), quale premio dovrebbe corrispondere ad essa?*

### 7.3 Il guadagno atteso dell'assicurato ( $A$ )

**Osservazione.** In un qualsiasi contratto assicurativo, il guadagno virtuale di  $A$  diminuisce strettamente sempre. É naturale chiedersi se il guadagno atteso di  $A$  può aumentare.

**Lemma 6** In un contratto assicurativo il guadagno atteso di  $A$  dopo il contratto é:

$$\langle G_A \rangle = \langle G \rangle - (P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p)) \quad (67)$$

In particolare, le seguenti condizioni sono equivalenti:

$$\langle G_A \rangle \geq \langle G \rangle \text{ (il guadagno atteso di } A \text{ cresce)} \quad (68)$$

$$P_a \leq (1 - f_a)G_-(1 - p) \quad (69)$$

e, se  $P_a = p_a G_+$ , la (69) equivale a

$$p_a \leq (1 - f_a)p\rho \quad (70)$$

**Dimostrazione.** Il guadagno atteso di  $A$  prima del contratto é:

$$\langle G \rangle = G_+p - G_-(1-p)$$

Quello dopo il contratto é:

$$\begin{aligned} \langle G_A \rangle &= (G_+ - P_a)p - (f_a G_- + P_a)(1-p) = G_+p - f_a G_-(1-p) - P_a \\ &= G_+p - G_-(1-p) - P_a + (1-f_a)G_-(1-p) = \langle G \rangle + (1-f_a)G_-(1-p) - P_a \\ &= \langle G \rangle - (P_a - (1-f_a)G_-(1-p)) \end{aligned}$$

Questo é  $\geq \langle G \rangle$

$$\iff P_a - (1-f_a)G_-(1-p) \leq 0 \iff P_a \leq (1-f_a)G_-(1-p)$$

che é la (69). Se  $P_a = p_a G_+$  la (69) diventa

$$p_a G_+ \leq (1-f_a)G_-(1-p) \iff p_a \leq (1-f_a)p \frac{G_-}{G_+} \left(\frac{1}{p} - 1\right) = (1-f_a)p\rho$$

che é la (70).

## 7.4 Il guadagno atteso dell'assicuratore ( $B$ )

**Proposizione 4** Il guadagno atteso dell'assicuratore é

$$\langle G_B \rangle = \langle G \rangle - \langle G_A \rangle - C_B = (P_a - (1-f_a)G_-(1-p)) - C_B \quad (71)$$

**Proof.** Ricordando la (67), cioè

$$\langle G_A \rangle = \langle G \rangle - (P_a - (1-f_a)G_-(1-p))$$

e applicando il teorema di conservazione del guadagno si trova che

$$\langle G_B \rangle = \langle G \rangle - \langle G_A \rangle - C_B = (P_a - (1-f_a)G_-(1-p)) - C_B$$

□

## 7.5 Condizioni minimali di coerenza economica

Per motivi di coerenza economica si deve avere:

$$0 < P_a \quad ; \quad 0 \leq f_a < 1 \quad (72)$$

Infatti  $B$  non accetterebbe un contratto in assenza di premio ( $P_a = 0$ ) e  $A$  non accetterebbe un contratto in assenza di copertura ( $f_a = 1$ ).

D'altra parte contratti con  $f_a = 0$  sono comuni e chiamati **privi di franchigia** ovvero con **copertura totale**.

Il paragone tra i rischi (54) e (59), (60) chiarisce il significato economico del contratto  $(f_a, p_a)$ :  $A$  paga a  $B$  il premio  $P_a$ . In compenso la perdita potenziale di  $A$ , da  $G_-$  diventa  $f_a G_- + P_a$ , di cui la quota  $p_a G_+$  é una perdita sicura e la quota  $f_a G_-$  é una perdita aleatoria con la stessa probabilità della perdita iniziale.

In cambio del premio  $B$  assume il rischio di perdere  $(1 - f_a)G_- + C_B - P_a$ , cioè la differenza tra quello che ha percepito da  $A$  come premio e la copertura  $(1 - f_a)G_-$  garantita ad  $A$  piú i costi di gestione.

Questa interpretazione implica che la coppia ordinata  $(f_a G_-, P_a)$  non può essere un qualsiasi elemento di  $[0, 1) \times (0, +\infty)$  ma, oltre alla (72), deve soddisfare la **condizione di coerenza economica** suggerita dal seguente risultato.

**Lemma 7** (i) La condizione

$$P_a < (1 - f_a)G_- \iff P_a + f_a G_- < G_- \iff f_a + P_a/G_- < 1 \quad (73)$$

equivale al fatto che la perdita potenziale (o equivalentemente l'indice di rischio) di  $A$  diminuisca dopo il contratto.

(ii) Supposta valida la condizione necessaria (73), la condizione

$$P_a > C_B \quad (74)$$

equivale al fatto che la funzione guadagno di  $B$  non sia identicamente negativa.

**Dimostrazione.** Dato che la perdita potenziale per  $A$  dopo il contratto é  $f_a G_- + P_a$ , segue che essa diminuisce se e solo se vale la (73). Dato che l'indice di rischio di  $A$  dopo il contratto é  $(1 - p)(f_a G_- + P_a)$  segue che (73)

equivale alla sua diminuzione.

Se vale la (73), allora  $1 - (f_a + P_a/G_-) > 0$  quindi, dato che  $C_B > 0$ , si ha

$$G_B(-) = -G_-[1 - (f_a + P_a/G_-)] - C_B < 0 \quad (75)$$

D'altra parte

$$G_B(+) = P_a - C_B > 0 \iff P_a > C_B$$

e ciò prova l'asserto.

**Osservazione** Le condizioni di coerenza (73) e (74) implicano che

$$C_B < P_a < G_- \quad (76)$$

**Osservazione.** Dal Teorema (7) segue che:

– la coerenza economica della funzione guadagno  $G_A$  equivale alla validità della (73). Infatti, dato che in un contratto assicurativo il guadagno diminuisce, se non diminuisce anche la perdita, allora non c'è ragione di fare il contratto.

– Se vale (73), la validità della (74) è chiaramente necessaria per la coerenza economica della funzione guadagno  $G_B$ . Essa è anche sufficiente per la (75).

## 7.6 I costi di A

Notare che  $C_A$  non entra nel contratto assicurativo. Ciò è dovuto al fatto che di esso si è tenuto conto nel calcolo del rischio iniziale. Infatti  $G_+$  è il guadagno netto di A. Per B non si può fare una cosa simile, poiché B non ha rischio iniziale.

**Nel seguito si suporrà che**

$$C_A > C_B \quad (77)$$

Questa condizione è automaticamente soddisfatta nella maggior parte dei contratti. Infatti, supponendo che essa non sia soddisfatta, cioè che

$$C_A \leq C_B \quad (78)$$

a causa della (76) si avrebbe che

$$C_A < P_a$$

cioé che **il premio che  $A$  dovrebbe pagare all'assicuratore per proteggere il suo investimento sarebbe maggiore dell'investimento stesso.** D'altra parte una situazione come la (78) **non é economicamente impossibile**, infatti in caso di rischi fortemente catastrofici il verificarsi dell'evento negativo potrebbe comportare costi molto superiori a quelli effettivamente sostenuti da  $A$  (un esempio tipico é quello degli incidenti alle persone durante il lavoro). Per tale motivo essa non é stata inclusa tra le condizioni di coerenza economica.

## 7.7 La condizione che il rischio dell'assicuratore sia di tipo investimento

La (71) implica che il guadagno atteso dell'assicuratore é positivo (risp. strettamente positivo) se e solo se

$$P_a \geq C_B + (1 - f_a)G_-(1 - p) \quad (\text{risp. } >) \quad (79)$$

Paragonando la (79) con la (69), si vede che esse possono valere simultaneamente se e solo se

$$\begin{aligned} P_a &\leq (1 - f_a)G_-(1 - p) \quad ; \quad P_a \geq C_B + (1 - f_a)G_-(1 - p) \\ \iff C_B + (1 - f_a)G_-(1 - p) &\leq P_a \leq (1 - f_a)G_-(1 - p) \\ \iff C_B + (1 - f_a)G_-(1 - p) &\leq (1 - f_a)G_-(1 - p) \\ \iff C_B &\leq 0 \end{aligned}$$

Poiché  $C_B > 0$ , segue che le due uguaglianze non possono valere simultaneamente. In altri termini: **il guadagno atteso di  $A$  può aumentare se e solo se quello di  $B$  diventa negativo.**

Ciò rispecchia la competizione di interessi tra assicurato e assicuratore.

D'altra parte é giusto che l'assicuratore, essendo un investitore e non un giocatore d'azzardo, richieda da un qualsiasi contratto che almeno il suo guadagno atteso sia strettamente positivo (v. la discussione nella sezione 6.2). Quindi, salvo casi eccezionali in un contratto assicurativo:

**il guadagno atteso dell'assicurato diminuisce sempre.**

**Proposizione 5** (i) Una coppia  $(P_a, f_a)$  che definisce un contratto assicurativo con costi  $C_B$  in cui **il guadagno atteso dell'assicuratore é sempre strettamente positivo**, cioè soddisfa la (79):

$$P_a > C_B + (1 - f_a)G_-(1 - p)$$

esiste se e solo se le condizioni di coerenza (73) e (74), cioè

$$P_a < (1 - f_a)G_- \quad ; \quad P_a > C_B$$

sono soddisfatte e

$$C_B < pG_- \tag{80}$$

In questo caso per ogni

$$f_a \in \left( 0, 1 - \frac{C_B}{pG_-} \right) \tag{81}$$

l'intervallo

$$(C_B + (1 - f_a)G_-(1 - p), (1 - f_a)G_-) \tag{82}$$

é non vuoto e, per ogni  $P_a$  in questo intervallo, la coppia  $(P_a, f_a)$  ha le proprietà richieste.

(ii) Un contratto assicurativo  $(P_a, f_a)$  con costi  $C_B$  nel quale **il guadagno atteso dell'assicuratore é sempre strettamente positivo**, esiste se e solo se

$$P_a \in [C_B + G_-(1 - p), (1 - f_a)G_-]$$

e quest'intervallo é non-vuoto se e solo se

$$C_B < (p - f_a)G_-$$

In questo caso per ogni  $f_a$  in uno dei due intervalli

$$\begin{cases} (0, 1 - P_a/G_-), & \text{se } P_a \geq C_B + G_-(1 - p) \\ (1 - \frac{P_a - C_B}{G_-(1 - p)}, 1 - P_a/G_-), & \text{se } P_a < C_B + G_-(1 - p) \end{cases} \tag{83}$$

la coppia  $(P_a, f_a)$  ha le proprietà richieste.

L'intervallo per  $f_a$  nella prima alternativa in (83) non é mai vuoto. Quello nella seconda alternativa é non vuoto se e solo se  $P_a$  appartiene ad uno dei due intervalli

$$\begin{cases} \left( 0, \frac{C_B}{p} \right), & \text{se } C_B < pG_- \\ C_B + G_-(1 - p), & \text{se } C_B \geq pG_- \end{cases} \tag{84}$$

**Dimostrazione.** (i) Supponiamo che  $(P_a, f_a)$  definisca un contratto assicurativo. La (73) richiede che si abbia  $P_a < (1 - f_a)G_-$ .

La condizione (79), di guadagno atteso per  $B$  strettamente positivo, richiede che  $P_a \geq C_B + (1 - f_a)G_-(1 - p)$ . Combinando le due, si ottiene che

$$P_a \in (C_B + (1 - f_a)G_-(1 - p), (1 - f_a)G_-)$$

cioé l'intervallo in (82) é non vuoto se e solo se

$$\begin{aligned} C_B + (1 - f_a)G_-(1 - p) < (1 - f_a)G_- &\iff C_B < (1 - f_a)G_- - (1 - f_a)G_-(1 - p) \\ &\iff C_B < (1 - f_a)pG_- &\iff C_B \in (0, (1 - f_a)pG_-) \end{aligned} \quad (85)$$

Questo é non vuoto se e solo se

$$\begin{aligned} C_B < (1 - f_a)pG_- = pG_- - f_a pG_- &\iff f_a pG_- < (1 - f_a)pG_- = pG_- - C_B \\ &\iff f_a < 1 - \frac{C_B}{pG_-} \end{aligned}$$

che é possibile se e solo se la condizione (80) é soddisfatta. Se questa condizione é soddisfatta, per ogni  $f_a$  soddisfacente la (81) la condizione (85) é soddisfatta e quindi l'intervallo (82) é non vuoto .

Inversamente, supponiamo che le condizioni (80), (81) e (82) siano soddisfatte. Allora (81) equivale a (85) e implica che l'intervallo (82) é non vuoto. Inoltre (82) implica che le condizioni di coerenza (73) e (74) sono soddisfatte. Quindi la coppia  $(P_a, f_a)$  definisce un contratto assicurativo. Ciò dimostra (i).

(ii) Supponiamo che la coppia  $(P_a, f_a)$  definisca un contratto assicurativo. Allora la condizione di coerenza (73) cioé

$$\begin{aligned} P_a < (1 - f_a)G_- = P_a < G_- - f_a G_- &\iff f_a G_- < G_- - P_a \\ &\iff f_a < 1 - P_a/G_- \end{aligned} \quad (86)$$

é soddisfatta e implica che il membro destro di (86) é positivo e strettamente minore di 1. Ciò fornisce un limite superiore per  $f_a$ .

La condizione (79), di guadagno atteso positivo per  $B$  implica che

$$\begin{aligned} P_a \geq C_B + (1 - f_a)G_-(1 - p) &\iff P_a \geq C_B + G_-(1 - p) - f_a G_-(1 - p) \\ &\iff f_a G_-(1 - p) \geq C_B + G_-(1 - p) - P_a &\iff f_a \geq 1 - \frac{P_a - C_B}{G_-(1 - p)} \end{aligned} \quad (87)$$

dove il quoziente é positivo per la (74). Se

$$\frac{P_a - C_B}{G_-(1-p)} \geq 1 \iff P_a \geq C_B + G_-(1-p) \quad (88)$$

la (87) é identicamente soddisfatta e quindi non pone alcun vincolo inferiore su  $f_a$ . Pertanto, se vale (88), l'intervallo per  $f_a$  é dato dalla prima alternativa in (83) e non é mai vuoto poiché il membro destro di (86) é positivo e strettamente minore di 1. Se

$$\frac{P_a - C_B}{G_-(1-p)} < 1 \iff P_a < C_B + G_-(1-p)$$

la (87) pone un vincolo inferiore su  $f_a$ . Combinando questo con la (86), troviamo la seconda alternativa in (83).

L'intervallo nella seconda alternativa in (83) é non vuoto se e solo se

$$1 - \frac{P_a - C_B}{G_-(1-p)} < 1 - P_a/G_- \iff \frac{P_a - C_B}{G_-(1-p)} > P_a/G_-$$

$$\iff P_a - C_B > P_a(1-p) \iff P_a - P_a(1-p) = P_a p > C_B$$

che é la (84).

Inversamente, supponiamo che la condizione (83) sia soddisfatta dalla coppia  $(P_a, f_a)$ . In entrambe le alternative in (83) si ha che

$$f_a < 1 - P_a/G_- \iff P_a + f_a G_- < G_-$$

quindi la condizione di coerenza (73) é soddisfatta.

Nella prima alternativa in (83), si ha

$$P_a \geq C_B + G_-(1-p) > C_B$$

quindi la (74) é soddisfatta. Nella prima alternativa in (83), si ha che l'intervallo  $(1 - \frac{P_a - C_B}{G_-(1-p)}, 1 - P_a/G_-)$  é non vuoto e contenuto in  $(0, 1)$ . In particolare

$$1 - \frac{P_a - C_B}{G_-(1-p)} < 1 \iff \frac{P_a - C_B}{G_-(1-p)} > 0 \iff P_a > C_B$$

quindi anche in questo caso la (74) é soddisfatta. Concludiamo che la coppia  $(P_a, f_a)$  definisce un contratto assicurativo. Ciò dimostra (ii).  $\square$  **Osservazione.** Il diverso segno con cui compare l'espressione  $(P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p))$  nelle relazioni (67) e (71), cioè

$$\langle G_A \rangle = \langle G \rangle - (P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p)) \quad (89)$$

$$\langle G_B \rangle = (P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p)) - C_B \quad (90)$$

evidenzia l'obiettivo conflitto di interessi tra assicurato e assicuratore. Infatti  $A$  ha interesse a minimizzare

$$P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p)$$

e  $B$  a massimizzarlo. Inoltre, dalla (89) sappiamo che il rischio per  $B$  dopo il contratto é di tipo investimento, se e solo se

$$P_a > C_B + (1 - f_a)G_-(1 - p) \iff P_a - (1 - f_a)G_-(1 - p) > C_B \quad (91)$$

## 8 Assicurazioni di rischi d'uso

### Problema

Dato un rischio d'uso  $\{0, G_-, p\}$  quand'è che un contratto assicurativo relativo a tale rischio può essere considerato accettabile?

**Definizione 17** Un contratto relativo al rischio d'uso  $\{0, G_-, p\}$  (se nessuna confusione é possibile diremo semplicemente *un contratto d'uso*) é definito dalla coppia ordinata  $(f_a G_-, P_a)$  dove:

–  $f_a$  é un numero, detto franchigia, tale che

$$0 \leq f_a < 1$$

–  $P_a$  é un numero, detto premio.

Il prodotto  $f_a G_-$  é la parte di perdita non coperta dall'assicurazione.

Il numero  $P_a$  é la somma pagata dall'assicurato all'assicuratore.

## 8.1 La funzione guadagno dell'assicurato ( $A$ ) in un rischio d'uso

Prima del contratto la funzione guadagno di  $A$  é:

$$G_A(+) = 0 \quad ; \quad G_A(-) = -G_- \quad (92)$$

e il suo guadagno atteso é:

$$\langle G \rangle = -(1-p)G_- \quad (93)$$

Dopo il contratto, se  $P_a$  é il premio che  $A$  paga all'assicuratore in cambio di una protezione pari a  $G_- - f_a G_-$  (cioé a una franchigia pari a  $f_a G_-$ ), allora la funzione guadagno di  $A$  diventa

$$G_A(+) = -P_a \quad ; \quad G_A(-) = -(P_a + f_a G_-) \quad (94)$$

mentre la funzione guadagno di  $B$  continua ad essere data dalla (58), cioé

$$G_B(+) = P_a - C_B \quad ; \quad G_B(-) = -(1-f_a)G_- + P_a - C_B \quad (95)$$

Dato che  $G_A$  é negativa, a fortiori tale sará il suo valore atteso:

$$\langle G_A \rangle = -P_a p - (P_a + f_a G_-)(1-p) = -(P_a + f_a G_-(1-p)) \quad (96)$$

Osservare che la (94) assieme alla condizione di coerenza (73), cioé  $P_a + f_a G_- < G_-$ , implica che

$$G_A(-) = -(P_a + f_a G_-) > -G_-$$

il valore assoluto della perdita, quindi il rischio, diminuisce.

### Esempio.

In caso di furto della tua automobile, che ti provocherebbe la perdita  $G_-$  con probabilità  $1-p$ , due assicurazioni propongono contratti  $(P_a, f_a)$ ,  $(P'_a, f'_a)$ . Come imposteresti la scelta sulla base del criterio del valore medio?

**Soluzione.** Supponiamo che risulti  $P'_a > P_a$ . Allora, se fosse  $f'_a \geq f_a$ , non ci sarebbero dubbi sul fatto che  $(P_a, f_a)$  é il migliore tra i due contratti. Se  $P'_a > P_a$  e  $f'_a < f_a$ , il criterio del valore medio suggerisce di scegliere  $(P_a, f_a)$  se e solo se

$$\langle G_A \rangle > \langle G'_A \rangle \iff -P_a - f_a G_-(1-p) > -P'_a - f'_a G_-(1-p) \quad (97)$$

$$\Leftrightarrow P'_a - P_a > (f_a - f'_a)G_-(1 - p)$$

Poiché le due differenze sono entrambe positive, questa disuguaglianza equivale a

$$\frac{P'_a - P_a}{f_a - f'_a} > r = G_-(1 - p)$$

In altri termini: il contratto  $(P_a, f_a)$  é migliore, rispetto al criterio del valore medio, se e solo se il quoziente  $(P'_a - P_a)/(f_a - f'_a)$  é maggiore dell'indice del rischio iniziale.

Se  $P_a > P'_a$ , si invertono i ruoli delle due e si ragiona come sopra.

**Problema 4** *A* accetta di assicurare, con copertura totale, la sua automobile per 700 *E*. Supponiamo che:

– l'assicuratore sopporti un costo medio per cliente di circa

$$C_B \sim 300 E$$

– che lo stato conceda all'assicuratore un margine del 5% sui suoi costi piú il costo del rischio, valutato con l'indice di rischio, i.e.

$$\varepsilon = (5\%)((1 - f_a)G_-(1 - p) + C_B) \quad ; \quad C_B \sim 300 E$$

Se *A* dovesse ricomprare la sua automobile dovrebbe pagare 15.000 *E*. Accettando il contratto, *A* a quanto sta stimando la probabilità di furto entro l'anno, se usa il criterio di  $\varepsilon$ -lealtà in media con l' $\varepsilon$  definito sopra?

**Soluzione.** Sappiamo che una condizione necessaria per l'esistenza di un contratto  $\varepsilon$ -leale in media é che valga la (??), cioè

$$\begin{aligned} G_-p > C_B + \varepsilon &\iff G_-p > C_B + (5\%)((1 - f_a)G_-(1 - p) + C_B) \\ \iff p15.000 > 300 + \frac{1}{20}(15.000(1-p) + 300) &\iff p150 > 3 + \frac{1}{20}(150(1-p) + 3) \\ \iff p3000 > 60 + 150(1 - p) + 3 = 63 + 150 - 150p & \\ \iff p3150 > 213 \iff p > \frac{213}{3150} \sim 0,067 = \frac{67}{1000} & \end{aligned}$$

che, per la probabilità di furto fornisce la stima

$$1 - p < 1 - 0,067 = 0,933$$

Poiché in genere la probabilità di furto é certamente minore del 93%, la sola condizione  $G_-p > C_B + \varepsilon$  conduce ad una stima troppo alta per la probabilità di furto, si può concludere che il prezzo dell'assicurazione é troppo alto.

Tuttavia *A* può ancora utilizzare l'informazione sulla franchigia nulla. Infatti, secondo il Teorema (??), in un contratto  $\varepsilon$ -leale in media risulta

$$\begin{aligned}
f_a = 0 = 1 - \frac{P_a - (C_B + \varepsilon)}{G_-(1-p)} &\iff 1 = \frac{P_a - (C_B + (5\%)((1-f_a)G_-(1-p) + C_B))}{G_-(1-p)} \\
&\iff G_-(1-p) = P_a - (C_B + (5\%)(G_-(1-p) + C_B)) \\
&= P_a - C_B(1 + \frac{1}{20}) - \frac{1}{20}G_-(1-p) \\
&\iff G_-(1-p)(1 + \frac{1}{20}) = P_a - C_B(1 + \frac{1}{20}) \\
&\iff 15000(1-p)\frac{21}{20} = 700 - 300\frac{21}{20} \\
&\iff 150(1-p)\frac{21}{20} = 7 - 3\frac{21}{20} \\
&\iff 3150(1-p) = 140 - 63 = 77 \iff 1-p = \frac{77}{3150} \sim 0,02
\end{aligned}$$

Quindi, accettando il contratto,  $A$  sta stimando che, nella sua zona in ogni anno, circa 2 auto su 100 vengono rubate.

**Esercizio.** (Sensibilità del premio alla probabilità)

Se, nelle ipotesi dell'esercizio precedente, la probabilità che l'automobile venga rubata è stimata

$$1 - p = 0,018$$

Qual è l'intervallo del premio  $\varepsilon$ -leale in media per un'assicurazione contro il furto nelle stesse condizioni del teorema precedente?

**Risposta.** Dalla (??) sappiamo che

$$\begin{aligned}
P_a &\in \left( \frac{C_B + \varepsilon}{p}, G_-(1-p) + C_B + \varepsilon \right] \\
\frac{C_B + \varepsilon}{p} &= \frac{300 + (5\%)(G_-(0,018) + 300)}{1 - 0,018} \\
\frac{C_B + \varepsilon}{p} &= \frac{300 + \frac{1}{20}(15000(0,018) + 300)}{0,982} \\
&= \frac{300 + \frac{1}{20}(270 + 300)}{0,982} = \frac{300 + \frac{570}{20}}{0,982} = \frac{328,5}{0,982} = 334,52
\end{aligned}$$

$$G_-(1 - p) + C_B + \varepsilon = 15000(0,018) + 328,5 = 270 + = 598,5$$

Quindi l'intervallo del premio  $\varepsilon$ -leale in media é

$$P_a \in (334,52, 598,5]$$

Come si vede, in questo caso diminuire la probabilità di furto di circa 2 millesimi pu'øfar diminuire il premio  $\varepsilon$ -leale in media di circa la metà.

## 9 Contratti assicurativi standard

D'ora in avanti ci occuperemo di contratti assicurativi relativi a rischi standard, nel senso della condizione (4), cioè rischi che soddisfano la condizione

$$G_+ > 0 \quad ; \quad G_- > 0$$

Tali contratti saranno anche chiamati standard.

Un **contratto assicurativo** tra  $A$  (assicurato) e  $B$  (assicuratore), relativo al rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , é un contratto

$$\{\{+, -\}, p, G_A, G_B, C_A, C_B\} \quad (98)$$

nel senso della Definizione (14), caratterizzato dalle funzioni guadagno:

$$G_A(+) = (1 - p_a)G_+ \quad (99)$$

$$G_A(-) = -f_a G_- - p_a G_+ = -(f_a + p_a G_+/G_-)G_- \quad (100)$$

– funzione guadagno di  $A$  dopo il contratto, e

$$G_B(+) = p_a G_+ - C_B \quad (101)$$

$$G_B(-) = -(1 - f_a)G_- + p_a G_+ - C_B \quad (102)$$

$$= -G_-(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) - C_B = -G_-[1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-]$$

– funzione guadagno di  $B$  dopo il contratto, dove:

–  $p_a \in (0, 1)$  é il premio,

–  $f_a \in [0, 1)$  é la franchigia,

–  $C_A \in \mathbb{R}_+^*$  ( $C_B \in \mathbb{R}_+^*$ ) é il capitale investito da  $A$  ( $B$ )

**Osservazione.** Quando non ci sono possibilità di confusione, il riferimento al rischio iniziale e ai costi é implicito e si parla di **contratto assicurativo**

$(f_a, p_a)$  di  $A$  con  $B$ .

**Osservazione.** Un contratto  $(f_a G_-, P_a)$  cambia la funzione guadagno di  $A$  da (55) a (57) e introduce per  $B$  la funzione guadagno (58). Conseguentemente lo schema di rischio per  $A$  cambia da (54) in

$$\{(1 - p_a)G_+, f_a G_- + p_a G_+, p\} \quad (103)$$

e per  $B$  viene introdotto il seguente schema di rischio:

$$\{p_a G_+ - C_B, (1 - f_a)G_- - p_a G_+ + C_B, p\} \quad (104)$$

**Definizione 18** Un contratto assicurativo standard di  $A$  (assicurato) con  $B$  (assicuratore) relativo al rischio

$$\{G_+, G_-, p\}$$

e con capitali investiti  $(C_A, C_B)$ , é una coppia ordinata

$$(f_a, p_a) := (\text{franchigia}, \text{premio})$$

di numeri reali che soddisfa le condizioni di coerenza economica (72), (107), (108).

Una tale coppia determina un contratto (98) nel senso della Definizione (14), caratterizzato dalle funzioni guadagno (99), (100), (101), (102).

**Osservazione.** Le funzioni guadagno (99), (100), (101), (102) definiscono due variabili casuali entrambe con distribuzione

$$(p, 1 - p)$$

Dalla (103) segue che l'indice di rischio percentuale per  $A$  dopo il contratto é

$$\begin{aligned} \rho_A &= \frac{(1 - p_a)G_+ p}{(f_a G_- + p_a G_+)(1 - p)} = \frac{(1 - p_a)G_+ p}{(f_a + p_a G_+/G_-)(1 - p)} \frac{G_+ p}{G_- (1 - p)} \\ &= \frac{(1 - p_a)G_+ p}{(f_a + p_a G_+/G_-)(1 - p)} \rho \end{aligned} \quad (105)$$

Quindi il guadagno atteso per  $A$  dopo il contratto é positivo se e solo se

$$\rho_A \leq 1 \iff \frac{(1 - p_a)G_+ p}{(f_a + p_a G_+/G_-)(1 - p)} \rho \leq 1$$

## 9.1 Condizioni di coerenza economica per contratti standard

Le condizioni di coerenza economica della sezione (7.5), nel caso di contratti standard, diventano:

$$p_a \in (0, 1) \quad ; \quad f_a \in [0, 1) \quad (106)$$

$$f_a + p_a G_+ / G_- < 1 \quad (107)$$

$$p_a G_+ > C_B \quad (108)$$

**Osservazione.** Da (107) segue che

$$p_a G_+ / G_- < 1 \iff p_a G_+ < G_-$$

Ciò, assieme alla (108) implica che

$$G_- > p_a G_+ > C_B \quad (109)$$

**Proposizione 6** Se una coppia  $(p_a, f_a)$  soddisfa le condizioni di coerenza economica (106), (107) e (108) allora essa appartiene ad una delle seguenti 3 classi, che sono mutuamente esclusive.

**Classe I:** La prima classe é caratterizzata dalla condizione

$$f_a \leq 1 - \frac{G_+}{G_-} \quad (110)$$

che é possibile solo se

$$G_+ \leq G_- \quad (111)$$

$$f_a \in \left[0, 1 - \frac{G_+}{G_-}\right] \quad ; \quad p_a \in \left(\frac{C_B}{G_+}, 1\right) \quad (112)$$

Le rimanenti due classi sono caratterizzate dalla condizione

$$f_a > 1 - \frac{G_+}{G_-} \quad (113)$$

**Classe II:**

$$G_+ > G_- \quad \text{e} \quad f_a \in [0, 1) \quad ; \quad p_a \in \left(\frac{C_B}{G_+}, 1\right) \quad (114)$$

**Classe III:**

$$G_+ \leq G_- \quad \text{e} \quad f_a \in \left(1 - \frac{G_+}{G_-}, 1\right) \quad ; \quad p_a \in \left(\frac{C_B}{G_+}, 1\right) \quad (115)$$

**Dimostrazione.** La (107) equivale a

$$f_a < 1 - p_a \frac{G_+}{G_-}$$

che é impossibile se  $1 - p_a \frac{G_+}{G_-} \leq 0$ . Quindi dev'essere

$$1 - p_a \frac{G_+}{G_-} > 0 \iff p_a < \frac{G_-}{G_+}$$

che, insieme con (108), implica

$$G_- > p_a G_+ > C_B$$

$$p_a \in \left(\frac{C_B}{G_+}, \frac{G_-}{G_+}\right) \cap (0, 1) = \begin{cases} \left(\frac{C_B}{G_+}, \frac{G_-}{G_+}\right), & \text{se } G_- \leq G_+ \\ \left(\frac{C_B}{G_+}, 1\right), & \text{se } G_- > G_+ \end{cases}$$

Quest'ultima equivale a:

$$p_a \in \left(\frac{C_B}{G_+}, \frac{G_-}{G_+}\right), \quad \text{se } G_- \leq G_+ \quad (116)$$

$$p_a \in \left(\frac{C_B}{G_+}, 1\right), \quad \text{se } G_- > G_+ \quad (117)$$

Scriviamo la (107) nella forma

$$p_a < (1 - f_a) \frac{G_-}{G_+}$$

e distinguiamo 2 casi per  $f_a$ .

**1-mo caso.** Supponiamo che valga la (110), cioè che

$$(1 - f_a) \frac{G_-}{G_+} \geq 1 \iff f_a \leq 1 - \frac{G_+}{G_-}$$

Questa disuguaglianza é possibile se e solo se  $G_+ \leq G_- \iff G_-/G_+ > 1$ . Quindi, tenuto conto di (116) e di (106), si trova

$$f_a \in \left[0, 1 - \frac{G_+}{G_-}\right] \quad ; \quad p_a \in \left(\frac{C_B}{G_+}, 1\right)$$

che é la (112).

2-o caso: Supponiamo che valga la (113), cioé che

$$(1 - f_a) \frac{G_-}{G_+} < 1 \iff f_a > 1 - \frac{G_+}{G_-}$$

Se  $G_+ > G_-$  questa disuguaglianza é sempre soddisfatta, quindi non pone un limite inferiore per  $f_a$ . Dato che non ci sono altri vincoli su  $f_a$ , tenuto conto di (117), concludiamo che:

$$f_a \in [0, 1) \quad ; \quad p_a \in \left(\frac{C_B}{G_+}, 1\right)$$

che é la (114). Se  $G_+ \leq G_- \iff G_-/G_+ \geq 1$ , il limite superiore dell'intervallo in (116) é  $> 1$ , quindi la (106) implica

$$f_a \in \left(1 - \frac{G_+}{G_-}, 1\right) \quad ; \quad p_a \in \left(\frac{C_B}{G_+}, 1\right)$$

che é la (115).  $\square$

## 9.2 Variazione dell'indice di rischio percentuale dopo un contratto assicurativo standard

Osservando che l'indice di rischio iniziale di  $B$  é nullo prima del contratto e introducendo le variazioni di rischio per  $A$  e per  $B$ :

$$\Delta(r_A) := r_A - r \quad ; \quad \Delta(r_B) := r_B$$

la relazione di conservazione del rischio (65) si puó riformulare affermando che *la variazione totale del rischio é nulla*:

$$\Delta(r_A) + \Delta(r_B) = 0$$

Questa formulazione ammette la seguente generalizzazione al caso di indici di rischio percentuale.

Innanzitutto osserviamo che da (103) e (104) segue che gli indici di rischio percentuale per  $A$  e per  $B$  dopo il contratto sono rispettivamente

$$\rho_A = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_- f_a + p_a(G_+/G_-)}{G_+} = \rho \frac{f_a + p_a(G_+/G_-)}{1 - p_a} \quad (118)$$

$$\rho_B = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{(1 - f_a)G_- - p_a G_+ + C_B}{p_a G_+ - C_B} \quad (119)$$

$$= \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_- (1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+} = \rho \frac{1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+}$$

### Osservazione

Le formule (118), (119), mostrano che come  $\rho$ , anche  $\rho_A$  dipende solo dal quoziente  $G_+/G_-$ , mentre la cosa non é vera per  $\rho_B$  a causa del fatto che  $C_B > 0$ .

**Teorema 6** Nelle notazioni (118), (119) risulta

$$\rho_A - \rho = -\frac{p_a}{1 - p_a}(\rho_B - \rho) + \frac{C_B}{1 - p_a} \left( \frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-} \right) \quad (120)$$

**Dimostrazione** Dalla (118) segue che

$$\begin{aligned} \rho_A - \rho &= \rho \frac{f_a + p_a(G_+/G_-)}{1 - p_a} - \rho = \rho \left( \frac{f_a + p_a(G_+/G_-)}{1 - p_a} - 1 \right) \\ &= \rho \frac{1}{1 - p_a} (f_a + p_a(G_+/G_-) - 1 + p_a) = -\rho \frac{1}{1 - p_a} (1 - (f_a + p_a G_+/G_-) - p_a) \end{aligned}$$

ricordando che

$$\rho_B = \rho \frac{(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+}$$

si trova

$$\begin{aligned} \rho_A - \rho &= -\rho \frac{p_a - C_B/G_+}{1 - p_a} \frac{(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) + C_B/G_- - C_B/G_- - p_a}{p_a - C_B/G_+} \\ &= -\rho \frac{p_a - C_B/G_+}{1 - p_a} \frac{1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+} + \rho \frac{p_a - C_B/G_+}{1 - p_a} \frac{(p_a + C_B/G_-)}{p_a - C_B/G_+} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{p_a - C_B/G_+}{1 - p_a} \rho \frac{1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+} + \rho \frac{p_a + C_B/G_-}{1 - p_a} \\
&= -\frac{p_a - C_B/G_+}{1 - p_a} \rho_B + \rho \frac{p_a}{1 - p_a} + \rho \frac{C_B/G_-}{1 - p_a} \\
&= -\frac{p_a}{1 - p_a} \rho_B + \frac{C_B/G_+}{1 - p_a} \rho_B + \rho \frac{p_a}{1 - p_a} + \rho \frac{C_B/G_-}{1 - p_a} \\
&= -\frac{p_a}{1 - p_a} (\rho_B - \rho) + \frac{C_B}{1 - p_a} \left( \frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-} \right)
\end{aligned}$$

che é la (120).

**Teorema 7** Nelle notazioni del Teorema (6):

(i)  $\rho_B < \rho$  se e solo se  $\rho_A > \rho$  e l'uguaglianza  $\rho_B = \rho_A = \rho$  é impossibile. In particolare non esiste alcun contratto assicurativo tale che sia  $\rho_A$  che  $\rho_B$  risultino minori o uguali di  $\rho$ .

**Dimostrazione** Dalla (120), cioé

$$\rho_A - \rho = -\frac{p_a}{1 - p_a} (\rho_B - \rho) + \frac{C_B}{1 - p_a} \left( \frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-} \right) \quad (121)$$

segue che  $\rho_B < \rho$  se e solo

$$\rho_A - \rho = \frac{p_a}{1 - p_a} (\rho - \rho_B) + \frac{C_B}{1 - p_a} \left( \frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-} \right) > 0$$

L'uguaglianza  $\rho_B = \rho_A = \rho$  é impossibile poiché implicherebbe

$$0 = \frac{C_B \rho}{1 - p_a} \left( \frac{1}{G_+} + \frac{1}{G_-} \right) > 0$$

**Proposizione 7** L'indice di rischio percentuale di  $A$  dopo il contratto é minore o uguale di quello prima del contratto se e solo se

$$f_a + p_a(1 + G_+/G_-) \leq 1 \quad (122)$$

In questo caso

$$\rho_B \geq \frac{p_a + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+} \rho > \rho \quad (123)$$

**Dimostrazione** Dalla (118) segue che  $\rho_A \leq \rho$  se e solo se

$$\frac{f_a + p_a(G_+/G_-)}{1 - p_a} \leq 1 \iff f_a + p_a(G_+/G_-) \leq 1 - p_a \iff f_a + p_a(1 + G_+/G_-) \leq 1$$

e questa equivale alla (122). Infine, tenendo conto della (120) si trova

$$\begin{aligned} \rho_A - \rho &= -\frac{p_a}{1 - p_a}(\rho_B - \rho) + \frac{C_B}{1 - p_a} \left( \frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-} \right) \leq 0 \\ \iff \frac{C_B}{1 - p_a} \left( \frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-} \right) &\leq \frac{p_a}{1 - p_a}(\rho_B - \rho) \iff \frac{C_B \rho_B}{G_+} + \frac{C_B \rho}{G_-} \leq p_a \rho_B - p_a \rho \\ &\iff \left( \frac{C_B}{G_+} - p_a \right) \rho_B \leq - \left( p_a + \frac{C_B}{G_-} \right) \rho \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza equivale a

$$- \left( p_a - \frac{C_B}{G_+} \right) \rho_B \leq - \left( p_a + \frac{C_B}{G_-} \right) \rho \iff \left( p_a - \frac{C_B}{G_+} \right) \rho_B \geq \left( p_a + \frac{C_B}{G_-} \right) \rho$$

e, dato che per la condizione di coerenza economica  $p_a G_+ > C_B$ , questa equivale a

$$\rho_B \geq \frac{p_a + \frac{C_B}{G_-}}{p_a - \frac{C_B}{G_+}} \rho$$

che é la (123).

**Proposizione 8** L'indice di rischio percentuale di  $B$  dopo il contratto é minore o uguale dell'indice del rischio iniziale se e solo se

$$f_a + (1 + p_a)G_+/G_- \geq 1 + \frac{C_B}{G_-(1 - p_L)} \quad (124)$$

dove  $p_L$  é la probabilitá *leale* o *neutra al rischio*

$$\frac{G_+}{G_+ + G_-} = 1 - \frac{G_-}{G_+ + G_-} = 1 - p_L$$

(v. i Teoremi (1) e (2)). In questo caso

$$\rho_A \geq \rho \left( 1 + \frac{C_B}{(1 - p_a)G_-} \left( \frac{(G_- - (f_a G_- + p_a G_+) + C_B)}{p_a G_+ - C_B} + 1 \right) \right) > \rho \quad (125)$$

**Dimostrazione** Dalla (119) segue che l'indice di rischio percentuale di  $B$  dopo il contratto é minore o uguale dell'indice del rischio iniziale se e solo se

$$\begin{aligned}
\rho_B &= \rho \frac{(1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-)}{p_a - C_B/G_+} \leq \rho & (126) \\
&\iff \frac{(1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-)}{p_a - C_B/G_+} \leq 1 \\
&\iff 1 - f_a - p_a G_+/G_- + C_B/G_- \leq p_a - C_B/G_+ \\
&\iff f_a + p_a(1 + G_+/G_-) \geq 1 + C_B(1/G_+ + 1/G_-) = 1 + C_B \frac{G_- + G_+}{G_+ G_-} \\
&= 1 + C_B \left( \frac{G_+ G_-}{G_- + G_+} \right)^{-1} = 1 + C_B \left( G_- \frac{G_+}{G_- + G_+} \right)^{-1} = 1 + \frac{C_B}{G_-(1 - p_L)} \\
&\iff f_a + p_a(1 + G_+/G_-) \geq 1 + \frac{C_B}{G_-(1 - p_L)}
\end{aligned}$$

che equivale alla (124). Infine, tenendo conto della (120) si trova

$$\begin{aligned}
\rho_A - \rho &= -\frac{p_a}{1 - p_a}(\rho_B - \rho) + \frac{C_B}{1 - p_a} \left( \frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-} \right) \\
&\iff (\rho_A - \rho)(1 - p_a) = -p_a(\rho_B - \rho) + C_B \left( \frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-} \right) \\
&\iff p_a(\rho_B - \rho) = -(\rho_A - \rho)(1 - p_a) + C_B \left( \frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-} \right) \\
&\iff \rho_B - \rho = -(\rho_A - \rho) \frac{1 - p_a}{p_a} + \frac{C_B}{p_a} \left( \frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-} \right) \leq 0
\end{aligned}$$

Quindi tenendo conto di (126),

$$\begin{aligned}
\frac{C_B}{p_a} \left( \frac{\rho_B}{G_+} + \frac{\rho}{G_-} \right) &\leq (\rho_A - \rho) \frac{1 - p_a}{p_a} \iff \frac{C_B}{1 - p_a} \rho \left( \frac{\rho_B}{\rho G_+} + \frac{1}{G_-} \right) \leq \rho_A - \rho \\
&\iff \frac{C_B}{1 - p_a} \rho \left( \frac{1}{G_+} \frac{(1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-)}{p_a - C_B/G_+} + \frac{1}{G_-} \right) \leq \rho_A - \rho \\
&\iff \frac{C_B}{1 - p_a} \rho \left( \frac{(1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-)}{p_a G_+ - C_B} + \frac{1}{G_-} \right) \leq \rho_A - \rho
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\rho_A &\geq \rho \left( 1 + \frac{C_B}{1-p_a} \left( \frac{(1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-)}{p_a G_+ - C_B} + \frac{1}{G_-} \right) \right) \\ &= \rho \left( 1 + \frac{C_B}{(1-p_a)G_-} \left( \frac{(G_- - (f_a G_- + p_a G_+) + C_B)}{p_a G_+ - C_B} + 1 \right) \right)\end{aligned}$$

che, per la condizione di coerenza, é  $> \rho$ . Ciò prova la (125).

### 9.3 Il guadagno di $A$ dopo il contratto.

**Teorema 8** Il guadagno atteso di  $A$  dopo l'assicurazione é positivo se e solo se vale una delle due disuguaglianze equivalenti:

$$\rho \leq \frac{(1-p_a)}{f_a + p_a G_+/G_-} \quad (127)$$

$$\rho f_a + \frac{p_a}{p} \leq 1 \quad (128)$$

ed é nullo se e solo se vale l'uguaglianza.

**Dimostrazione.** Sappiamo che il guadagno atteso di  $A$  dopo l'assicurazione é positivo se e solo se:

$$\rho_A = \rho \frac{(f_a + p_a G_+/G_-)}{(1-p_a)} \leq 1 \iff \rho \leq \frac{(1-p_a)}{f_a + p_a G_+/G_-}$$

che equivale alla (127). Questa é equivalente a:

$$\begin{aligned}\rho f_a + \rho p_a G_+/G_- \leq 1 - p_a &\iff \rho f_a + \left( \frac{1}{p} - 1 \right) p_a \leq 1 - p_a \\ &\iff \rho f_a + \frac{p_a}{p} - p_a \leq 1 - p_a \iff \rho f_a + \frac{p_a}{p} \leq 1\end{aligned}$$

che é la (128).

**Problema 5** L'imprenditore  $A$  vuole assicurare il rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  del quale si sa che  $G_+ \geq G_-$  (rischio non catastrofico).

L'assicuratore  $B$  propone il contratto

$$p_a = 0,3 \quad ; \quad f_a = 0,8$$

Consigliereste ad  $A$  di accettare? Motivare la risposta.

**Soluzione.** La condizione di coerenza economica (73 ) per il contratto  $(f_a, p_a)$  richiede che

$$f_a + p_a(G_+/G_-) < 1 \quad (129)$$

Nel nostro caso sappiamo che  $G_+ \geq G_-$ . Quindi

$$f_a + p_a(G_+/G_-) \geq f_a + p_a = 0,3 + 0,8 = 1,1 > 1$$

Quindi la (129) non é soddisfatta. Allora dal Teorema (7)  $A$  sa che, dopo il contratto, la sua perdita potenziale sarebbe maggiore o uguale di quella che avrebbe affrontando il rischio senza contratto.

Non avrebbe senso concludere un contratto in queste condizioni.

## 9.4 Il Guadagno di $B$ dopo il contratto

Prima del contratto  $B$  non investe e non rischia, quindi il suo guadagno atteso é nullo. Perció  $B$  ha convenienza  $A$  fare il contratto se il suo guadagno atteso é positivo.

**Teorema 9** Il guadagno atteso di  $B$  é positivo se e solo se vale una delle due disuguaglianze equivalenti:

$$\rho \leq \frac{p_a - C_B/G_+}{1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-} \quad (130)$$

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} \leq \rho f_a + \frac{p_a}{p} \quad (131)$$

ed é nullo se e solo se vale l'uguaglianza.

**Dimostrazione.** Il guadagno atteso di  $B$  dopo l'assicurazione é positivo se e solo se:

$$\rho_B = \rho \frac{(1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-)}{p_a - C_B/G_+} \leq 1 \iff \rho \leq \frac{p_a - C_B/G_+}{(1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-)}$$

che é la (130). Questa equivale a

$$\begin{aligned} \rho((1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-) &\leq p_a - C_B/G_+ \\ \iff \rho - \rho f_a - p_a \rho G_+/G_- + \rho C_B/G_- &\leq p_a - C_B/G_+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \rho + \rho C_B/G_- + C_B/G_+ &\leq \rho f_a + p_a + p_a \left(\frac{1}{p} - 1\right) \\ \Leftrightarrow \rho + C_B(\rho/G_- + 1/G_+) &\leq \rho f_a + \frac{p_a}{p} \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\frac{1}{G_+} + \frac{\rho}{G_-} = \frac{1}{G_+} + \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-}{G_+} \frac{1}{G_-} = \frac{1}{G_+} + \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{1}{G_+} = \frac{1}{pG_+} \quad (132)$$

Quindi

$$\rho_B \leq 1 \Leftrightarrow \rho + \frac{C_B}{pG_+} \leq \rho f_a + \frac{p_a}{p}$$

## 10 Contratti ragionevoli in media

**Definizione 19** Dato il rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , una coppia  $(f_a, p_a) \in \mathbb{R}$  sarà detta **ragionevole in media** se soddisfa la condizione

$$\langle G_A \rangle \geq 0 \quad ; \quad \langle G_B \rangle > 0 \quad (133)$$

Se inoltre  $(f_a, p_a) \in [0, 1) \times (0, 1)$  e soddisfa anche le condizioni di ammissibilità economica (107), (108) cioè

$$f_a + p_a G_+/G_- < 1 \quad (134)$$

$$p_a G_+ > C_B \quad (135)$$

diremo che tale coppia definisce un **contratto ragionevole in media**.

**Osservazione** Per definizione, il contratto  $(f_a, p_a)$  relativo al rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  é ragionevole in media se i guadagni attesi sia dell'assicuratore che dell'assicurato sono entrambi positivi e quello dell'assicuratore é strettamente positivo. Poiché gli indici di rischio percentuale dopo il contratto di sono rispettivamente:

$$\rho_A = \rho \frac{f_a + p_a G_+/G_-}{(1 - p_a)}$$

$$\rho_B = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-(1 - f_a) - (p_a G_+ - C_B)}{(p_a G_+ - C_B)} = \rho \frac{1 - (f_a + p_a G_+/G_- - C_B/G_-)}{(p_a - C_B/G_+)}$$

le condizioni di ragionevolezza in media (133) possono essere espresse equivalentemente nella forma:

$$\rho_A \leq 1 \quad ; \quad \rho_B < 1$$

**Problema 6** Nelle stesse condizioni del Problema (5),

$$p_a = 0,3 \quad ; \quad f_a = 0,8 \quad ; \quad G_+ \geq G_-$$

se il contratto proposto da  $B$  fosse

$$p_a = 0,2 \quad ; \quad f_a = 0,6$$

quale suggerimento daresti ad  $A$  sulla base del criterio dei contratti ragionevoli in media?

**Soluzione.**

In questo caso la condizione di ammissibilità (129) è soddisfatta se e solo se

$$\begin{aligned} 0,6 + 0,2G_+/G_- < 1 &\iff 6 + 2G_+/G_- < 10 \iff 3 + G_+/G_- < 5 \iff \\ &\iff G_+/G_- < 2 \end{aligned}$$

Poiché il rischio è non catastrofico questa condizione impone l'ulteriore condizione

$$1 \leq G_+/G_- < 2 \tag{136}$$

D'altra parte il fatto che il guadagno atteso di  $A$  sia positivo (v. la prima condizione in (133)) equivale a

$$\rho_A = \rho \frac{f_a + p_a G_+/G_-}{1 - p_a} = \rho \frac{0,6 + 0,2G_+/G_-}{0,8} = \rho \frac{3 + G_+/G_-}{4} \geq \rho$$

Quindi la condizione  $\rho < 1$ , cioè che il guadagno atteso di  $A$  prima del contratto sia strettamente positivo, è necessaria affinché risulti  $\rho_A < 1$ .

La condizione di coerenza (134) implica che

$$\rho_A = \rho \frac{f_a + p_a G_+/G_-}{0,8} < \rho \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \rho$$

Perciò, la condizione

$$\frac{5}{4} \rho < 1 \iff \rho < \frac{4}{5} \tag{137}$$

è sufficiente affinché risulti

$$\rho_A < 1$$

In questo caso  $A$  potrebbe accettare il contratto tenendo conto del fatto che il suo guadagno atteso resta positivo.

Infine, ricordando che

$$\rho_B = \rho \frac{(1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-)}{p_a - C_B/G_+}$$

e che, essendo  $G_+/G_- \geq 1$ , si ha:

$$1 - (f_a + p_a(G_+/G_-)) \leq 1 - (f_a + p_a)$$

risulta

$$\rho_B \leq \rho \frac{1 - (f_a + p_a) + C_B/G_-}{p_a - C_B/G_+} = \rho \frac{0,2 + C_B/G_-}{0,2 - C_B/G_+}$$

Quindi

$$\rho \frac{0,2 + C_B/G_-}{0,2 - C_B/G_+} < 1 \Rightarrow \rho_B < 1$$

Usando la (137) si trova

$$\rho \frac{0,2 + C_B/G_-}{0,2 - C_B/G_+} < \frac{4}{5} \frac{0,2 + C_B/G_-}{0,2 - C_B/G_+}$$

perció é sufficiente che

$$\frac{4}{5} \frac{0,2 + C_B/G_-}{0,2 - C_B/G_+} < 1 \iff \frac{0,2 + C_B/G_-}{0,2 - C_B/G_+} < \frac{5}{4}$$

Questa é sempre soddisfatta se

$$0,2 - C_B/G_+ < 0 \iff 0,2G_+ < C_B \iff \frac{G_+}{5} < C_B$$

e, se  $0,2 - C_B/G_+ > 0 \iff G_+/5 \geq C_B$  essa equivale a

$$\begin{aligned} 4(0,2 + C_B/G_-) < 5(0,2 - C_B/G_+) &\iff 4C_B/G_- < 0,2 - 5C_B/G_+ \\ \iff 4/G_- < \frac{1}{5C_B} - 5/G_+ &\iff 4/G_- + 5/G_+ < \frac{1}{5C_B} \\ \iff \frac{4G_+ + 5G_-}{G_-G_+} < \frac{1}{5C_B} &\iff 5C_B < \frac{G_-G_+}{4G_+ + 5G_-} \iff C_B < \frac{G_-}{5} \frac{1}{4 + 5(G_-/G_+)} \end{aligned}$$

In conclusione, se i costi dell'assicuratore soddisfano la disuguaglianza

$$C_B < \frac{G_-}{5} \frac{1}{4 + 5(G_-/G_+)} \quad (138)$$

anche l'assicuratore avrebbe un guadagno atteso positivo e quindi, sulla base del criterio di ragionevolezza in media, sia  $A$  che  $B$  sarebbero nelle condizioni di poter concludere il contratto.

Avendo definita la nozione di *contratto ragionevole in media*, la prima domanda da porsi é se tali contratti esistono. Piú precisamente:

*Dato un rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , per quali coppie  $(f_a, p_a)$  il corrispondente contratto assicurativo é ragionevole in media?*

La isposta a tale domanda é data dal seguente *Teorema fondamentale dei contratti ragionevoli in media*.

**Teorema 10** Dato il rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , una coppia  $(f_a, p_a) \in [0, 1) \times (0, 1)$  é ragionevole in media se e solo se

$$\rho f_a + \frac{p_a}{p} \in \left( \rho + \frac{C_B}{pG_+}, 1 \right] \quad (139)$$

Questo intervallo é non vuoto se e solo se

$$\langle G \rangle > C_B \iff \frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \quad (140)$$

In particolare **il rischio iniziale deve essere di tipo investimento** (i.e.  $\rho < 1$ ).

**Osservazione.** Il fatto che l'intervallo (139) non sia vuoto non significa che coppie ragionevoli in media esistano sempre. Infatti vedremo che ulteriori condizioni sono necessarie.

**Dimostrazione.** Dal Teorema 8 sappiamo che il guadagno atteso di  $A$  dopo l'assicurazione é positivo se e solo se

$$\rho f_a + \frac{p_a}{p} \leq 1$$

Dal Teorema 9 sappiamo che il guadagno atteso di  $B$  dopo l'assicurazione é strettamente positivo se e solo se

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} < \rho f_a + \frac{p_a}{p}$$

Quindi la condizione di ragionevolezza in media equivale alla (139). Da questa segue che la seconda delle condizioni (140) é una condizione necessaria per l'esistenza di tali contratti. La prima delle condizioni (140) segue da

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \iff \frac{C_B}{pG_+} + \frac{(1-p)G_-}{pG_+} < 1 \iff C_B + (1-p)G_- < pG_+$$

□

### Problema.

Dato un rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  dal Teorema 10 sappiamo che contratti ragionevoli in media relativi a tale rischio esistono solo se vale la (140), che implica che tale rischio ha guadagno atteso positivo. In tal caso essi sono caratterizzati dalla condizione (139) unitamente alle condizioni di coerenza economica. Ci chiediamo: comunque dato un premio  $p_a$  (resp. una franchigia  $f_a$ ), per quali  $f_a$  (resp.  $p_a$ ) il contratto  $(f_a, p_a)$  sarà ragionevole in media?

Lo schema per rispondere a domande del genere é standard:

- 1) prima si determinano le condizioni di esistenza di coppie che soddisfano il criterio considerato,
- 2) poi si impongono le condizioni di coerenza economica.

#### 10.0.1 Contratti ragionevoli in media con premio pre-assegnato

**Teorema 11** Dato un rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  e un costo  $C_B$  per l'assicuratore, condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di premi  $p_a$  per i quali esista una coppia  $(f_a, p_a)$  ragionevole in media é che valga la condizione (140), cio e:

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} < 1 \tag{141}$$

In questo caso tali premi sono caratterizzati dalla condizione:

$$p_a \in \left( \frac{C_B}{G_+}, p \right) \tag{142}$$

e per ogni  $p_a$  che soddisfa (142) ogni coppia  $(f_a, p_a)$  tale che

$$f_a \in \left( \frac{1}{\rho} \left( \rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} \right), \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{p_a}{p} \right) \right] \cap [0, 1] \tag{143}$$

è ragionevole in media ed entrambi gli intervalli (142) e (143) non sono vuoti.

**Dimostrazione.** Dal Teorema 10 sappiamo che la condizione di ragionevolezza in media equivale alle disuguaglianze

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} < \rho f_a + \frac{p_a}{p} < 1 \quad (144)$$

La prima delle disuguaglianze (144) é:

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} < \rho f_a + \frac{p_a}{p}$$

Per  $p_a$  dato questa equivale a

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} < \rho f_a \iff f_a > \frac{1}{\rho} \left( \rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} \right) \quad (145)$$

Ciò fornisce un estremo inferiore per  $f_a$ . Se il membro sinistro della (145) é  $\leq 0$ , allora il limite inferiore per la franchigia é zero.

Poiché  $f_a < 1$ , la (145) é possibile se e solo se

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} < \rho \iff \frac{C_B}{G_+} < p_a$$

che equivale alla condizione di coerenza (108). Ciò fornisce un estremo inferiore per  $p_a$  che é sempre strettamente positivo.

La seconda delle disuguaglianze (144) é:

$$\rho f_a + \frac{p_a}{p} < 1 \iff \rho f_a < 1 - \frac{p_a}{p} \iff f_a < \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{p_a}{p} \right) \quad (146)$$

Ciò fornisce un estremo superiore per  $f_a$ . Se il membro sinistro di questa disuguaglianza é  $\geq 1$ , allora il limite superiore per la franchigia é 1.

Poiché  $f_a \geq 0$ , la (146) é possibile se e solo se  $p_a < p$ .

Ciò fornisce un estremo superiore per  $p_a$  che é  $< 1$ .

Mettendo insieme gli estremi inferiori e superiori si vede che l'intervallo di premio é dato dalla (142) e l'intervallo di franchigia é dato dalla (143).

L'intervallo di premio é non vuoto se e solo se:

$$\frac{C_B}{G_+} < p$$

e questa condizione é sempre soddisfatta a causa delle (??) e (??). L'intervallo di franchigia é non vuoto se e solo se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left( \rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} \right) < \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{p_a}{p} \right) &\iff \rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} < 1 - \frac{p_a}{p} \\ &\iff \rho + \frac{C_B}{pG_+} < 1 \end{aligned}$$

e questa condizione é sempre soddisfatta a causa della (140).  $\square$

### 10.0.2 Interpretazione economica delle condizioni del Teorema 11

Nel Teorema fondamentale dei contratti ragionevoli in media si é visto che la condizione necessaria (140) ha una naturale interpretazione economica in termini di guadagno atteso del rischio iniziale.

Una analoga interpretazione é possibile per gli estremi inferiore e superiore per la franchigia dati dalla (147), cioé

$$f_a \in \left( \frac{1}{\rho} \left( \rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} \right), \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{p_a}{p} \right) \right] \quad (147)$$

Infatti, nelle ipotesi del Teorema 11, valgono le seguenti affermazioni.

(i) Il limite inferiore (143) per la franchigia é strettamente maggiore di zero se e solo se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left( \rho + \frac{C_B}{pG_+} - \frac{p_a}{p} \right) > 0 &\iff \frac{(1-p)G_-}{pG_+} + \frac{C_B}{pG_+} > \frac{p_a}{p} \\ &\iff (1-p)G_- + C_B > p_a G_+ \end{aligned} \quad (148)$$

cioé se e solo se il premio é minore dell'indice del rischio iniziale piú i costi dell'assicuratore. In particolare se l'indice del rischio iniziale é molto alto, non esistono contratti ragionevoli in media a franchigia nulla.

(ii) Il limite superiore per la franchigia dato dall'intervallo (147), é minore di 1 se e solo se

$$\frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{p_a}{p} \right) < 1 \iff 1 - \frac{p_a}{p} < \rho = \frac{(1-p)G_-}{pG_+} \iff pG_+ - p_a G_+ < (1-p)G_-$$

$$\iff pG_+ - (1-p)G_- = \langle G \rangle < p_a G_+ \quad (149)$$

Ciò esprime quantitativamente l'idea intuitiva che se il premio è maggiore del guadagno atteso del rischio iniziale, un contratto con una franchigia troppo alta non può essere ragionevole in media.

### 10.0.3 Contratti ragionevoli in media con franchigia pre-assegnata

Il seguente teorema risponde alla domanda analoga a quella del teorema precedente ottenuta scambiando i ruoli di premio e franchigia. Come si vede, al contrario di quanto accade per il premio, sulla franchigia non ci sono vincoli per la soluzione di questo problema.

**Teorema 12** Dato un rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  e un costo  $C_B$  per l'assicuratore, condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di franchigie  $f_a$  per le quali esista una coppia  $(f_a, p_a)$  ragionevole in media è che valga la condizione (140) che si può scrivere:

$$\frac{C_B}{G_+} < p(1-\rho) \left( \iff \frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \right) \quad (150)$$

dove il membro destro è un numero in  $(0, 1)$ . In questo caso ogni franchigia  $f_a$  nell'intervallo  $(0, 1)$  ha la proprietà che per ogni premio  $p_a$  nell'intervallo

$$\left[ p\rho(1-f_a) + \frac{C_B}{G_+}, p(1-\rho f_a) \right] \quad (151)$$

la coppia  $(f_a, p_a)$  è ragionevole in media. Inoltre nessuno dei due intervalli è vuoto e l'intervallo di franchigia (154) si riduce a  $(0, 1)$  se e solo se i costi di  $B$  sono minori o uguali del guadagno atteso del rischio iniziale. In tutti gli altri casi esso è contenuto in  $(0, 1)$ .

**Osservazione.** Nel caso di premio pre-assegnato sappiamo che  $pG_+ > p_a G_+ \iff p > p_a$ . Nel caso di franchigia pre-assegnata dall'estremo superiore per  $p_a$  dato dalla (151) si deduce che

$$p_a < p(1-\rho f_a) < p$$

cioè la disuguaglianza su  $p_a$  è ancora più stretta.

**Dimostrazione.** Dal Teorema 10 sappiamo che la coppia  $(f_a, p_a)$  é ragionevole in media se e solo se

$$\rho + \frac{C_B}{pG_+} < \rho f_a + \frac{p_a}{p} \leq 1 \quad (152)$$

e che l'intervallo associato é non vuoto se e solo se vale la (141).

Data una franchigia  $f_a$ , la prima delle disuguaglianze (152) equivale a:

$$\begin{aligned} \rho + \frac{C_B}{pG_+} < \rho f_a + \frac{p_a}{p} &\iff \rho + \frac{C_B}{pG_+} - \rho f_a < \frac{p_a}{p} \\ &\iff p\rho(1 - f_a) + \frac{C_B}{G_+} < p_a \end{aligned} \quad (153)$$

Ciò fornisce un estremo inferiore per  $p_a$ . Poiché  $p_a < 1$ , la (153) é possibile se e solo se

$$\begin{aligned} p\rho - p\rho f_a + \frac{C_B}{G_+} < 1 &\iff p\rho + \frac{C_B}{G_+} - 1 < p\rho f_a \iff 1 + \frac{C_B}{p\rho G_+} - \frac{1}{\rho} < f_a \\ &\iff 1 + \frac{pG_+}{(1-p)G_-} \frac{C_B}{pG_+} - \frac{pG_+}{(1-p)G_-} = 1 + \frac{C_B}{(1-p)G_-} - \frac{pG_+}{(1-p)G_-} < f_a \\ &\iff 1 - \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} < f_a \end{aligned}$$

Ciò fornisce un estremo inferiore per  $f_a$ :

$$\left( 1 - \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-}, 1 \right) \quad (154)$$

Tale estremo inferiore é  $< 1$  poiché

$$1 - \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} < 1 \iff -\frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} < 0 \iff pG_+ > C_B$$

e quest'ultima disuguaglianza é conseguenza della (150). Infatti, dato che nei contratti RM dev'essere  $\rho < 1$ , si ha:

$$\frac{C_B}{G_+} < p(1 - \rho) \iff pG_+ > \frac{C_B}{1 - \rho} > C_B$$

Osserviamo infine che l'estremo inferiore per  $f_a$  é banale (cioé  $\leq 0$ ) se e solo se

$$1 - \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} \leq 0 \iff (1-p)G_- - pG_+ + C_B \leq 0 \iff C_B \leq pG_+ + (1-p)G_- = \langle G \rangle$$

cioé se e solo se i costi di  $B$  sono minori o uguali del guadagno atteso del rischio iniziale. Dato che, dal Teorema 10, sappiamo che questa é una condizione necessaria per l'esistenza di contratti RM, concludiamo che l'intervallo di franchigia (154) si riduce a  $(0, 1)$ .

La seconda delle disuguaglianze (152) equivale a:

$$\rho f_a + \frac{p_a}{p} \leq 1 \iff \frac{p_a}{p} \leq 1 - \rho f_a \iff p_a \leq p(1 - \rho f_a) \quad (155)$$

e dato che, qualunque sia  $f_a \in [0, 1)$ ,  $\rho < 1$  a causa della (141) e  $p(1 - \rho f_a) > p(1 - \rho)$ , il membro destro della (155) é in  $> (0, 1)$ . Dato che la (155) non pone alcuna condizione su  $f_a$ , l'estremo superiore per la franchigia é 1.

Mettendo insieme gli estremi inferiori e superiori si vede che l'intervallo di premio é dato dalla (151) e l'intervallo di franchigia dalla (154). L'intervallo di premio é non vuoto se e solo se:

$$\begin{aligned} p\rho(1 - f_a) + \frac{C_B}{G_+} < p(1 - \rho f_a) &\iff p\rho - p\rho f_a + \frac{C_B}{G_+} < p - p\rho f_a \\ &\iff \frac{C_B}{G_+} < p(1 - \rho) \end{aligned}$$

che equivale alla (150). Si é già visto che l'intervallo di franchigia non é mai vuoto ed é contenuto in  $(0, 1)$ .  $\square$

**Problema 7** In connessione con un rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , un cliente  $A$  propone ad un assicuratore  $B$  di pagare

$$p_a G_+ = 5ME$$

per un contratto privo di franchigia

$$f_a = 0$$

con un rischio di perdita netta, in caso di catastrofe, pari a

$$G_- = 100ME$$

e con una probabilità di successo pari a:

$$p = 90\%$$

Se voi foste l'assicuratore  $B$ , ragionando sulla base della ragionevolezza in media, accettereste questo contratto?

**Soluzione.** Le condizioni di coerenza sono certamente soddisfatte. Tuttavia, ricordando che (v. (102))

$$G_B(-) = -(1 - f_a)G_- + p_a G_+ - C_B \quad ; \quad G_B(+) = p_a G_+ - C_B$$

$B$  calcola il suo guadagno atteso con i dati del problema e trova, in unità di M E:

$$\begin{aligned} \langle G_B \rangle &= pG_B(+) + (1 - p)G_B(-) \\ &= p(p_a G_+ - C_B) - (1 - p)(1 - f_a)G_- + (1 - p)p_a G_+ - (1 - p)C_B \\ &= p_a G_+ - (1 - p)G_- - C_B = 5 - (1/10)100 - C_B = -5 - C_B < 0 \end{aligned}$$

Quindi conclude che il contratto proposto non solo non è ragionevole in media, ma è svantaggioso per lui. Quindi non lo accetta.

## 11 Contratti assicurativi equi in rischio (ER)

**Definizione 20** Una coppia di  $(f_a, p_a) \in \mathbb{R}$ , relativa al rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , è detta **equa in rischio con capitali investiti  $C_A$  e  $C_B$** , se soddisfa la condizione

$$\frac{r_A}{C_A} = \frac{r_B}{C_B} \quad (156)$$

Se essa soddisfa anche le condizioni di coerenza economica, cioè  $(f_a, p_a) \in [0, 1) \times (0, 1)$  e

$$f_a + p_a G_+ / G_- < 1 \quad (157)$$

$$p_a G_+ > C_B \quad (158)$$

diremo che questa coppia definisce un **contratto equo in rischio**.

In altri termini per definizione un contratto é equo in rischio se il rapporto tra i rischi é inversamente proporzionale al rapporto tra i capitali investiti.

Dato che in genere l'assicurato investe piú dell'assicuratore, é naturale supporre che

$$C_A > C_B > 0 \quad (159)$$

Nel seguito supporremo che tale ipotesi sia soddisfatta.

**Lemma 8** Dato il rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , una coppia  $(f_a, p_a) \in [0, 1) \times (0, 1)$  é equa in rischio se e solo se

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} \quad (160)$$

Data  $f_a$ , il corrispondente  $p_a$  é univocamente determinato da:

$$p_a = \frac{G_-}{G_+} \left( \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a \right) \quad (161)$$

Dato  $p_a$  la corrispondente  $f_a$  é univocamente determinata da:

$$f_a = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - p_a \frac{G_+}{G_-} \quad (162)$$

**Dimostrazione**

$$\frac{r_A}{C_A} = \frac{r_B}{C_B} \iff$$

$$\iff (1-p) \frac{G_-}{C_A} (f_a + p_a G_+/G_-) = (1-p) \frac{G_-}{C_B} (1 - (f_a + p_a G_+/G_-) + C_B/G_-)$$

$$\iff \frac{1}{C_A} (f_a + p_a G_+/G_-) = \frac{1}{C_B} \left( 1 - (f_a + p_a \frac{G_+}{G_-}) + C_B/G_- \right)$$

$$\iff \frac{1}{C_A} (f_a + p_a G_+/G_-) = \frac{1}{C_B} - \frac{1}{C_B} (f_a + p_a \frac{G_+}{G_-}) + \frac{1}{G_-}$$

$$\iff \left( \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} \right) (f_a + p_a \frac{G_+}{G_-}) = \frac{1}{C_B} + \frac{1}{G_-}$$

$$\iff \frac{C_A + C_B}{C_A C_B} (f_a + p_a \frac{G_+}{G_-}) = \frac{G_- + C_B}{C_B G_-}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{C_A + C_B}{C_A} (f_a + p_a \frac{G_+}{G_-}) = \frac{G_- + C_B}{G_-} \\ &\Leftrightarrow (f_a + p_a \frac{G_+}{G_-}) = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} \end{aligned}$$

che é la (160).

Data  $f_a$ , risolvendo la seguente equazione (160) nell'incognita  $p_a$  si trova

$$\begin{aligned} p_a \frac{G_+}{G_-} = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a &\Leftrightarrow p_a = \frac{G_-}{G_+} \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_-}{G_+} f_a \\ &\Leftrightarrow p_a = \frac{G_-}{G_+} \left( \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a \right) \end{aligned}$$

che é la (161). Dato  $p_a$  risolvendo la (160) nell'incognita  $f_a$ , si trova

$$(f_a + p_a \frac{G_+}{G_-}) = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} \Leftrightarrow f_a = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - p_a \frac{G_+}{G_-}$$

che é la (162).

**Teorema 13** Una coppia equa in rischio soddisfa:

(i) la condizione di coerenza economica  $f_a + p_a G_+ / G_- < 1$  se e solo se

$$C_A < G_- \quad (163)$$

(ii) la condizione di coerenza economica  $p_a G_+ > C_B$  se e solo se

$$\frac{1}{G_-} \frac{G_- - C_B^2 / C_A}{1 + C_B / C_A} > f_a \quad (164)$$

Il membro sinistro della (164) é sempre positivo. Esso é  $\leq 1$  se e solo se

$$G_- \leq G_+ \left(1 + \frac{C_B}{C_A} \left(1 + \frac{C_B}{G_+}\right)\right) \quad \left(\text{tipicamente } \leq G_+ \left(1 + 2 \frac{C_B}{C_A}\right) < 3G_+\right) \quad (165)$$

**Osservazione** La (165) significa che il membro sinistro della (164) é un effettivo vincolo sulla franchigia solo se il rischio iniziale  $\{G_+, G_-, p\}$  é **poco catastrofico** (in particolare se  $G_- < 3G_+$ ).

**Dimostrazione** La (160) é compatibile con la condizione di coerenza  $f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} < 1$  se e solo se

$$\left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} < 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{C_B}{G_-} < \frac{C_A + C_B}{C_A} = 1 + \frac{C_B}{C_A} \Leftrightarrow \frac{1}{G_-} < \frac{1}{C_A}$$

che equivale alla (163). Dato che il premio é univocamente determinato dalla (161), la condizione di coerenza  $p_a G_+ > C_B$  equivale a

$$\begin{aligned}
p_a G_+ &= G_+ \frac{G_-}{G_+} \left( (1 + C_B/G_-) \frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a \right) > C_B \\
\iff p_a G_+ &= G_+ \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{1}{1 + C_B/C_A} - G_- f_a = \frac{G_- + C_B}{1 + C_B/C_A} - G_- f_a > C_B \\
\iff \frac{G_- + C_B}{1 + C_B/C_A} - C_B &= \frac{G_- + C_B - C_B - C_B^2/C_A}{1 + C_B/C_A} > G_- f_a \\
\iff \frac{G_- - C_B^2/C_A}{1 + C_B/C_A} > G_- f_a &\iff \frac{1}{G_-} \frac{G_- - C_B^2/C_A}{1 + C_B/C_A} > f_a
\end{aligned}$$

che é la (164). Poiché  $C_B < G_-$  (vedi (109)) e  $C_B < C_A$ , si ha

$$G_- - C_B^2/C_A = G_- - C_B \frac{C_B}{C_A} > G_- - C_B > 0$$

quindi il membro sinistro della (164) é positivo. Esso é minore di 1 se e solo se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G_+} \frac{G_- - C_B^2/C_A}{1 + C_B/C_A} < 1 &\iff G_- - C_B^2/C_A < G_+(1 + C_B/C_A) \\
&\iff G_- < G_+(1 + C_B/C_A) + C_B^2/C_A \\
&\iff G_- < G_+ \left( 1 + \frac{C_B}{C_A} + \frac{C_B}{G_+} \frac{C_B}{C_A} \right) = G_+ \left( 1 + \frac{C_B}{C_A} \left( 1 + \frac{C_B}{G_+} \right) \right)
\end{aligned}$$

che é la (165).  $\square$

### Osservazione

Nel Credit Default Swaps (CDS), grazie alla garanzia di Stato, si ha sempre  $C_A > G_-$ , cioè la condizione di coerenza economica (163) non é mai soddisfatta. Di conseguenza, per la copertura dei CDS, i contratti equi in rischio non sono possibili.

**Teorema 14** Supponiamo che le condizioni di coerenza economica (163) e (164) siano soddisfatte. Tutte e sole le franchigie  $f_a$  per cui esiste un premio

$p_a$  tale che la coppia  $(f_a, p_a)$  definisca un contratto equo in rischio sono quelle che soddisfano la condizione:

$$f_a \in \left( \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1, \frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} \right] \cap [0, 1) \quad (166)$$

L'intervallo in (166) é sempre non vuoto se il rischio iniziale é non catastrofico ( $G_+ \geq G_-$ ). Se il rischio iniziale é catastrofico ( $G_+ < G_-$ ), l'intervallo in (166) é non vuoto se e solo se:

$$G_- < 2G_+ \left( 1 + \left( \frac{C_B}{C_A} - \frac{C_B}{G_+} \right) \right) \quad (167)$$

(rischio "molto poco catastrofico"). In questo caso  $p_a$  é univocamente determinato dalla (161).

**Dimostrazione.** Dalla (161)

$$p_a = \frac{G_-}{G_+} \left( \left( 1 + C_B/G_- \right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a \right)$$

si deduce che la condizione  $0 < p_a$  equivale a

$$\begin{aligned} 0 < \frac{G_-}{G_+} \left( \left( 1 + C_B/G_- \right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a \right) \\ \iff 0 < \left( \left( 1 + C_B/G_- \right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a \right) &= \frac{G_- + C_B}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a \\ \iff f_a < \frac{G_- + C_B}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} \end{aligned}$$

La condizione  $p_a < 1$  equivale a

$$\begin{aligned} \frac{G_-}{G_+} \left( \left( 1 + C_B/G_- \right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a \right) < 1 \\ \iff \left( 1 + C_B/G_- \right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - f_a < \frac{G_+}{G_-} \iff \left( 1 + C_B/G_- \right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_+}{G_-} < f_a \\ \iff \frac{G_- + C_B}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_+}{G_-} < f_a \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$f_a \in \left( \frac{G_- + C_B}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_+}{G_-}, \frac{G_- + C_B}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} \right] \cap [0, 1)$$

D'altra parte, dalla (164) sappiamo che dev'essere:

$$\frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} = \frac{G_- C_A + C_B^2}{C_A G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} > f_a$$

e, dato che  $C_B/C_A < 1$ ,

$$\frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} < \frac{G_- + C_B}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B}$$

Pertanto, a causa della (164), l'intervallo va ristretto a

$$f_a \in \left( \frac{G_- + C_B}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_+}{G_-}, \frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} \right] \cap [0, 1)$$

che é la (166). Quest'intervallo é non vuoto se e solo se

$$\frac{G_- + C_B}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_+}{G_-} < \frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B}$$

$$\frac{G_- + C_B}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} < \frac{G_+}{G_-}$$

$$\frac{C_A}{(C_A + C_B)G_-} (G_- + C_B - G_- - C_B^2/C_A) < \frac{G_+}{G_-}$$

$$\frac{C_A C_B}{(C_A + C_B)G_-} (1 - C_B/C_A) < \frac{G_+}{G_-}$$

$$\frac{C_A C_B}{(C_A + C_B)G_-} \frac{C_A - C_B}{C_A} < \frac{G_+}{G_-}$$

$$\frac{C_A - C_B}{(C_A + C_B)} \frac{C_B}{G_-} < \frac{G_+}{G_-} \iff \frac{C_A - C_B}{(C_A + C_B)} C_B < G_+ \iff \frac{C_A - C_B}{C_A + C_B} < \frac{G_+}{C_B}$$

Dato che  $C_B < G_+$  e  $C_A - C_B < C_A + C_B$ , questa disuguaglianza é sempre soddisfatta e quindi il primo intervallo dell'intersezione é sempre non vuoto.

L'intersezione stessa é non vuota se e solo se

$$\frac{G_- + C_B}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_+}{G_-} < 1 \iff \frac{G_- + C_B}{G_-} \frac{C_A}{C_A + C_B} < 1 + \frac{G_+}{G_-}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (G_- + C_B) \frac{C_A}{C_A + C_B} &< G_- + G_+ \\ \Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} &< \frac{G_- + G_+}{G_- + C_B} \end{aligned}$$

Questa disuguaglianza é sempre soddisfatta poiché  $G_+ > C_B$ . Quindi l'intersezione non é mai vuota.

**Teorema 15** Supponiamo che le condizioni di coerenza economica (163) e (164) siano soddisfatte. Tutti e soli i premi  $p_a$  per cui esiste una franchigia  $f_a$  tale che la coppia  $(f_a, p_a)$  definisca un contratto equo in rischio sono quelli che soddisfano la condizione:

$$p_a \in \left( \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1, \frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} \right] \cap [0, 1) \quad (168)$$

L'intervallo in (166) é sempre non vuoto.

In questo caso  $f_a$  é univocamente determinata dalla (161).

**Dimostrazione.** Dalla (162) sappiamo che:

– la condizione di coerenza economica (158) implica per il premio il limite inferiore

$$p_a > \frac{C_B}{G_+}$$

– dato  $p_a \in (\frac{C_B}{G_+}, 1)$ , se una franchigia  $f_a$  tale che la coppia  $(f_a, p_a)$  definisca un contratto equo in rischio esiste, allora essa é determinata in modo univoco da:

$$f_a = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - p_a \frac{G_+}{G_-} \quad (169)$$

– le condizioni di coerenza economica per coppie eque in rischio equivalgono a

$$C_A < G_- \quad (170)$$

$$\frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} > f_a \quad (171)$$

La condizione  $f_a \geq 0$  é equivalente a

$$\begin{aligned} f_a = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - p_a \frac{G_+}{G_-} \geq 0 &\iff \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} \geq p_a \frac{G_+}{G_-} \\ &\iff \frac{G_-}{G_+} \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} \geq p_a \iff \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} \geq p_a \end{aligned}$$

Quindi si deve avere

$$p_a \in \left( \frac{C_B}{G_+}, \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} \right] \cap (0, 1)$$

Dato che  $0 < \frac{C_B}{G_+} < 1$ , l'intersezione non é mai vuota se

$$\frac{C_B}{G_+} < \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} \iff C_B < (G_- + C_B) \frac{C_A}{C_A + C_B}$$

$$\iff C_A C_B + C_B^2 < C_A G_- + C_A C_B \iff C_B^2 < C_A G_- \iff C_B \frac{C_B}{C_A} < G_-$$

Ma quest'ultima condizione é sempre soddisfatta poiché, dalla (109) sappiamo che  $C_B < G_-$  e per ipotesi  $\frac{C_B}{C_A} < 1$ . Quindi l'intersezione non é mai vuota. La condizione  $f_a < 1$  é equivalente a

$$\begin{aligned} f_a = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - p_a \frac{G_+}{G_-} < 1 &\iff \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1 < p_a \frac{G_+}{G_-} \\ &\iff \frac{G_-}{G_+} \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_-}{G_+} < p_a \\ &\iff \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_-}{G_+} < p_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{G_-}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} + \frac{C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_-}{G_+} < p_a \\
&\Leftrightarrow \frac{C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_-}{G_+} \left( 1 - \frac{C_A}{C_A + C_B} \right) < p_a \\
&\Leftrightarrow \frac{C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_-}{G_+} \frac{C_B}{C_A + C_B} < p_a
\end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$\frac{C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{G_-}{G_+} \frac{C_B}{C_A + C_B} < \frac{C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} < \frac{C_B}{G_+}$$

Quindi l'ultima disuguaglianza non pone ulteriori condizioni sul premio.

## 12 Contratti assicurativi equi in media

Dato un rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , il criterio di ragionevolezza in media non definisce un unico contratto assicurativo neanche se si fissa a priori il premio o la franchigia.

I contratti di tipo *equo* sono basati su condizioni, plausibili dal punto di vista economico, che permettono di individuare univocamente un contratto assicurativo una volta fissato il premio o la franchigia.

La condizione di equità in media é un primo esempio di tali contratti. Essa sarà esaminata in questo capitolo.

I contratti di tipo *equo* tengono conto dell'investimento sia dell'assicuratore ( $C_B$ ) che dell'assicurato ( $C_A$ ). Ricordiamo che, secondo la Definizione (15), un contratto equo in media tra  $A$  e  $B$  é caratterizzato dalla condizione

$$\left\langle \frac{G_A}{C_A} \right\rangle = \left\langle \frac{G_B}{C_B} \right\rangle \tag{172}$$

che esprime il fatto che il guadagno atteso per unità di capitale investito é la stessa per entrambi. Nel seguito ci limiteremo a trattare il caso in cui:

**i capitali  $C_A$  e  $C_B$  sono costanti.**

In questo caso la condizione (172) diventa

$$\frac{\langle G_A \rangle}{C_A} = \frac{\langle G_B \rangle}{C_B} \tag{173}$$

Nel seguito analizzeremo le conseguenze di questa definizione.

**Definizione 21** Una coppia  $(f_a, p_a) \in [0, 1) \times (0, 1)$ , che soddisfa la condizione (173) sarà detta una **coppia equa in media**. Se essa soddisfa anche le condizioni di coerenza economica (107), cioè

$$f_a + p_a G_+ / G_- < 1 \quad (174)$$

$$p_a G_+ > C_B \quad (175)$$

diremo che tale coppia definisce un **contratto equo in media**.

**Teorema 16** Dato il rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  le coppie  $(f_a, p_a)$ , EM con capitali investiti  $(C_A, C_B)$ , sono quelle che soddisfano la condizione:

$$\left(1 + \frac{C_A}{pG_+}\right) \frac{C_B}{C_A + C_B} + \frac{C_A}{C_A + C_B} \rho = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \quad (176)$$

o, equivalentemente:

$$\frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \quad (177)$$

**Dimostrazione.** Ricordando le funzioni guadagno di  $A$  e di  $B$  dopo il contratto:

$$G_A(+) = (1 - p_a)G_+$$

$$G_A(-) = -f_a G_- - p_a G_+ = -(f_a + p_a G_+ / G_-)G_-$$

$$G_B(+) = p_a G_+ - C_B$$

$$G_B(-) = -(1 - f_a)G_- + p_a G_+ - C_B$$

$$= -G_- (1 - (f_a + p_a G_+ / G_-)) - C_B = -G_- [1 - (f_a + p_a G_+ / G_-) + C_B / G_-]$$

la condizione (173), di equità in media con capitali investiti  $(C_A, C_B)$ , equivale a:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{G_A}{C_A} \right\rangle = \left\langle \frac{G_B}{C_B} \right\rangle &\iff p(1 - p_a) \frac{G_+}{C_A} - (1 - p) \frac{G_-}{C_A} (f_a + p_a G_+ / G_-) = \\ &= p \frac{(p_a G_+ - C_B)}{C_B} - (1 - p) \frac{G_-}{C_B} (1 - (f_a + p_a G_+ / G_-) + \frac{C_B}{G_-}) \iff \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iff p(1-p_a)\frac{G_+}{C_A} - (1-p)\frac{G_-}{C_A}(f_a + p_a G_+/G_-) = \\
& = p\frac{p_a G_+}{C_B} - p - (1-p)\frac{G_-}{C_B}(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) - (1-p) \\
& \iff pG_+\frac{1}{C_A} - pG_+p_a\frac{1}{C_A} - pG_+p_a\frac{1}{C_B} \\
& = (1-p)\frac{G_-}{C_A}(f_a + p_a G_+/G_-) - 1 - (1-p)\frac{G_-}{C_B} + (1-p)\frac{G_-}{C_B}(f_a + p_a G_+/G_-) \\
& \iff p\frac{G_+}{C_A} - pG_+p_a\left(\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B}\right) \\
& = (1-p)G_-(f_a + p_a G_+/G_-)\left(\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B}\right) - 1 - (1-p)\frac{G_-}{C_B} \\
& \iff 1 + p\frac{G_+}{C_A} + (1-p)\frac{G_-}{C_B} \\
& = (1-p)G_-(f_a + p_a G_+/G_-)\left(\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B}\right) + pG_+p_a\left(\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B}\right) \\
& \iff \left(1 + p\frac{G_+}{C_A} + (1-p)\frac{G_-}{C_B}\right)\frac{C_A C_B}{C_A + C_B} = (1-p)G_-(f_a + p_a G_+/G_-) + pG_+p_a \\
& \iff \left(1 + p\frac{G_+}{C_A} + (1-p)\frac{G_-}{C_B}\right)\frac{C_A C_B}{C_A + C_B} = pG_+(\rho f_a + \rho p_a G_+/G_- + p_a) \\
& \qquad \qquad \qquad = pG_+\left(\rho f_a + \frac{p_a}{p}\right) \\
& \iff \left(\frac{1}{pG_+} + \frac{1}{C_A} + \rho\frac{1}{C_B}\right)\frac{C_A C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \\
& \iff \frac{C_A}{pG_+}\frac{C_B}{C_A + C_B} + \frac{C_B}{C_A + C_B} + \frac{C_A}{C_A + C_B}\rho = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \\
& \iff \left(1 + \frac{C_A}{pG_+}\right)\frac{C_B}{C_A + C_B} + \frac{C_A}{C_A + C_B}\rho = \rho f_a + \frac{p_a}{p}
\end{aligned}$$

che é la (176). Questa si puó anche scrivere

$$\frac{C_B}{pG_+}\frac{C_A}{C_A + C_B} + \frac{C_B}{C_A + C_B} + \frac{C_A}{C_A + C_B}\rho = \rho f_a + \frac{p_a}{p}$$

che equivale alla (177).  $\square$

## 12.1 Contratti equi in media con premio o franchigia pre-asseganti

**Teorema 17** Dato  $p_a$ , che a causa della condizione di coerenza (177), deve soddisfare  $p_a \in (C_B/G_+, 1)$ , una  $f_a \in [0, 1)$  tale che la coppia  $(f_a, p_a)$  definisca un contratto equo in media esiste se e solo se

$$p_a \in \left( \frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{C_A}{pG_+} - \rho + 1 \right), p \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} \right) \right] \cap \cap (C_B/G_+, 1) \quad (178)$$

e il primo intervallo in (178) é non vuoto se e solo se valgono le due disuguaglianze:

$$\frac{C_A}{C_B} + \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} > 0 \iff p \frac{G_+}{C_B} + (1-p) \frac{G_-}{C_A} > 1 \quad (179)$$

$$1 + \frac{pG_+}{C_A} < \left( \frac{C_B}{C_A} + p \right) \frac{G_-}{C_B} \quad (180)$$

In questo caso l'intersezione in (178) é non vuota ed  $f_a$  é univocamente determinata dalla identità:

$$f_a = \frac{1}{\rho} \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{p_a}{p} \right) \quad (181)$$

**Dimostrazione.** Sappiamo che le coppie  $(f_a, p_a)$  EM sono quelli che soddisfano la condizione (177), cioè

$$\begin{aligned}
& \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \\
\iff & \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{p_a}{p} = \rho f_a \\
\iff & \frac{1}{\rho} \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{p_a}{p} \right) = f_a
\end{aligned}$$

che é la (181). Essendo  $\rho > 0$ , la condizione  $f_a \geq 0$  equivale al seguente estremo superiore sul premio:

$$\begin{aligned}
& \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{p_a}{p} \geq 0 \\
\iff & p \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} \right) \geq p_a
\end{aligned}$$

che fornisce l'estremo superiore dell'intervallo (178). Affinché questa risulti compatibile con la condizione  $p_a \in (C_B/G_+, 1)$ , dev'essere

$$\begin{aligned}
& p \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} \right) > C_B/G_+ \\
\iff & \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{pG_+} + \frac{C_A}{C_A + C_B} \rho + \frac{C_B}{C_A + C_B} > \frac{C_B}{pG_+} \\
\iff & \frac{C_A}{C_A + C_B} \rho + \frac{C_B}{C_A + C_B} > \frac{C_B}{pG_+} \left( 1 - \frac{C_A}{C_A + C_B} \right) \\
\iff & \frac{C_A}{C_A + C_B} \rho + \frac{C_B}{C_A + C_B} > \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{C_B}{pG_+} \\
\iff & \frac{C_A}{C_B} \rho + 1 > \frac{C_B}{pG_+} \iff \frac{C_A}{C_B} (1-p)G_- + pG_+ > C_B \\
\iff & \frac{C_A}{C_B} + \frac{pG_+}{(1-p)G_-} > \frac{C_B}{(1-p)G_-} \iff \frac{C_A}{C_B} + \frac{pG_+}{(1-p)G_-} - \frac{C_B}{(1-p)G_-} > 0 \\
& \iff \frac{C_A}{C_B} + \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} > 0 \tag{182}
\end{aligned}$$

che é la (179). La condizione di coerenza economica (174) equivale all'estremo inferiore sul premio:

$$f_a + p_a G_+ / G_- < 1$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{p_a}{p} \right) + p_a G_+ / G_- < 1 \\
&\Leftrightarrow \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{p_a}{p} \right) + \rho p_a G_+ / G_- < \rho \\
&\Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{p_a}{p} + \frac{p_a}{p} - p_a < \rho \\
&\Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \rho < p_a \\
&\Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{pG_+} + \frac{C_A}{C_A + C_B} \rho + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \rho < p_a \\
&\Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{pG_+} - \frac{C_B}{C_A + C_B} \rho + \frac{C_B}{C_A + C_B} < p_a \\
&\Leftrightarrow \frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{C_A}{pG_+} - \rho + 1 \right) < p_a
\end{aligned}$$

che é l'estremo inferiore dell'intervallo (178).

La condizione  $p_a < 1$  impone che

$$\begin{aligned}
&\frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{C_A}{pG_+} - \rho + 1 \right) < 1 \Leftrightarrow \frac{C_A}{pG_+} - \rho + 1 < 1 + \frac{C_A}{C_B} \\
&\Leftrightarrow \frac{C_A}{pG_+} - \frac{(1-p)G_-}{pG_+} < \frac{C_A}{C_B} \Leftrightarrow 1 - (1-p) \frac{G_-}{C_A} < \frac{pG_+}{C_B}
\end{aligned}$$

che coincide con la (182) e quindi con la (179). Il primo intervallo in (178) é non vuoto se e solo se

$$\begin{aligned}
&\frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \rho < p \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - p \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} \right) < \rho \\
&\Leftrightarrow (1-p) \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} \right) < \rho \\
&\Leftrightarrow (1-p) \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} \right) < \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \frac{G_-}{G_+}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} < \frac{G_-}{pG_+} \\
&\Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{pG_+} + \frac{C_A}{C_A + C_B} \rho + \frac{C_B}{C_A + C_B} < \frac{G_-}{pG_+} \\
&\Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{pG_+} + \frac{C_A}{C_A + C_B} \rho + \frac{C_B}{C_A + C_B} < \frac{G_-}{pG_+} \\
&\Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} C_B + \frac{C_A}{C_A + C_B} (1 - p)G_- + \frac{C_B}{C_A + C_B} pG_+ < G_- \\
&\Leftrightarrow C_B + (1 - p)G_- + \frac{C_B}{C_A} pG_+ < \frac{C_A + C_B}{C_A} G_- \\
&\Leftrightarrow C_B \left( 1 + \frac{pG_+}{C_A} \right) < \left( 1 + \frac{C_B}{C_A} \right) G_- - (1 - p)G_- \\
&\Leftrightarrow C_B \left( 1 + \frac{pG_+}{C_A} \right) < \left( 1 + \frac{C_B}{C_A} - 1 + p \right) G_- \\
&\Leftrightarrow C_B \left( 1 + \frac{pG_+}{C_A} \right) < \left( \frac{C_B}{C_A} + p \right) G_- \\
&\Leftrightarrow 1 + \frac{pG_+}{C_A} < \left( \frac{C_B}{C_A} + p \right) \frac{G_-}{C_B}
\end{aligned}$$

che é la (180).

**Corollario 2** *La (180) può essere soddisfatta se e solo se*

$$\frac{C_B}{G_-} < \frac{C_B}{C_A} + p \quad (183)$$

*In questo caso, una condizione sufficiente affinché valgano le due disuguaglianze (179) e (180) è che risulti*

$$p > \frac{C_B}{G_-} \quad (184)$$

**Dimostrazione.** La (180) può essere soddisfatta se e solo se

$$0 < \left( \frac{C_B}{C_A} + p \right) \frac{G_-}{C_B} - 1 \iff 1 < \left( \frac{C_B}{C_A} + p \right) \frac{G_-}{C_B} \iff \frac{C_B}{G_-} < \frac{C_B}{C_A} + p$$

In questo caso le due disuguaglianze (179) e (180) equivalgono rispettivamente a

$$1 - (1-p) \frac{G_-}{C_A} < \frac{pG_+}{C_B} \iff C_B - (1-p)C_B \frac{G_-}{C_A} < pG_+$$

$$\frac{pG_+}{C_A} < \left( \frac{C_B}{C_A} + p \right) \frac{G_-}{C_B} - 1 \iff pG_+ < (C_B + pC_A) \frac{G_-}{C_B} - C_A = G_- + pG_- \frac{C_A}{C_B} - C_A$$

Pertanto il primo intervallo in (178) è non vuoto se e solo se vale la condizione di compatibilità:

$$\begin{aligned} C_B - (1-p)C_B \frac{G_-}{C_A} &< G_- + pG_- \frac{C_A}{C_B} - C_A \\ \iff C_A + C_B &< G_- + pG_- \frac{C_A}{C_B} + (1-p)G_- \frac{C_B}{C_A} \\ \iff C_A + C_B &< G_- \left( 1 + p \frac{C_A}{C_B} + (1-p) \frac{C_B}{C_A} \right) \\ \iff \frac{C_A}{G_-} + \frac{C_B}{G_-} &< 1 + p \frac{C_A}{C_B} + (1-p) \frac{C_B}{C_A} \\ \iff 0 &< \left( 1 - \frac{C_B}{G_-} \right) + \left( p \frac{C_A}{C_B} - \frac{C_A}{G_-} \right) + (1-p) \frac{C_B}{C_A} \\ \iff 0 &< \left( 1 - \frac{C_B}{G_-} \right) + \frac{C_A}{C_B} \left( p - \frac{C_B}{G_-} \right) + (1-p) \frac{C_B}{C_A} \end{aligned}$$

e la condizione (184) assicura che

$$1 - \frac{C_B}{G_-} > p - \frac{C_B}{G_-} > 0 \quad ;$$

Quindi

$$\left(1 - \frac{C_B}{G_-}\right) + \frac{C_A}{C_B} \left(p - \frac{C_B}{G_-}\right) + (1-p) \frac{C_B}{C_A} > (1-p) \frac{C_B}{C_A} > 0$$

**Teorema 18** Data  $f_a \in (0, 1)$ , un  $p_a \in (C_B/G_+, 1)$  tale che la coppia  $(f_a, p_a)$  definisca un contratto equo in media esiste se e solo se

$$f_a \in [0, 1) \cap \quad (185)$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \left(\frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{1}{p}\right), \frac{1}{\rho} \left(\frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A + C_B}\right)\right)$$

e il secondo intervallo in (185) é non vuoto se e solo se

$$\frac{C_A}{C_B} + \frac{pG_+}{(1-p)G_-} > \frac{C_B}{(1-p)G_-} \quad (186)$$

$$\frac{C_B}{G_-} < p + \frac{C_B}{C_A}(1 - (1-p)\rho) \quad (187)$$

$$\frac{C_A}{G_+} + (1-p) \frac{G_-}{G_+} < \frac{C_A}{C_B} + (1-p) \quad (188)$$

In questo caso l'intersezione in (185) é non vuota e  $p_a$  é univocamente determinato dalla identità:

$$p_a = p \left(\frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \rho f_a\right) \quad (189)$$

**Dimostrazione.** Sappiamo che le coppie  $(f_a, p_a)$  EM sono quelli che soddisfano la condizione (177), cioè

$$\begin{aligned} & \frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \\ \Leftrightarrow & p \left(\frac{C_A}{C_A + C_B} \left(\frac{C_B}{pG_+} + \rho\right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \rho f_a\right) = p_a \end{aligned}$$

Quindi, se un premio  $p_a$  tale che la coppia  $(f_a, p_a)$  sia equa in media esiste, esso é necessariamente dato dalla (189).

Essendo  $p > 0$ , la condizione  $p_a > C_B/G_+$  implica il seguente estremo superiore sulla franchigia:

$$\begin{aligned}
& p \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \rho f_a \right) = p_a > \frac{C_B}{G_+} \\
& \iff \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \rho f_a > \frac{C_B}{pG_+} \\
& \iff \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{pG_+} + \frac{C_A}{C_A + C_B} \rho + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{C_B}{pG_+} > \rho f_a \\
& \iff \frac{C_A}{C_A + C_B} \rho + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{C_B}{pG_+} > \rho f_a \\
& \iff \frac{C_A}{C_A + C_B} + \frac{1}{\rho} \frac{C_B}{C_A + C_B} \left( 1 - \frac{C_B}{pG_+} \right) > f_a \\
& \iff \frac{C_A}{C_A + C_B} + \frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{pG_+}{(1-p)G_-} - \frac{C_B}{(1-p)G_-} \right) > f_a \\
& \iff \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( 1 + \frac{C_B pG_+ - C_B}{C_A (1-p)G_-} \right) > f_a
\end{aligned}$$

Affinché tale disuguaglianza sia possibile é necessario che

$$1 + \frac{C_B pG_+ - C_B}{C_A (1-p)G_-} > 0 \iff \frac{C_A}{C_B} + \frac{pG_+}{(1-p)G_-} > \frac{C_B}{(1-p)G_-}$$

che é la (186).

Per lo stesso motivo, la condizione  $p_a < 1$  implica il seguente estremo inferiore sulla franchigia:

$$\begin{aligned}
& p \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \rho f_a \right) < 1 \\
& \iff \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \rho f_a < \frac{1}{p} \\
& \iff \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{1}{p} < \rho f_a
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{1}{p} \right) < f_a$$

Essendo  $f_a < 1$ , ciò implica che

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{1}{p} \right) < 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{1}{p} < \rho \\ \Leftrightarrow & \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{pG_+} + \frac{C_A}{C_A + C_B} \rho + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \rho < \frac{1}{p} \\ \Leftrightarrow & \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{pG_+} + \frac{C_B}{C_A + C_B} \rho + \frac{C_B}{C_A + C_B} < \frac{1}{p} \\ \Leftrightarrow & \frac{C_A}{pG_+} + \rho + 1 < \frac{1}{p} \frac{C_A + C_B}{C_B} \\ \Leftrightarrow & \frac{C_A}{G_+} + (1-p) \frac{G_-}{G_+} + p < \frac{C_A}{C_B} + 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{C_A}{G_+} + (1-p) \frac{G_-}{G_+} < \frac{C_A}{C_B} + (1-p) \end{aligned}$$

che é la (188).

La condizione di coerenza economica (174) equivale all'estremo superiore sulla franchigia:

$$\begin{aligned} & f_a + p_a G_+ / G_- < 1 \\ \Leftrightarrow & f_a + p \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \rho f_a \right) G_+ / G_- < 1 \\ \Leftrightarrow & f_a + p \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{pG_+} + \frac{C_A}{C_A + C_B} \rho \right) \frac{G_+}{G_-} + p \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{G_+}{G_-} - p \rho \frac{G_+}{G_-} f_a < 1 \\ \Leftrightarrow & f_a + p \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{pG_+} \frac{G_+}{G_-} + \frac{C_A}{C_A + C_B} p \rho \frac{G_+}{G_-} + p \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{G_+}{G_-} - p \rho \frac{G_+}{G_-} f_a < 1 \\ \Leftrightarrow & f_a + \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{G_-} + \frac{C_A}{C_A + C_B} (1-p) + p \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{G_+}{G_-} - (1-p) f_a < 1 \\ \Leftrightarrow & p f_a + \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{G_-} + \frac{C_A}{C_A + C_B} (1-p) + p \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{G_+}{G_-} < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow pf_a < 1 - \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{G_-} + \frac{C_A}{C_A + C_B} (1 - p) + p \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{G_+}{G_-} \right) \\
&\Leftrightarrow pf_a < 1 - \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{G_-} + (1 - p) + p \frac{C_B G_+}{C_A G_-} \right) \\
&\Leftrightarrow pf_a < 1 - \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{G_-} + (1 - p) \left( 1 + \frac{C_B}{C_A} \rho \right) \right)
\end{aligned}$$

ció richiede innanzitutto che

$$\begin{aligned}
&\frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{G_-} + (1 - p) \left( 1 + \frac{C_B}{C_A} \rho \right) \right) < 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{C_B}{G_-} + 1 - p + \frac{C_B}{C_A} < 1 + \frac{C_B}{C_A} \\
&\Leftrightarrow \frac{C_B}{G_-} < p + \frac{C_B}{C_A} (1 - (1 - p) \rho)
\end{aligned}$$

che é la (187).

La compatibilitá tra estremo inferiore e estremo superiore richiede che

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho} \left( \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{1}{p} \right) < \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{G_-} + (1 - p) \left( 1 + \frac{C_B}{C_A} \rho \right) \right) \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{1}{p} < \frac{\rho}{p} - \frac{\rho}{p} \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{G_-} + (1 - p) \left( 1 + \frac{C_B}{C_A} \rho \right) \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} + \frac{\rho}{p} \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{G_-} + (1 - p) \left( 1 + \frac{C_B}{C_A} \rho \right) \right) < \frac{1 + \rho}{p} \\
&\Leftrightarrow \frac{C_B}{C_A + C_B} + \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho + \frac{\rho}{p} \left( \frac{C_B}{G_-} + (1 - p) \left( 1 + \frac{C_B}{C_A} \rho \right) \right) \right) < \frac{1 + \rho}{p}
\end{aligned}$$

che é automaticamente soddisfatta se

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho + \frac{\rho}{p} \left( \frac{C_B}{G_-} + (1 - p) \left( 1 + \frac{C_B}{C_A} \rho \right) \right) \leq 1$$

Quindi in questo caso l'intervallo (185), delle franchigie ammissibili, non é mai vuoto se le condizioni (187) e (188) sono soddisfatte.

### Osservazione

Se

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho + \frac{\rho}{p} \left( \frac{C_B}{G_-} + (1-p) \left( 1 + \frac{C_B}{C_A} \rho \right) \right) > 1$$

le condizioni sono complicate e non danno molto insight. Tuttavia, dato che nei casi economici consueti  $C_B/G_+ \ll 1$ ,  $1 \gg 1/2$ ,  $C_B/G_- \ll 1$ ,  $(C_B/C_A)\rho \ll 1$ , questo caso non é molto significativo economicamente.

## 12.2 Guadagni attesi dopo un contratto equo in media

**Proposizione 9** *Nelle condizioni del Teorema (17), dato  $p_a$ , sia  $f_a$  l'unica franchigia tale che il contratto  $(f_a, p_a)$  sia equo in media. Allora risulta*

$$\langle G_A \rangle = \frac{C_A}{C_A + C_B} (\langle G \rangle - C_B) \quad (190)$$

$$\langle G_B \rangle = \frac{C_B}{C_A + C_B} (\langle G \rangle - C_B) \quad (191)$$

**Dimostrazione.** Per il teorema sulla conservazione del guadagno

$$G_A + G_B = G - C_B \cdot 1$$

quindi

$$\langle G_A \rangle + \langle G_B \rangle = \langle G \rangle - C_B \iff \langle G_B \rangle = \langle G \rangle - \langle G_A \rangle - C_B$$

Da ciò, usando la definizione di contratto equo in media, si deduce che in un tale contratto:

$$\begin{aligned} \frac{\langle G_A \rangle}{C_A} = \frac{\langle G_B \rangle}{C_B} = \frac{\langle G \rangle - \langle G_A \rangle - C_B}{C_B} &\iff \langle G_A \rangle \left( \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} \right) = \frac{\langle G \rangle}{C_B} - 1 \\ \iff \langle G_A \rangle \left( \frac{C_A + C_B}{C_A C_B} \right) = \frac{\langle G \rangle}{C_B} - 1 &\iff \langle G_A \rangle \left( \frac{C_A + C_B}{C_A} \right) = \langle G \rangle - C_B \\ \iff \langle G_A \rangle = \frac{C_A}{C_A + C_B} (\langle G \rangle - C_B) & \end{aligned}$$

che equivale alla (190). Similmente, usando ancora il teorema della conservazione del guadagno:

$$\langle G_B \rangle = \langle G \rangle - \langle G_A \rangle - C_B$$

$$\begin{aligned}
&= \langle G \rangle - \frac{C_A}{C_A + C_B} (\langle G \rangle - C_B) - C_B = \langle G \rangle - \frac{C_A}{C_A + C_B} \langle G \rangle + \frac{C_A}{C_A + C_B} C_B - C_B \\
&= \frac{C_B}{C_A + C_B} \langle G \rangle - \frac{C_B}{C_A + C_B} C_B = \frac{C_B}{C_A + C_B} (\langle G \rangle - C_B)
\end{aligned}$$

□

### 12.3 Contratti equi e ragionevoli in media

**Teorema 19** Se il rischio iniziale é di tipo investimento, cioè

$$\langle G \rangle > C_B \quad (192)$$

ogni contratto equo in media é anche ragionevole in media e in questo caso il guadagno atteso sia di  $A$  che di  $B$  é strettamente positivo.

**Dimostrazione** La disuguaglianza (190), (191) mostrano che  $\langle G_A \rangle$  e  $\langle G_B \rangle$  sono positivi se e solo se  $\langle G \rangle \geq 0$ . D'altra parte, in un contratto ragionevole in media dev'essere  $\langle G_B \rangle > 0$ . Un tale contratto può essere equo in media se e solo se  $\langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle > 0$ . Da ciò segue l'asserto.

**Osservazione.**

Se un contratto é sia equo che ragionevole in media, allora

$$pG_+ > \langle G \rangle = pG_+ - (1-p)G_- > C_B$$

### 12.4 Contratti assicurativi universalmente equi in media

Dal Teorema (16) sappiamo che, dato il rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , le coppie  $(f_a, p_a)$ , EM con capitali investiti  $(C_A, C_B)$ , sono quelle che soddisfano la condizione (177), cioè la (198)

$$\frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \quad (193)$$

In molti casi pur senza conoscere esattamente la probabilità di successo, é possibile che assicurato e assicuratore concordino nel valutarla piuttosto alta.

In questi casi le considerazioni che seguono mostrano che é possibile determinare un contratto equo in media **indipendentemente dalla probabilitá**  $p$ . Poiché, come si é detto piú volte in numerose situazioni risulta estremamente difficile stimare la probabilitá di successo  $p$ , contratti del genere possono essere molto interessanti.

**Definizione 22** Un contratto  $(f_a, p_a)$ , relativo al rischio iniziale  $\{G_+, G_-, p\}$ , sará detto **universalmente equo in media** se esiste un valore  $p_0$  della probabilitá di successo con la proprietá che tale contratto risulti equo in media **qualunque sia il valore della probabilitá**  $p \in (p_0, 1)$

**Teorema 20** Un contratto universalmente equo in media per il rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , con capitali investiti  $C_A, C_B < G_+$ , esiste se e solo se

$$\frac{G_+}{G_-} \leq \frac{C_A}{C_B} \quad (194)$$

$$C_A < G_- \quad (195)$$

In questo caso esso é unico ed é dato da

$$f_a = \frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{C_A}{C_B} - \frac{G_+}{G_-} \right) \quad (196)$$

$$p_a = \frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{C_A}{G_+} + 1 \right) \quad (197)$$

Tale contratto sará anche ragionevole in media se e solo se vale la condizione (192) (cioé  $\langle G \rangle > C_B$ ).

**Dimostrazione.** Dal Teorema 16 sappiamo che, dato il rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , le coppie  $(f_a, p_a)$ , EM con capitali investiti  $(C_A, C_B)$ , sono quelle che soddisfano la condizione (177), cioé la (198)

$$\frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \quad (198)$$

Se esiste una coppia  $(f_a, p_a)$  indipendente da  $p$  e che soddisfa la (198), essa é necessariamente unica. Infatti, supponendo per assurdo che due coppie  $(f'_a, p'_a) \neq (f_a, p_a)$  soddisfino la (198), si dovrebbe avere

$$\rho f_a + \frac{p_a}{p} = \rho f'_a + \frac{p'_a}{p} \iff p\rho f_a + p_a = p\rho f'_a + p'_a$$

$$\iff p\rho(f_a - f'_a) = p'_a - p_a$$

e quindi, essendo  $(f'_a, p'_a) \neq (f_a, p_a)$ , dovrebbe essere  $f'_a \neq f_a$  e  $p'_a \neq p_a$ .  
Da ciò seguirebbe che

$$\frac{(1-p)G_-}{G_+} = \frac{p'_a - p_a}{f_a - f'_a}$$

che é impossibile poiché il membro sinistro dipende da  $p$  e il destro, per ipotesi, no. Mostriamo ora che una tale coppia esiste.

Se, nella (198),  $f_a$  e  $p_a$  non dipendono da  $p \in (p_0, 1)$ , allora prendendo il limite della (198) per  $p \rightarrow 1$ , si trova

$$\frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{G_+} + \frac{C_B}{C_A + C_B} = p_a \iff \frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{C_A}{G_+} + 1 \right) = p_a$$

che é la (197).

Se il membro destro della (197) corrisponde a un possibile premio, allora la franchigia che rende il contratto EM é univocamente definita dalla (177), cioè:

$$\begin{aligned} & \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{1}{p} \frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{C_A}{G_+} + 1 \right) \\ \iff & \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} - \frac{1}{p} \frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{C_A}{G_+} + 1 \right) = \rho f_a \\ \iff & \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \frac{(1-p)G_-}{pG_+} \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} \left( 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \frac{C_A}{G_+} \right) = \frac{(1-p)G_-}{pG_+} f_a \\ \iff & \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{pG_+}{(1-p)G_-} \frac{C_B}{pG_+} + \frac{pG_+}{(1-p)G_-} \frac{(1-p)G_-}{pG_+} \right) \\ & + \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{pG_+}{(1-p)G_-} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) - \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{pG_+}{(1-p)G_-} \frac{C_A}{pG_+} = f_a \\ \iff & \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{(1-p)G_-} + 1 \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{pG_+}{(1-p)G_-} \frac{p-1}{p} - \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{C_A}{(1-p)G_-} = f_a \\ \iff & \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{(1-p)G_-} + \frac{C_A}{C_A + C_B} \\ & - \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{G_+}{G_-} - \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{C_A}{(1-p)G_-} = f_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} - \frac{C_B}{C_A + C_B} \frac{G_+}{G_-} = f_a \\ &\Leftrightarrow \frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{C_A}{C_B} - \frac{G_+}{G_-} \right) = f_a \end{aligned}$$

che é la (196). Quindi anche  $f_a$  é indipendente da  $p$ .

Il valore di  $p_a$  dato da (197) é certamente  $> 0$  e soddisfa la condizione di coerenza economica (175) se e solo se

$$\begin{aligned} p_a > C_B/G_+ &\Leftrightarrow \frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{C_A}{G_+} + 1 \right) > \frac{C_B}{G_+} \Leftrightarrow \frac{C_A}{G_+} + 1 > \frac{C_A + C_B}{G_+} \\ &\Leftrightarrow 1 > \frac{C_B}{G_+} \end{aligned}$$

che é soddisfatta per ipotesi. Tale valore di  $p_a$  é  $< 1$  poiché  $C_B < G_+$  e

$$\frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{C_A}{G_+} + 1 \right) = \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{G_+} + \frac{C_B}{C_A + C_B} < \frac{C_A}{C_A + C_B} + \frac{C_B}{C_A + C_B} = 1$$

Il valore (196) corrisponde a una possibile franchigia se e solo se le due seguenti disuguaglianze sono soddisfatte:

$$\begin{aligned} f_a &:= \frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{C_A}{C_B} - \frac{G_+}{G_-} \right) \geq 0 \\ f_a + p_a G_+/G_- &< 1 \end{aligned}$$

La prima disuguaglianza equivale a

$$\frac{C_A}{C_B} \geq \frac{G_+}{G_-}$$

che é la (194). La seconda disuguaglianza equivale a

$$\begin{aligned} &f_a + p_a G_+/G_- < 1 \\ \Leftrightarrow &\frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{C_A}{C_B} - \frac{G_+}{G_-} \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} \left( \frac{C_A}{G_+} + 1 \right) G_+/G_- < 1 \\ \Leftrightarrow &\frac{C_A}{C_B} - \frac{G_+}{G_-} + \left( \frac{C_A}{G_+} + 1 \right) \frac{G_+}{G_-} < \frac{C_A + C_B}{C_B} \end{aligned}$$

$$\iff \frac{C_A}{C_B} - \frac{G_+}{G_-} + \frac{C_A G_+}{G_+ G_-} + \frac{G_+}{G_-} < 1 + \frac{C_A}{C_B} \iff \frac{C_A}{G_-} < 1$$

che é la (195). Infine, essendo equo in media per costruzione, il contratto dato da (196) e (197) é anche ragionevole in media se e solo se vale la condizione (192).

## 13 Opzioni

Un'opzione é un esempio di *titolo derivato*, ossia di un titolo i cui rendimenti dipendono in qualche modo dai rendimenti di altri titoli. Essa consiste in un contratto tra due parti, un *titolare (holder)* ed un *garante (writer)*.

Esistono diversi tipi di opzioni, che differiscono tra loro per la scelta della funzione guadagno. Nel seguito limiteremo la nostra analisi alle opzioni europee di *acquisto* (o di tipo "call").

Nel caso di un'opzione europea di tipo *call* il titolare, dietro corresponsione di un *premio*, detto *prezzo dell'opzione* (o *prime*), acquista il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare dal garante un attivo finanziario rischioso, *titolo sottostante (underlying risky asset o underlying security)*, ad una scadenza (*maturity*) e ad un prezzo (*esercizio o strike price*) pattuiti all'atto della stipula del contratto.

Il garante in cambio del premio si fa carico dell'obbligo di garantire al titolare la possibilitá di scelta.

Un'opzione europea di *vendita (put option)* differisce dalla *call option* per il fatto che il titolare acquista il diritto di vendere al garante il titolo sottostante alla scadenza e al prezzo pattuiti all'atto della stipula del contratto.

### 13.1 Modelli matematici di opzioni call europee

Intuitivamente un portafoglio, relativo a un insieme di merci  $\hat{S}$  (beni, azioni, ...) nell'orizzonte temporale  $T$ , é definito dalla storia dell'insieme  $\hat{S}$  nel periodo di tempo  $T$ .

Il modello matematico di tale storia é un processo stocastico.

**Definizione 23** *Un'opzione é definita da 5 oggetti*

$$\{(\Omega, P), T, (S_t)_{t \in T}, K, \pi\} \tag{199}$$

dove:

(i)  $(\Omega, P)$  é uno spazio di probabilità, detto spazio delle possibilità o degli stati del mondo

(ii)  $T \subseteq \mathbb{R}$  é un sotto-insieme limitato di  $\mathbb{R}$ , detto orizzonte temporale. L'estremo superiore  $\bar{t}$  di  $T$ , é detto scadenza dell'opzione.

(iii)  $\forall t \in T$ ,  $S_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$  é una variabile casuale a valori reali positivi detta valore del portafoglio sottostante al tempo  $t$ .

(iv)  $K \in \mathbb{R}_+$  é un numero positivo detto strike price.

(v)  $\pi \in \mathbb{R}_+$  é un numero positivo detto prezzo dell'opzione.

**Osservazione.** La definizione (23) va intesa nel senso che le 5 quantità in (199) caratterizzano l'opzione nel suo complesso, ma non nel senso che tali quantità sono note a priori.

In effetti per il writer solo l'informazione  $S_0$  é nota a priori e tutto il resto é da determinare.

L'holder si trova in una condizione analoga. Infatti, anche se spesso  $\{S_0, K, \pi\}$  sono stabiliti dal garante e quindi dati per l'holder, questi deve lo stesso valutarli autonomamente per determinare se sono giusti o no.

Le motivazioni di  $A$  nell'acquisto di una opzione possono essere:

(i) Diminuire la perdita potenziale (cioé il rischio) accettando una diminuzione del guadagno potenziale.

(ii) Aumentare il guadagno potenziale accettando una perdita certa.

(iii) Aumentare il guadagno potenziale e diminuire la perdita potenziale.

Il **problema fondamentale dell'asset pricing** consiste nel trovare un modo ragionevole di esprimere il prezzo  $\pi$  in funzione degli altri dati del problema.

Nel seguito studieremo questo problema nella situazione semplificata definita dalle seguenti ipotesi:

(i) lo spazio delle possibilità é binario

$$\Omega = \{+, -\} \tag{200}$$

(ii) l'orizzonte temporale consiste di 2 soli istanti:

$$T = \{0, 1\}$$

(iii) il prezzo del portafoglio sottostante all'istante 0 é fissato e noto:

$$S_0 = \text{costante} \in \mathbb{R}_+$$

Denoteremo

$$S_1 = (S_1^+, S_1^-) = (S_1(+), S_1(-))$$

la variabile casuale a due valori corrispondente al valore attualizzato del portafoglio sottostante l'opzione al tempo 1, e

$$p = p(+)$$

la probabilità dell'evento + che, al tempo 1, il prezzo dell'opzione sia salito. Per definizione quindi risulta:

$$S_1^- \leq S_0 \leq S_1^+ \quad (201)$$

In queste condizioni, in cui lo spazio  $\Omega$  è fissato dalla (200), una opzione è definita dai seguenti 6 numeri:

$$\{p, S_0, S_1^+, S_1^-, K, \pi\} \quad (202)$$

Nel modello matematico standard usato in letteratura la funzione guadagno di  $A$  (che per noi è l'holder) dopo l'acquisto dell'opzione è allora:

$$G_A = \max\{S_1 - K, 0\} - \pi \quad (203)$$

Similmente la funzione guadagno di  $B$  (che per noi è il writer) dopo l'acquisto dell'opzione da parte di  $A$  è

$$G_B = -\max\{S_1 - K, 0\} + \pi = -G_A \quad (204)$$

Osservare che

$$G_B = -G_A \quad (205)$$

e che, prima del contratto di opzione, la funzione guadagno di  $A$  nel caso in cui decidesse di comprare direttamente il titolo sottostante, sarebbe:

$$G_A^0(+)=S_1^+-S_0; \quad G_A^0(-)=-(S_0-S_1^-) \quad (206)$$

Mentre  $B$ , prima del contratto, non ha alcun guadagno relativo al rischio in considerazione. Per scrivere esplicitamente le funzioni guadagno dopo il contratto distinguiamo 2 casi:

Caso (I):  $S_1^- \leq K$

$$G_A(+)=S_1^+-K-\pi; \quad G_A(-)=-\pi \quad (207)$$

$$G_B(+)=-(S_1^+-K)+\pi; \quad G_B(-)=\pi \quad (208)$$

Caso (II):  $S_1^- > K$

$$G_A(+)=S_1^+-K-\pi; \quad G_A(-)=S_1^--K-\pi \quad (209)$$

$$G_B(+)=-(S_1^+-K)+\pi; \quad G_B(-)=-(S_1^--K)+\pi \quad (210)$$

Osservare che in entrambi i casi sussiste la relazione:

$$G_A=-G_B \quad (211)$$

ció significa che **il contratto di opzione é una scommessa simmetrica.**

**Osservazione.** La condizione (II) (cioé  $S_1^- > K$ ) di fatto non si riscontra nelle opzioni reali, ma in linea di principio non é necessariamente incoerente. Infatti se, oltre a tale condizione, sono anche soddisfatte le condizioni

$$S_1^- - K < \pi < S_1^+ - K$$

allora l'opzione equivale a una scommessa simmetrica in cui, se esce  $+$ ,  $B$  paga  $S_1^+ - K - \pi$  ad  $A$  e, se esce  $-$ ,  $B$  potrebbe guadagnare  $\pi - (S_1^- - K)$  se fosse stato cosí accorto da fissare  $\pi > (S_1^- - K)$ .

## 13.2 Le condizioni di coerenza economica

Nella definizione (202) di opzione (binaria) non abbiamo posto vincoli sui 6 numeri che in essa compaiono.

Nella presente sezione esamineremo alcune *condizioni di coerenza economica*

in assenza delle quali risulterebbe irragionevole, per almeno uno dei contraenti, stipulare il contratto di opzione.

Concentreremo la nostra attenzione su quelle condizioni che non dipendono dalla definizione di prezzo dell'opzione. Nel seguito mostreremo che la definizione di prezzo dell'opzione può introdurre ulteriori condizioni di coerenza (v. per esempio il Corollario (3)).

**Lemma 9** Indipendentemente dal criterio con cui è stato stabilito il prezzo, se la disuguaglianza

$$S_1^- < S_0 \quad (212)$$

non è soddisfatta allora il contratto di opzione è economicamente incoerente.

**Dimostrazione.** Se la disuguaglianza (212) non è soddisfatta allora, se  $S_1^- \geq S_0$ , acquistando direttamente il titolo soggiacente,  $A$  non potrebbe mai perdere e guadagnerebbe con probabilità positiva. Quindi non avrebbe motivo di acquistare l'opzione.

**Osservazione.** La condizione  $S_1^+ \leq S_0$  non conduce necessariamente a incoerenze per quanto riguarda il contratto di opzione. Infatti, dato che il contratto di opzione non dipende da  $S_0$ , anche se questa condizione è soddisfatta è possibile scegliere  $K$  e  $\pi$  in modo tale che il contratto tra  $A$  e  $B$  risulti una scommessa leale.

Il fatto che il contratto d'opzione non dipenda esplicitamente da  $S_0$  è **un segnale che tale contratto non è ben costruito**. Infatti un contratto ben costruito dovrebbe tener conto di tutti i dati disponibili e non solo di una parte di essi.

**Osservazione.** La seguente condizione rafforza una delle disuguaglianze (212).

**Lemma 10** Se la condizione (212) è soddisfatta, allora indipendentemente dal criterio con cui è stato stabilito il prezzo, se la disuguaglianza

$$\pi < S_0 - S_1^- \iff S_1^- + \pi < S_0 \quad (213)$$

non è soddisfatta, il contratto di opzione è economicamente incoerente.

**Dimostrazione.** Se la disuguaglianza (213) non è soddisfatta allora il prezzo pagato da  $A$  per comprarsi con l'opzione sarebbe superiore alla massima cifra che  $A$  potrebbe perdere se acquistasse direttamente il titolo soggiacente. Quindi  $A$  non avrebbe motivo di acquistare l'opzione.

**Osservazione.** Notare che questa condizione di coerenza è indipendente da  $S_1^+$ .

**Lemma 11** Indipendentemente da come é stato stabilito il prezzo, se le disuguaglianze

$$S_1^- < K + \pi < S_1^+ \quad (214)$$

non sono soddisfatte, il contratto é economicamente incoerente.

**Dimostrazione.** Se risultasse  $S_1^+ - K \leq \pi$ , allora la funzione guadagno di  $A$  risulterebbe sempre negativa e non nulla. Perció  $A$  non sottoscriverebbe l'opzione. Supponiamo soddisfatta questa disuguaglianza.

Se risultasse  $S_1^- - K \geq \pi$ , allora  $A$  eserciterebbe l'opzione sia nel caso  $+$  che nel caso  $-$ . Quindi la funzione guadagno di  $B$  sarebbe sempre negativa e strettamente negativa in almeno un punto. Perció  $B$  non sottoscriverebbe l'opzione.

**Osservazione.** Se  $S_1^- - K \leq 0$  (caso standard) allora  $S_1^- \leq K \leq K + \pi$  e la prima delle disuguaglianze (214) é automaticamente soddisfatta.

### 13.3 La scommessa soggiacente a un'opzione

Abbiamo visto che una opzione equivale a una scommessa simmetrica tra  $A$  e  $B$ . Nell'ipotesi

$$S_1^- \leq K$$

il rischio per  $A$ , associato all'opzione é definito da

$$\{S_1^+ - K - \pi, \pi, p\} \quad (215)$$

Quindi, se tutto ciò che si sa sull'avvenire o no degli eventi  $+$  e  $-$  é la loro probabilità (assenza di *insider trading*), é naturale convenire che un prezzo  $\pi$  dell'opzione é *accettabile, se rende tale scommessa leale*.

**Osservazione.** Se questa scelta sia davvero giusta o no dipende anche da come si attualizza al tempo di maturità il prezzo pagato da  $A$  al tempo iniziale. In genere si usa il tasso bancario, ma questo é un punto delicato che sarà discusso in seguito. In ogni caso, la differenza tra il prezzo attualizzato e quello non attualizzato é piccola per orizzonti temporali relativamente corti e prezzi non altissimi.

**Teorema 21** Per un'opzione (202) soddisfacente le condizioni di coerenza della sezione (13.2) le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) Il guadagno atteso sia di  $A$  che di  $B$  é positivo.

$$\langle G_A \rangle \quad , \quad \langle G_B \rangle \geq 0$$

(ii) La scommessa associata al rischio (215) é leale in media i.e.:

$$\langle G_A \rangle = \langle G_B \rangle = 0 \quad (216)$$

(iii) Il prezzo  $\pi$  é dato da:

$$\pi = p(S_1^+ - K) \quad (217)$$

**Osservazione.** La formula del prezzo leale (217) stabilisce una notevole differenza tra la logica del prezzo di una opzione e quella di una assicurazione, in particolare per i rischi d'uso. In questi ultimi infatti il premio leale in media é l'indice di rischio, cioè *la perdita pesata con la probabilità*. Nel caso dell'opzione invece il premio diventa *il guadagno lordo pesato con la sua probabilità*.

**Dimostrazione.**

$$\langle G_A \rangle \geq 0 \iff (S_1^+ - K - \pi)p \geq (1-p)\pi \iff (S_1^+ - K)p \geq \pi$$

D'altra parte

$$\langle G_B \rangle \geq 0 \iff \langle G_A \rangle \leq 0 \iff (S_1^+ - K)p \leq \pi$$

e in entrambi i casi l'equivalenza vale sia per la disuguaglianza stretta che per l'uguaglianza. Quindi il valore simultaneo delle due disuguaglianze equivale sia alla (216) che alla (217).

**Definizione 24** Il **prezzo leale in media** dell'opzione

$$\{(\{+, -\}, (p, 1-p)), S_0, S_1^\pm, K, \pi\}$$

é quello definito dalla (217).

**Osservazione.** Nella formula (217), del prezzo leale in media, non compaiono né  $S_0$  né  $S_1^-$ .

**Osservazione** Dopo un contratto con prezzo leale, qualunque cosa accada,  $A$  perde il costo dell'opzione, che é

$$\pi = p(S_1^+ - K)$$

Se accade l'evento  $+$ ,  $A$  guadagna

$$S_1^+ - (K + \pi) = S_1^+ - K - pS_1^+ + pK = (1-p)S_1^+ - (1-p)K = (1-p)(S_1^+ - K)$$

Se il portafoglio sottostante l'opzione soddisfa la condizione (di tipo investimento)

$$p > 1/2$$

ció significa che  $A$  perde con certezza una cifra piú alta di quella che guadagnerebbe se le cose andassero bene. In altre parole: se il portafoglio sottostante ha una probabilità di salire maggiore di quella del lancio di una moneta non truccata, il titolare sa a priori che il suo eventuale guadagno dall'opzione sarà inferiore al prezzo pagato (con certezza) per l'opzione stessa.

**Osservazione (1).** Il Teorema (21) va interpretato nel senso che, se  $A$  e  $B$  possono trovare un accordo sui seguenti punti:

- sul valore della probabilità  $p$  dell'evento  $+$
  - sul fatto che, se l'evento  $+$  accade, al tempo 1 il titolo varrà  $S_1^+$
  - sullo strike price  $K$
  - sulla scelta del criterio di scommessa leale per determinare il prezzo
- allora, dopo questo accordo,  $A$  e  $B$  possono determinare univocamente il prezzo  $\pi$  attraverso l'identità (217), cioè

$$\pi = p(S_1^+ - K)$$

**Corollario 3** Supponendo soddisfatta la (212), il prezzo leale in media (217) soddisfa le condizioni di coerenza (213) e (214) se e solo se vale una delle due coppie mutuamente esclusive di condizioni:

$$S_1^- \leq K < S_1^+ \tag{218}$$

$$p < \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - K} \tag{219}$$

Oppure

$$K < S_1^- < S_1^+ \tag{220}$$

$$p \in \left( \frac{S_1^- - K}{S_1^+ - K}, \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - K} \right) \tag{221}$$

$$2S_1^- < K + S_0 \tag{222}$$

**Dimostrazione.** Sia  $\pi = p(S_1^+ - K)$  il prezzo leale. Allora la condizione di coerenza (213) diventa:

$$S_1^- + \pi = S_1^- + p(S_1^+ - K) < S_0 \iff p < \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - K}$$

che é la (219). D'altra parte si ha

$$K + \pi = K + p(S_1^+ - K) = (1 - p)K + pS_1^+$$

quindi, per il prezzo leale, la seconda disuguaglianza nella condizione di coerenza (214) diventa:

$$(1 - p)K + pS_1^+ < S_1^+ \iff (1 - p)K < (1 - p)S_1^+ \iff K < S_1^+$$

che é la seconda disuguaglianza in (218). Infine la prima disuguaglianza nella condizione di coerenza (214) diventa:

$$\begin{aligned} S_1^- < K + \pi = K + p(S_1^+ - K) &= (1 - p)K + pS_1^+ \iff \\ \iff S_1^- - pS_1^+ < (1 - p)K &\iff p(S_1^- - S_1^+) < (1 - p)(K - S_1^-) \quad (223) \\ \iff p(S_1^+ - S_1^-) > (1 - p)(S_1^- - K) & \end{aligned}$$

Se  $S_1^- \leq K$ , questa é sempre soddisfatta dato che il membro sinistro é negativo e quello destro positivo. Perció, in questo caso, le condizioni di coerenza (213) e (214) sono equivalenti a (218) e (219). Viceversa, se  $S_1^- > K$ , allora la (223) equivale a

$$\begin{aligned} p(S_1^+ - S_1^-) > (1 - p)(S_1^- - K) &\iff \frac{S_1^+ - S_1^-}{S_1^- - K} > \frac{1}{p} - 1 \\ \iff \frac{S_1^+ - S_1^-}{S_1^- - K} + 1 = \frac{S_1^+ - S_1^- + S_1^- - K}{S_1^- - K} &= \frac{S_1^+ - K}{S_1^- - K} > \frac{1}{p} \\ \iff p < \frac{S_1^- - K}{S_1^+ - K} & \end{aligned}$$

e questo, combinato con la (219) produce l'intervallo (221). Quindi le condizioni di coerenza (213) e (214) diventano equivalenti a (220) e (222). La (222) é la condizione affinché l'intervallo (222) non risulti vuoto.

**Problema.** Le condizioni di coerenza sono

$$S_1^- + \pi < S_0 < S_1^+$$

$$S_1^- < K + \pi < S_1^+$$

Se fosse

$$S_0 < K + \pi$$

Si avrebbe un'unica catena

$$S_1^- + \pi < S_0 < K + \pi < S_1^+$$

Puó essere

$$S_0 > K + \pi?$$

Non sembrano esserci ragioni economiche che impediscano questa disuguaglianza. Essa significa che il writer ritiene che il portafoglio sottostante scenderá molto. Se fosse

$$S_1^- \geq K$$

allora la (223) sarebbe possibile se e solo se  $S_1^+ \leq K$  che é incompatibile con  $K + \pi < S_1^+$ .

### 13.4 Il postulato di Black e Scholes e l'ipotesi di non arbitraggio

Nella sezione precedente si é visto che, per fissare in modo univoco il prezzo che rende leale la scommessa sottostante a un'opzione, é necessario che  $A$  e  $B$  trovino un accordo sul valore della probabilità  $p$ .

Non esiste un modo univoco per trovare tale accordo. Quindi é necessario che i presupposti sottostanti a ciascuna scelta siano esplicitati in modo da poterli paragonare e scegliere in piena consapevolezza.

La proposta di Black e Scholes consiste nel convenire di calcolare la probabilità  $p$ , dell'evento  $+$ , postulando che, se  $A$  comprasse al tempo 0 il titolo stesso invece che l'opzione, allora il suo rischio al tempo 1, cioè  $\{S_1^+ - S_0, S_0 - S_1^-, p\}$  corrisponderebbe ad una scommessa leale. Come si é visto nella Sezione (6.1) questo postulato corrisponde all' **ipotesi di non arbitraggio**.

Dal Teorema (2) sappiamo che ciò equivale a postulare che

$$p = \frac{1}{1 + \frac{S_1^+ - S_0}{S_0 - S_1^-}} = \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-} \quad (224)$$

Dopo il contratto la funzione guadagno di  $A$  cambia come descritto dalle uguaglianze (207), ma la probabilità degli eventi  $+$  e  $-$  non cambia.

La giustificazione standard adottata per l'introduzione di questo postulato é

che, se ci fosse una situazione di arbitraggio, la gente la sfrutterebbe e questa rapidamente scomparirebbe. In questo senso il non arbitraggio, in economia può essere paragonato all'equilibrio termodinamico in fisica.

La validità empirica di questa ipotesi merita un'indagine approfondita poiché, come si è detto più volte, **un investitore accorto fa del suo meglio per evitare investimenti il cui guadagno atteso sia reputato nullo.**

La scelta di  $p$  data dalla (224) determina univocamente, attraverso la (217) il prezzo  $\pi$  dell'opzione.

**Teorema 22** Se  $p$  è data dalla (224) allora il prezzo  $\pi$  dell'opzione è dato da:

$$\pi = p(S_1^+ - K) = \frac{(S_0 - S_1^-)(S_1^+ - K)}{S_1^+ - S_1^-} \quad (225)$$

**Dimostrazione.** Sostituendo la (224) nella (217) si trova la (225).

**Definizione 25** Il prezzo dell'opzione  $(S_1^+, S_0, S_1^-, K)$  definito dalla (225) viene detto **prezzo di Black & Scholes** e denotato  $\pi_{BS}$ .

**Osservazione.** La proposta di Black & Scholes fornisce un criterio definito per dare un prezzo alle opzioni, ma è basata su un postulato la cui validità economica deve essere verificata caso per caso. È interessante quindi analizzare altri criteri che cerchino di limitare al massimo la componente di arbitrarietà nella definizione del prezzo di un'opzione.

**Lemma 12** Il prezzo leale è inferiore al prezzo di Black & Scholes se e solo se il rischio associato al portafoglio sottostante non è di tipo investimento. In altre parole:

$$\pi_L < \pi_{BS} \iff \langle G \rangle < 0$$

**Dimostrazione**

$$\pi_L < \pi_{BS} \iff p(S_1^+ - K) < \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-}(S_1^+ - K) \iff p < \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-}$$

D'altra parte è noto che il guadagno atteso  $\langle G \rangle$  è funzione strettamente crescente della probabilità. Quindi, dato che  $(S_0 - S_1^-)/(S_1^+ - S_1^-)$  è il valore della probabilità che rende il gioco leale, si ha che:

$$p < \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-} \iff \langle G \rangle < 0$$

**Osservazione.**

Il Lemma (12) significa che, nei casi in cui il postulato di Black & Scholes non é valido perché il titolare é stato abbastanza oculato da puntare su un portafoglio di tipo investimento, se il garante ha fissato il prezzo di una opzione sullo stesso portafoglio secondo la regola di Black & Scholes, allora sta richiedendo un prezzo strettamente inferiore a quello che dovrebbe richiedere, aumentando notevolmente il suo rischio.

**Corollario 4** Il prezzo di BS é coerente se e solo se lo strike price soddisfa la condizione:

$$K > S_1^- \quad (226)$$

**Dimostrazione.** Il prezzo di Black e Scholes é:

$$\pi_{BS} = \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-} (S_1^+ - K)$$

Quindi la condizione di coerenza economica (213) diventa

$$\frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-} (S_1^+ - K) < S_0 - S_1^- \iff \frac{S_1^+ - K}{S_1^+ - S_1^-} < 1 \iff S_1^+ - K < S_1^+ - S_1^- \iff K > S_1^-$$

Quindi, se  $\pi$  é prezzo di Black e Scholes, la (213) implica la (226). La prima delle condizioni di coerenza (214) é banalmente soddisfatta data la (226). La seconda equivale a

$$S_1^+ - K > \pi_{BS} = \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-} (S_1^+ - K) \iff 1 > \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-}$$

che é identicamente soddisfatta.

## 14 Inequivalenza tra opzioni e assicurazioni

Da quanto detto sopra segue che, intuitivamente, un'opzione call europea é assimilabile ad un'assicurazione con la quale l'assicurato (holder) limita a priori la sua perdita al prezzo d'esercizio (cioé abbassa il suo indice di rischio) e l'assicuratore (writer) incassa un premio per il rischio sopportato.

Per dare un significato preciso a questa idea intuitiva, occorre definire una relazione di equivalenza tra assicurazioni e opzioni.

La seguente definizione vale per contratti economici di tipo generale e sembra molto naturale.

**Definizione 26** Un contratto  $C_1$ , con funzioni guadagno  $G_A^{(1)}, G_B^{(1)}$ , é detto equivalente a un contratto  $C_2$  con funzioni guadagno  $G_A^{(2)}, G_B^{(2)}$  se le funzioni guadagno di  $A$  e di  $B$  relative ai due contratti coincidono, cioè:

$$G_A^{(1)} = G_A^{(2)} \quad ; \quad G_B^{(1)} = G_B^{(2)}$$

**Teorema 23** Nessun contratto assicurativo  $(p_a, f_a, C_B)$  su un rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  può essere equivalente ad una scommessa simmetrica relativa allo stesso rischio.

**Dimostrazione.** Supponiamo per assurdo che un contratto assicurativo  $(p_a, f_a)$ , relativo al rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , sia equivalente ad una scommessa simmetrica relativa allo stesso rischio e denotiamo  $G_A^{(ass)}, G_B^{(ass)}$  (risp.  $G_A^{(ss)}, G_B^{(ss)}$ ) le funzioni guadagno di  $A$  e  $B$  dopo il contratto di assicurazione (risp. di scommessa simmetrica). Allora, secondo la Definizione (26) si deve avere

$$G_A^{(ass)} = G_A^{(ss)} \quad ; \quad G_B^{(ass)} = G_B^{(ss)}$$

D'altra parte, in una scommessa simmetrica

$$G_A^{(ss)} = -G_B^{(ss)}$$

Di conseguenza:

$$G_A^{(ass)} = G_A^{(ss)} = -G_B^{(ss)} = -G_B^{(ass)}$$

Ricordando le espressioni (99), (100), (101), (102) delle funzioni guadagno dell'assicurato e dell'assicuratore dopo un contratto assicurativo, ciò implica che

$$\begin{aligned} G_A(-) &= -f_a G_- - p_a G_+ = -G_B(-) & (227) \\ &= -(-(1-f_a)G_- + p_a G_+ - C_B) = (1-f_a)G_- - p_a G_+ + C_B \\ &\iff 0 = G_- + C_B \end{aligned}$$

che é impossibile poiché  $G_-$  e  $C_B$  sono strettamente positivi.

Concludiamo che nessun contratto assicurativo relativo al rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  può essere equivalente ad una scommessa simmetrica relativa allo stesso rischio, che é la tesi.

**Osservazione.**

Osserviamo per completezza che anche l'uguaglianza  $G_A^{(ass)}(+)= -G_B^{(ass)}(+)$  conduce ad una contraddizione. Infatti si ha

$$\begin{aligned} G_A^{(ass)}(+)&= (1-p_a)G_+ = -G_B^{(ass)}(+)= -p_aG_+ + C_B \\ \iff p_aG_+ - G_+ &= p_aG_+ - C_B \iff G_+ = C_B \end{aligned}$$

che contraddice la condizione di coerenza economica (108).

**Corollario 5** Nessun contratto di opzione, può essere equivalente a un contratto assicurativo.

**Dimostrazione** Dal Teorema (23) segue che nessun contratto assicurativo può essere equivalente ad una scommessa simmetrica. Poiché un contratto di opzione è una particolare scommessa simmetrica, esso non può essere equivalente ad alcun contratto assicurativo.

## 15 Conclusioni

Si è visto che:

- Lo schema standard, attualmente utilizzato nella impostazione dei contratti di opzione (call Europee) è quello di una **scommessa simmetrica**, ovvero un **gioco a somma zero**, un gioco di puro azzardo.
- L'idea intuitiva di **copertura di un rischio economico** si traduce nello schema di contratto assicurativo standard.
- Nessuna scommessa simmetrica può essere equivalente a contratto assicurativo. In particolare, contrariamente alla intuizione comune, nessun contratto di opzione può essere considerato come una copertura di un rischio di investimento.

Quindi l'**unico modo per trasformare le opzioni da gioco d'azzardo, come sono ora, a strumento finanziario finalizzato alla limitazione delle perdite** è quello di cambiare la struttura attualmente utilizzata dei contratti di opzione adottando invece anche per essi lo schema generalizzato

dei contratti assicurativi discusso nel presente lavoro.

## 16 Problemi del 16-05-2018

**Problema 8** *Dato il rischio*

$$\{G_+, G_-, p\} = \{250.000E, 400.000E, 85\%\}$$

*Determinare per quali valori del parametro  $C_B$  il contratto assicurativo*

$$(f_a, p_a) = (0,4, 0,65) \quad (228)$$

*é ragionevole in media.*

**Problema 9** *Per quali valori del parametro  $C_B$  e del capitale  $C_A$  investito da A il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é anche equo in media?*

**Problema 10** (i) *Per quali valori del parametro  $C_B$  e del capitale  $C_A$  investito da A il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é anche equo in rischio?*

(ii) *Per quali valori del parametro  $C_B$  e del capitale  $C_A$  investito da A il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é anche equo sia in media che in rischio?*

## 17 Problemi su opzioni e assicurazioni

**Problema 11** Consideriamo un portafoglio con i seguenti parametri:

$$\{S_0 = 900 \text{ KE}, S_1^+ = 2.000 \text{ KE}, S_1^- = 100 \text{ KE}\} \quad (229)$$

Determinare per quali valori dei parametri liberi (capitali investiti, costi, probabilità di successo) é possibile stipulare un contratto assicurativo equo in rischio su tale portafoglio.

**Soluzione.**

Il rischio associato al portafoglio  $S \equiv \{S_0, S_1^+, S_1^-, p\}$  é

$$\{G_+, G_-, p\} := \{S_1^+ - S_0, S_0 - S_1^-, p\} = \{1.100, 800, p\} \quad (230)$$

Dato che in questo problema la franchigia é assegnata, dobbiamo applicare il Teorema 14 a questo rischio.

Sappiamo da questo teorema che tutte e sole le franchigie  $f_a$  per cui esiste un premio  $p_a$  tale che la coppia  $(f_a, p_a)$  definisca un contratto equo in rischio sono quelle che soddisfano la condizione:

$$f_a \in \left( \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1, \frac{G_- + C_B^2/C_A}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} \right] \cap [0, 1) \quad (231)$$

Nel nostro caso

$$G_+ = 1.100 > G_- = 800$$

e l'intervallo (231) diventa

$$f_a \in \left( \frac{800 + C_B}{1100} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1, \frac{800 + C_B^2/C_A}{1100} \frac{C_A}{C_A + C_B} \right] \cap [0, 1) \quad (232)$$

Dal Teorema 14 sappiamo che tale intervallo in non é vuoto.

Quindi richiedere  $f_a = 0$  pone la prima condizione necessaria:

$$\begin{aligned} \frac{G_- + C_B}{G_+} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1 &= \frac{800 + C_B}{1100} \frac{C_A}{C_A + C_B} - 1 \leq 0 \\ \iff \frac{800 + C_B}{1100} \frac{C_A}{C_A + C_B} &\leq 1 \iff (800 + C_B)C_A \leq 1100(C_A + C_B) \\ \iff 800C_A + C_B C_A &\leq 1100C_A + 1100C_B \iff C_B C_A \leq 300C_A + 1100C_B \\ \iff C_B(C_A - 1100) &\leq 300C_A \iff C_B \leq \frac{300C_A}{C_A - 1100} = \frac{300}{1 - 1100/C_A} \\ \iff C_B &\leq \frac{300}{1 - 1100/C_A} \end{aligned} \quad (233)$$

Poiché  $C_B > 0$ , una tale condizione é possibile se e solo se

$$1 - 1100/C_A > 0 \iff 1 > 1100/C_A \iff C_A > 1100 \quad (234)$$

D'altra parte, dal Teorema 13 sappiamo che, per una coppia equa in rischio, la condizione di coerenza economica  $f_a + p_a G_+/G_- < 1$  equivale a

$$C_A < G_- (= 800 \text{ nel nostro caso}) \quad (235)$$

Dato che la (235) contraddice la (235), concludiamo che:  
per nessun valore dei parametri liberi é possibile stipulare un contratto assicurativo equo in rischio sul portafoglio in questione

**Problema 12** Dato il portafoglio (229), cioé:

$$\{S_0 = 900 \text{ KE} , S_1^+ = 2.000 \text{ KE} , S_1^- = 100 \text{ KE}\} \quad (236)$$

determinare:

- (i) un intervallo di probabilitá di crescita del portafoglio  $S \equiv \{S_0, S_1^+, S_1^-\}$
- (ii) un intervallo di premio  $p_a$
- (iii) uno strike price  $K$

tali che, in un contratto assicurativo ragionevole in media e a franchigia nulla per il rischio associato al portafoglio  $S \equiv \{S_0, S_1^+, S_1^-\}$ , il premio pagato per il contratto assicurativo risulti uguale al prezzo ottenuto con la prescrizione di Black e Scholes.

Se questa condizione fosse soddisfatta, se voi foste il titolare, scegliereste di fare il contratto assicurativo o l'opzione?

Stessa domanda se voi foste il garante.

**Soluzione.**

Si é visto che il rischio associato al portafoglio  $S \equiv \{S_0, S_1^+, S_1^-, p\}$  é dato dalla , cio'e

$$\{G_+, G_-, p\} := \{S_1^+ - S_0, S_0 - S_1^-, p\} = \{1.100, 800, p\} \quad (237)$$

Dato che in questo problema la franchigia é assegnata, dobbiamo applicare il Teorema 12 a questo rischio.

Da questo Teorema sappiamo che, dato un rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  e un costo  $C_B$  per l'assicuratore, condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di franchigie  $f_a$  per le quali esista una coppia  $(f_a, p_a)$  ragionevole in media é che valga la condizione

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \iff \frac{C_B}{G_+} < p(1 - \rho) \quad (238)$$

In particolare dev'essere  $\rho \in (0, 1)$ . Con i dati del problema

$$\rho = \frac{(1 - p)G_-}{pG_+} = \frac{(1 - p)8}{p11} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-p)8}{p11} < 1 \Leftrightarrow 8 - p8 < p11 \Leftrightarrow 8 < p19$$

Quindi una prima condizione sulla probabilità é che

$$p > \frac{8}{19} \sim 0,4210 \quad (239)$$

La condizione necessaria diventa

$$\frac{C_B}{p1100} + \frac{(1-p)800}{p1100} < 1 \Leftrightarrow C_B + (1-p)800 < p1100 \Leftrightarrow C_B < p1100 - (1-p)800$$

$$C_B < p1900 - 800 \quad (240)$$

che fornisce una stima superiore di  $C_B$  in funzione della probabilità  $p$ .

Da (239) segue che

$$p1900 - 800 > \frac{8}{19}1900 - 800 = 0$$

quindi il membro destro é positivo. Pertanto

$$C_B \in (0, p1900 - 800) \quad ; \quad p \in \left( \frac{8}{19}, 1 \right) \sim (0,421, 1) \quad (241)$$

Il Teorema 12 afferma che, se la condizione necessaria (239) é soddisfatta, allora ogni franchigia  $f_a$  nell'intervallo

$$\left( 1 - \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-}, 1 \right] \cap [0, 1) \quad (242)$$

ha la proprietá che per ogni premio  $p_a$  nell'intervallo

$$\left( p\rho(1 - f_a) + \frac{C_B}{G_+}, p(1 - \rho f_a) \right] \quad (243)$$

la coppia  $(f_a, p_a)$  é ragionevole in media. Inoltre nessuno dei due intervalli é vuoto. La condizione (242) é compatibile con la scelta  $f_a = 0$  se e solo se

$$1 - \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{pG_+ - C_B}{(1-p)G_-} \Leftrightarrow (1-p)G_- \leq pG_+ - C_B$$

$$\Leftrightarrow C_B \leq pG_+ - (1-p)G_- = p1100 - (1-p)800$$

$$\iff C_B \leq p1100 - 800 + p800 = p1900 - 800$$

e questa é identicamente soddisfatta a causa della (241).

Quindi, con i dati del problema, l'intervallo di franchigia (242) diventa

$$[0, 1) \quad (244)$$

mentre l'intervallo di premio (243) diventa

$$\left( p\rho + \frac{C_B}{G_+}, p \right] = \left( (1-p)\frac{8}{11} + \frac{C_B}{11}, p \right] \quad (245)$$

e sappiamo dalla teoria che questo intervallo non é vuoto (lo si può anche verificare direttamente).

Per verificare le condizioni di coerenza economica, essendo la franchigia data, dobbiamo applicare le condizioni della Proposizione 6 che, con i dati del problema, diventano

$$C_B < G_- = 800 \quad (246)$$

$f_a = 0$  e, dato che  $G_+ > G_-$ :

$$p_a \in \left( \frac{C_B}{G_+}, (1-f_a)\frac{G_-}{G_+} \right) = \left( \frac{C_B}{1100}, \frac{8}{11} \right) \sim \left( \frac{C_B}{1100}, 0,7272 \right) \quad (247)$$

e sappiamo dalla teoria che l'intervallo non é vuoto (nel nostro caso ciò segue subito da (246) e (247)).

Riassumendo: per  $p$  e  $C_B$  negli intervalli (241), per ogni  $p_a$  nell'intervallo (247), il contratto assicurativo  $(0, p_a)$  é ragionevole in media.

### Paragone con una opzione di Black e Scholes

Vogliamo ora determinare uno strike price  $K$  per l'opzione associata al portafoglio (236) in modo tale che il prezzo di Black e Scholes dell'opzione risulti uguale al premio totale del contratto assicurativo. Ciò significa che  $K$  deve soddisfare la condizione

$$\pi_{BS} = p_{BS}(S_1^+ - K) = p_a G_+ \iff K = S_1^+ - \frac{p_a G_+}{p_{BS}} \quad (248)$$

Nel nostro caso, ricordando la (229), cioè

$$\{S_0 = 900 \text{ KE}, S_1^+ = 2.000 \text{ KE}, S_1^- = 100 \text{ KE}\}$$

si ha

$$p_{BS} = \frac{S_0 - S_1^-}{S_1^+ - S_1^-} = \frac{800}{1900} = \frac{8}{19} \sim 0,4210$$

e l'espressione (248) di  $K$  diventa

$$K = S_1^+ - \frac{p_a G_+}{p_{BS}} = 2000 - \frac{1900}{800} p_a 800 = 2000 - p_a 1900 \quad (249)$$

La condizione  $K > 0$  equivale a

$$2000 > p_a 1900 \iff \frac{2000}{1900} \sim 1,0563 > p_a$$

che é identicamente soddisfatta. Dal Corollario 4 sappiamo che il prezzo di BS é coerente se e solo se lo strike price soddisfa la condizione:

$$K > S_1^- \quad (250)$$

che con i dati del problema e la (249) diventa

$$K = 2000 - p_a 1900 > 100 \iff 1900 > p_a 1900$$

e anche questa é sempre soddisfatta poiché  $p_a < 1$ . In conclusione: per ogni  $p_a$  nell'intervallo (247), il premio totale del contratto assicurativo  $(0, p_a)$  é uguale al prezzo di Black e Scholes dell'opzione associata al portafoglio (236) con strike price dato dalla (249).

Con un tale contratto d'opzione, se il portafoglio sale, il titolare  $A$  paga

$$K + \pi_{BS} = 2000 - p_a 1900 + p_a 1100 = 2000 - p_a 800$$

con un guadagno di

$$S_1^+ - (K + \pi_{BS}) = p_a 800$$

che é uguale alla perdita di  $B$  se il portafoglio sale. Comprando le azioni e assicurandosi contro il ribasso, se il portafoglio sale, il costo totale per l'assicurato  $A$  é

$$S_0 + p_a 1100 = 900 + p_a 1100$$

con un guadagno di

$$S_1^+ - (S_0 + p_a 1100) = (1 - p_a) 1100$$

Osserviamo che

$$p_a 800 < (1 - p_a) 1100 = 1100 - p_a 1100 \iff p_a (800 + 1100) = p_a 1900 < 1100 \\ \iff p_a < \frac{1100}{1900} \sim 0,5789$$

e che l'estremo superiore per  $p_a$  é molto alto dato che corrisponde a un premio pari a piú della metà del guadagno, che certamente non é una situazione molto comune.

Ciò implica che, in situazioni realistiche, il guadagno di  $A$  in caso di evento positivo, risulterà molto minore nel contratto di opzione che in quello di assicurazione.

Con il contratto assicurativo, se il valore del portafoglio scende, dato che l'assicurazione é senza franchigia,  $A$  perde la stessa cifra in entrambi i contratti, cioè  $\pi_{BS} = p_a 1100$ .

Concludiamo che, in situazioni realistiche, il contratto di assicurazione é globalmente migliore per  $A$  rispetto a quello di opzione.

Consideriamo ora il punto di vista dell'assicuratore o del garante.

Con il contratto assicurativo, se il portafoglio sale, l'assicuratore  $B$  guadagna  $p_a 1100 - C_B$  e se scende, perde  $800 + C_B - p_a 1100$ .

Con il contratto d'opzione, se il portafoglio sale, il garante perde esattamente quello che il titolare guadagna, cioè  $p_a 800$ . Se scende, il garante  $B$  guadagna  $\pi_{BS} = p_a 1100$ .

Comparando le perdite di  $B$  in caso di evento negativo per lui si trova che

$$p_a 800 > 800 + C_B - p_a 1100 \iff p_a 1900 > 800 + C_B$$

Per valori di  $p_a$  abbastanza vicini al massimo, diciamo  $p_a = 0,57$ , si trova

$$0,57 \times 1900 = 1083 > 800 + C_B \iff 283 > C_B$$

che identicamente soddisfatta qualunque sia il valore di  $C_B$ .

Dato che siamo in unità di KE e che praticamente con certezza i costi  $C_B$  dell'assicuratore sono minori di 283 KE, con  $p_a = 0,57$ , la perdita di  $B$  nel contratto d'opzione é maggiore di quella nel contratto di assicurazione.

Quindi il contratto di assicurazione é piú conveniente del contratto di opzione sia per  $A$  che per  $B$ .

### **Esercizio**

Includere, con esempi numerici, il caso di franchigia non nulla.

## 18 Problemi risolti

**Problema 13** *Dato il rischio*

$$\{G_+, G_-, p\} = \{250.000E, 400.000E, 85\%\}$$

*Determinare per quali valori del parametro  $C_B$  il contratto assicurativo*

$$(f_a, p_a) = (0,4, 0,65) \quad (251)$$

*é ragionevole in media.*

**Soluzione.** La condizione di coerenza

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} < 1 \quad (252)$$

non dipende da  $C_B$  ed é necessaria per l'esistenza di un contratto assicurativo ragionevole in media. Quindi conviene verificarla per prima. Infatti, se essa non é soddisfatta é inutile andare oltre. In unitá di  $KE$  si trova:

$$\begin{aligned} p_a G_+ &= 0,65 \cdot 250 = \frac{65}{100} 250 = \frac{65}{2} 5 = \frac{325}{2} \\ p_a \frac{G_+}{G_-} &= \frac{325}{2G_-} = \frac{325}{2 \cdot 400} = \frac{325}{800} = 0,4062 \end{aligned} \quad (253)$$

Pertanto

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = 0,4 + 0,4062 = 0,8062 < 1$$

Quindi la condizione di coerenza (252) é soddisfatta.

Anche la condizione necessaria per la esistenza di coppie ragionevoli in media

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \quad (254)$$

non dipende dal contratto  $(p_a, f_a)$ . Nel nostro caso:

$$\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{100}{85} - 1\right) \frac{400.000}{250.000} = \left(\frac{3}{17}\right) \frac{40}{25} = \frac{120}{425} \sim 0,282 < 1 \\ pG_+ &= \frac{85}{100} \times 250.000 = 85 \times 2500 = 212.500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 &\iff \frac{C_B}{212.500} + 0,282 < 1 \\
\iff \frac{C_B}{212.500} < 1 - 0,282 &\iff \frac{C_B}{212.500} < 0,718 \\
C_B < 0,718 \times 212.500 &= 152.575 \text{ E}
\end{aligned}$$

Quindi la condizione necessaria (254) é soddisfatta per tutti i  $C_B$  nell'intervallo

$$C_B \in (0, 152.575) \quad (255)$$

Fissato un  $C_B$  in tale intervallo, le coppie RM sono caratterizzate dalle disuguaglianze:

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) < p_a \leq 1 - \rho(f_a + p_a G_+/G_-) \quad (256)$$

Tra queste, quelle che soddisfano la condizione di ammissibilitá, definiscono un contratto. Nel nostro caso

$$\frac{G_+}{G_-} = \frac{250.000}{400.000} = \frac{25}{40} = 0,625 \quad (257)$$

e si é visto nella (253) che  $p_a G_+/G_- = 0,4062$ . Quindi la prima disuguaglianza nella (256) é

$$\begin{aligned}
\frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) < p_a &\iff \frac{C_B}{212.500} + 0,282(1 - (0,4 + 0,4062)) < 0,65 \\
\iff \frac{C_B}{212.500} + 0,282(1 - 0,8062) &= \frac{C_B}{212.500} + 0,282(0,1938) \sim \frac{C_B}{212.500} + 0,0546 \\
\iff \frac{C_B}{212.500} < 0,65 - 0,0546 = 0,5953 &\iff C_B < 0,5953 \times 212.500 = 126.511,535
\end{aligned}$$

che restringe i  $C_B$  all'intervallo

$$C_B \in (0, 126.511,535) \quad (258)$$

La seconda disuguaglianza nella (256) é

$$0,65 \leq 1 - 0,282(0,4 + 0,4062) \iff 0,65 \leq 1 - 0,0546 \iff 0,65 \leq 0,9454$$

che é automaticamente soddisfatta e non dipende da  $C_B$ .  
 Abbiamo già visto che la condizione di coerenza economica:

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} < 1$$

é soddisfatta. Resta quindi da trovare quali  $C_B$  soddisfano la condizione di coerenza economica:

$$C_B < p_a G_+ \iff C_B < \frac{325}{2} = 162,5 \quad (259)$$

Ma dalla (258) sappiamo che, in unità di  $E$ ,  $C_B \in (0, 126.511, 535)$ . Dato che

$$126.511, 535 < 162.500$$

concludiamo che tutti i  $C_B$  nell'intervallo (258) soddisfano la condizione di coerenza economica (259).

Quindi per tutti questi  $C_B$  il contratto é ragionevole in media.

**Problema 14** *Per quali valori del parametro  $C_B$  e del capitale  $C_A$  investito da  $A$  il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é anche equo in media?*

**Soluzione** . Dal Problema 13 sappiamo che per tutti i  $C_B$  nell'intervallo (258) e qualunque sia  $C_A$  (che non compare in questo problema) il contratto (251) é ragionevole in media. Dal Teorema 16 sappiamo che, dato il rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  le coppie  $(f_a, p_a)$ , EM con capitali investiti  $(C_A, C_B)$ , sono quelle che soddisfano la condizione:

$$\frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \quad (260)$$

Questa, nel caso in esame diventa

$$\begin{aligned} & \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{\frac{85}{100} 250.000} + 0,282 \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = 0,282 \cdot 0,4 + \frac{100 \cdot 0,65}{85} \\ \iff & \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{85 \times 2500} + \frac{C_A}{C_A + C_B} 0,282 + \frac{C_B}{C_A + C_B} = 0,1128 + 0,7647 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} \frac{C_B}{212.500} + \frac{C_A}{C_A + C_B} 0,282 + \frac{C_B}{C_A + C_B} = 0,8775 \\
&\Leftrightarrow C_A \frac{C_B}{212.500} + C_A 0,282 + C_B = 0,8775 C_A + 0,8775 C_B \\
&\Leftrightarrow C_B \left( \frac{C_A}{212.500} + (1 - 0,8775) \right) = C_A (0,8775 - 0,282) \\
&\Leftrightarrow C_B \left( \frac{C_A}{212.500} + 0,1225 \right) = C_A 0,5955 \\
&\Leftrightarrow C_B = \frac{0,5955 C_A}{\frac{C_A}{212.500} + 0,1225} \tag{261}
\end{aligned}$$

Questa condizione é compatibile con la (258), cioè  $C_B \in (0, 126.511, 535)$  se e solo se

$$\begin{aligned}
&C_B = \frac{0,5955 C_A}{\frac{C_A}{212.500} + 0,1225} < 126.511, 535 \\
&\Leftrightarrow 0,5955 C_A < C_A \frac{126511, 535}{212500} + 126511, 535 \times 0,1225 \\
&\quad = C_A 0,5953 + 15497, 6630 \\
&\Leftrightarrow C_A (0,5955 - 0,5953) = 0,0002 C_A < 15497, 6630 \\
&\Leftrightarrow C_A < \frac{15497, 6630}{0,0002} = 77.348.315 \tag{262}
\end{aligned}$$

ció il capitale investito da  $A$  deve essere minore di 77.348.315  $E$ .

Se questa condizione é soddisfatta concludiamo che il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é sia ragionevole che equo in media se e solo se  $C_B$  é dato dalla (261).

**Problema 15** (i) Per quali valori del parametro  $C_B$  e del capitale  $C_A$  investito da  $A$  il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é oltre che ragionevole ed equo in media anche equo in rischio?

(ii) Esistono valori del parametro  $C_B$  e del capitale  $C_A$  investito da  $A$  tali che il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é, oltre che ragionevole ed equo in media, anche equo in rischio?

**Soluzione** . Dal Lemma (??) sappiamo che, dato il rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , una coppia  $(f_a, p_a) \in [0, 1) \times (0, 1)$  é equa in rischio se e solo se

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} \quad (263)$$

Nel caso in esame  $(f_a, p_a) = (0,4, 0,65)$ ,  $G_- = 400.000E$  e, nella (253) si é già calcolato che  $p_a G_+/G_- = 0,4062$ . Quindi, in unità di  $E$ , la (263) diventa:

$$\begin{aligned} 0,4 + 0,4062 &= 0,8062 = \left(1 + \frac{C_B}{400.000}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} \\ \Leftrightarrow 0,8062 &= \frac{C_A}{C_A + C_B} + \frac{C_B}{400.000} \frac{C_A}{C_A + C_B} \\ \Leftrightarrow 0,8062C_A + 0,8062C_B &= C_A + \frac{C_A}{400.000}C_B \\ \Leftrightarrow (0,8062 - 1)C_A &= -0,138C_A = \left(\frac{C_A}{400.000} - 0,8062\right) C_B \\ \Leftrightarrow \frac{0,138C_A}{0,8062 - \frac{C_A}{400.000}} &= C_B \end{aligned} \quad (264)$$

Questa disuguaglianza é possibile se e solo se

$$\begin{aligned} 0 < 0,8062 - \frac{C_A}{400.000} &\Leftrightarrow \frac{C_A}{400.000} < 0,8062 \\ \Leftrightarrow C_A < 0,8062 \times 400.000 &= 322.480 \end{aligned} \quad (265)$$

Ciò restringe il valore di  $C_A$  da  $77.348.315 E$  che é il valore dato dalla (262) a  $322.480$ . Se la condizione (265) é soddisfatta, il valore di  $C_B$  dato dalla (264) é compatibile con la (258), cioè

$$\begin{aligned} C_B &= \frac{0,138C_A}{0,8062 - \frac{C_A}{400.000}} < 126511,535 \\ \Leftrightarrow 0,138C_A &< 126511,535 \times 0,8062 - C_A \frac{126.511,535}{400.000} \\ &= 126511,5995 - C_A 0,3162 \\ \Leftrightarrow C_A(0,138 + 0,3162) &= C_A 0,4542 < 126511,5995 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow C_A(0,138 + 0,3162) = C_A < \frac{126511,5995}{0,4542} = 278.537,2071$$

Questa condizione restringe ulteriormente il capitale  $C_A$  investito da  $A$  da 322.480 dato dalla (265) a

$$C_A < 278.537,2071 \quad (266)$$

Se questa é soddisfatta, il contratto assicurativo studiato nel Problema 13 é oltre che ragionevole in media anche equo in rischio se e solo se  $C_B$  é dato dalla (264). Ciò risponde alla domanda (i).

Per rispondere alla domanda (ii) ricordiamo che per l'equità in rischio la condizione (266) é necessaria. Se questa é soddisfatta, la condizione (262) dle Problema 14 é certamente soddisfatta poiché  $278.537,2071 < 77.348.315$ . D'altra parte, la condizione di equità in rischio (264) fornisce per  $C_B$  il valore

$$\frac{0,138C_A}{0,8062 - \frac{C_A}{400.000}} = C_B$$

mentre la condizione di equità in media (261) fornisce per  $C_B$  il valore

$$C_B = \frac{0,5955}{\frac{C_A}{212.500} + 0,1225}$$

Le due sono compatibili se e solo se

$$\frac{0,138C_A}{0,8062 - \frac{C_A}{400.000}} = \frac{0,5955}{\frac{C_A}{212.500} + 0,1225}$$

$$\Leftrightarrow 0,138C_A \left( \frac{C_A}{212.500} + 0,1225 \right) = 0,5955 \left( 0,8062 - \frac{C_A}{400.000} \right)$$

$$\Leftrightarrow C_A^2 \frac{0,138}{212500} + 0,138 \times 0,1225 C_A = 0,5955 \times 0,8062 - C_A \frac{0,5955}{400.000}$$

$$\Leftrightarrow C_A^2 6,4942 + 1,1265 C_A = 0,48 - C_A 0,000001$$

$$\Leftrightarrow C_A^2 6,4942 + (0,000001 + 1,1265) C_A - 0,48 = 0$$

$$\Leftrightarrow C_A^2 6,4942 + 1,1265 C_A - 0,48 = 0$$

Dove l'ultima equivalenza é dovuta al fatto che stiamo approssimando tutto alla quarta cifra decimale. Quest'ultima é una equazione di 2-o grado che si risolve completando il quadrato:

$$\begin{aligned}
C_A^2 6,4942 + 1,1265C_A - 0,48 = 0 &\iff C_A^2 + \frac{1,1265}{6,4942}C_A - \frac{0,48}{6,4942} = 0 \\
&\iff C_A^2 + 0,1734C_A - 0,0739 = 0 \\
&\iff (C_A + 0,0867)^2 - 0,0075 - 0,0739 = 0 \\
&\iff (C_A + 0,0867)^2 = 0,0814 \\
&\iff C_A = 0,0867 \pm \sqrt{0,0814} = 0,0867 \pm 0,2853
\end{aligned}$$

Dato che dev'essere  $C_A > 0$ , si ottiene

$$C_A = 0,0867 + 0,2853 = 0,372 \quad (267)$$

Il corrispondente valore di  $C_B$  si ottiene inserendo nella (261) il valore di  $C_A$  dato dalla (267). Quindi

$$\begin{aligned}
C_B &= \frac{0,5955C_A}{\frac{C_A}{212,500} + 0,1225} = \frac{0,5955 \times 0,372}{\frac{0,372}{212,500} + 0,1225} = \frac{0,2215}{1,7505 + 0,1225} \\
&= \frac{0,2215}{1,8725} = 0,1182 < C_A
\end{aligned} \quad (268)$$

Questo valore di  $C_A$  soddisfa la (261) e quindi a maggior ragione la (265) e anche la condizione  $C_B < C_A$ .

Quindi dal punto di vista matematico, nelle condizioni del Problema, un contratto assicurativo che soddisfi tutti e tre i criteri, di ragionevolezza ed equitá in media ed equitá in rischio, esiste per l'unico valore di  $C_A$  dato dalla (266). Osserviamo tuttavia che questo valore di  $C_A$  é troppo piccolo per essere economicamente significativo (meno di 4  $E$ ).

Pertanto dal punto di vista economico possiamo concludere che, mentre esistono sia contratti ragionevoli ed equi in media che contratti ragionevoli ed equi in rischio non esistono contratti che soddisfano simultaneamente tutti e tre i criteri.

**Problema 16** Dato il rischio:

$$\{G_+, G_-, p\} = \{1,7ME, 4,1ME, 70\%\}$$

per quali  $f_a$  esiste un premio  $p_a$  tale che il contratto assicurativo  $(p_a, f_a)$  sia ragionevole in media?

**Soluzione** . L'indice del rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  é:

$$\rho = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{G_-}{G_+} = \left(\frac{10}{7} - 1\right) \frac{4,1}{1,7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{41}{17} = \frac{123}{119} \sim (1,03) > 1$$

Quindi tale rischio non può soddisfare la condizione necessaria per la ragionevolezza in media della coppia  $(p_a, f_a)$

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \quad (269)$$

Concludiamo che, tale rischio non esistono contratti assicurativi ragionevoli in media.

**Problema 17** Nelle ipotesi del Problema (269), supponendo inoltre che

$$C_B = 50.000 = 0,05 ME \quad ; \quad C_A = G_- = 4,1ME \quad (270)$$

**Domanda (1).** Esistono contratti  $(p_a, f_a)$  equi in rischio?

**Domanda (2).** Come variereste i parametri (273) per ottenere una conclusione opposta a quella della domanda precedente?

**Domanda (1): Soluzione.**

Sappiamo che una coppia  $(f_a, p_a)$  é equa in rischio se e solo se valgono le relazioni:

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} \quad (271)$$

Con i dati del Problema (269) si ha  $\{G_+, G_-, p\} = \{1,7ME, 4,1ME, 70\%\}$ , quindi

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} \iff f_a + p_a \frac{17}{41} = \left(1 + \frac{0,05}{4,1}\right) \frac{1}{1 + C_B/C_A}$$

$$\iff f_a + p_a \frac{17}{41} = (1 + 0,0121) \frac{1}{1 + 0,0121} = 1 \quad (272)$$

Quindi anche se coppie eque in rischio esistono sempre, nessuna di tali coppie può corrispondere a un contratto poiché la condizione di coerenza economica

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = f_a + p_a \frac{17}{41} < 1$$

non può essere soddisfatta.

**Domanda (2): Soluzione.**

Dalla (272) segue che basta aumentare di poco il denominatore affinché la condizione di coerenza economica risulti soddisfatta.

Per esempio, se invece della (273), si suppone che

$$C_B = 50.000 = 0,05 ME \quad ; \quad C_A = 3,7ME \quad (273)$$

(e.g.  $A$  è un industriale ed ha potuto usufruire di agevolazioni statali) allora la condizione di equità in rischio diventa

$$f_a + p_a \frac{G_+}{G_-} = \left(1 + \frac{C_B}{G_-}\right) \frac{C_A}{C_A + C_B} \iff f_a + p_a \frac{17}{41} = \left(1 + \frac{0,05}{4,1}\right) \frac{1}{1 + (0,05/3,7)}$$

$$\iff f_a + p_a \frac{17}{41} \sim \frac{1 + 0,0121}{1 + 0,0135} = \frac{1,0121}{1,0135} = 0,9986 < 1 \quad (274)$$

Se si vuole una franchigia  $f_a$ , il premio è univocamente determinato da

$$p_a = \iff p_a = (0,9986 - f_a) \frac{41}{17}$$

Quindi le franchigie per le quali un contratto equo in rischio esiste devono soddisfare le disuguaglianze

$$f_a < 0,9986$$

$$(0,9986 - f_a) \frac{41}{17} < 1 \iff (0,9986 - f_a) < \frac{17}{41} = 0,4146$$

$$\iff 0,9986 - 0,4146 = 0,584 < f_a$$

cioè devono appartenere all'intervallo

$$(0,584 , 0,9986)$$

**Problema 18** In connessione con un rischio  $\{G_+, G_-, p\}$ , per  $A$ , un assicuratore  $B$  propone ad  $A$  di pagare

$$p_a G_+ = 5 \text{ ME}$$

per un contratto privo di franchigia

$$f_a = 0$$

con un rischio di perdita netta, in caso di catastrofe, pari a

$$G_- = 100 \text{ ME}$$

e con una probabilità di successo pari a:

$$p = 90\%$$

Se voi foste il cliente per quali valori di  $G_+$  accettereste questo contratto secondo il criterio di ragionevolezza in media?

**Soluzione.** Dalle dispense segue che una condizione necessaria per la ragionevolezza in media della coppia  $(p_a, f_a)$  é che risulti

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \quad (275)$$

In questo caso tali coppie sono caratterizzate dalle disuguaglianze:

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - (f_a + p_a G_+ / G_-)) < p_a \leq 1 - \rho(f_a + p_a G_+ / G_-) \quad (276)$$

Tra queste, quelle che soddisfano la condizione di ammissibilit , definiscono un contratto.

Nel nostro caso:

$$\begin{aligned} \rho &= \left( \frac{100}{90} - 1 \right) \frac{G_-}{G_+} = \left( \frac{10}{9} - 1 \right) \frac{100}{G_+} = \frac{1}{9} \frac{100}{G_+} = p_a \frac{1}{9} \frac{100}{p_a G_+} = p_a \frac{1}{9} \frac{100}{5} \\ &= p_a \frac{100}{45} = p_a 2,2222 \end{aligned}$$

Quindi la condizione necessaria impone

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \iff \frac{C_B}{\frac{10}{9}G_+} + p_a 2,2222 < 1 \iff \frac{C_B}{G_+} + p_a 2,2222 \frac{10}{9} < \frac{10}{9}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow p_a \frac{C_B}{p_a G_+} + p_a 2,2222 \frac{10}{9} < \frac{10}{9} &\Leftrightarrow p_a \left( \frac{C_B}{5} + 2,2222 \times 1,1111 \right) < 1,1111 \\ &\Leftrightarrow p_a \left( \frac{C_B}{5} + 2,4691 \right) < 1,1111 \end{aligned}$$

Nel caso di franchigia nulla la condizione (276) diventa

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - p_a G_+/G_-) < p_a \leq 1 - \rho p_a G_+/G_- = 1 - p_a \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \quad (277)$$

La seconda disuguaglianza equivale a

$$\begin{aligned} p_a &\leq 1 - p_a \left( \frac{1}{p} - 1 \right) = p_a \frac{1}{p} - p_a \\ \Leftrightarrow 2p_a &\leq p_a \frac{1}{p} \Leftrightarrow 2 \leq \frac{1}{p} \Leftrightarrow p \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ma nel nostro caso si sa che

$$p = 90\% = \frac{9}{10} > \frac{1}{2}$$

Quindi la proposta dell'assicuratore non può essere ragionevole in media. Il cliente sa che il suo guadagno atteso è positivo se e solo se

$$\begin{aligned} 1 - \rho(f_a + p_a G_+/G_-) &\geq p_a \Leftrightarrow 1 - p_a \rho G_+/G_- \geq p_a \quad (278) \\ 1 &\geq p_a + p_a \rho G_+/G_- = p_a \left( 1 + \left( \frac{10}{9} - 1 \right) \right) = p_a \frac{10}{9} \Leftrightarrow \frac{9}{10} \geq p_a \\ \Leftrightarrow \frac{9}{10} G_+ &\geq p_a G_+ \Leftrightarrow \frac{9}{10} G_+ \geq 5 \Leftrightarrow G_+ \geq 5 \frac{10}{9} \sim 5,555 \end{aligned}$$

Quindi se il guadagno del cliente è  $> 5,555$ , cioè di poco superiore al premio, egli accetta il contratto. Se invece tale guadagno è  $< 5,555$  egli non lo accetta.

**Problema 19** *Un cliente A propone ad una assicurazione B di pagare*

*5,3 M E (milioni di Euro)*

*per un contratto privo di franchigia*

$$f_a = 0$$

con un rischio di perdita netta, in caso di catastrofe pari a

$$G_- = 89ME$$

Secondo il criterio dei contratti ragionevoli in media:

(1) Determinare la soglia dei costi  $C_B$  per l'assicuratore, al di sopra della quale l'assicuratore non stipulerebbe il contratto.

(2) Supponiamo che i costi per l'assicuratore siano circa la 100-ma parte della soglia massima (1). Se voi foste l'assicuratore, come stimereste l'intervallo della probabilità di successo  $p$  che vi permetterebbe di accettare il contratto?

(3) Supponendo che  $C_B$  sia uguale alla sua soglia massima, se come assicuratore stimaste che la probabilità di successo é

$$p = 90\%$$

sareste disposto ad accettare il contratto?

Spiegate i motivi delle vostre scelte e commentate il significato economico dei risultati.

**Domanda (1): Soluzione.**

I dati del problema sono:

$$p_a G_+ = 5,3 \quad ; \quad G_- = 89 \quad ; \quad f_a = 0 \quad (279)$$

Sappiamo che, per ogni franchigia  $f_a \in [0, 1)$  l'intervallo

$$\left( \frac{C_B}{G_+} + p\rho(1 - f_a) , \min \left\{ p(1 - \rho f_a) , (1 - f_a) \frac{G_-}{G_+} \right\} \right] \subset (0, 1) \quad (280)$$

é non vuoto se

$$\frac{C_B}{G_+} + p\rho(1 - f_a) < 1$$

e, per ogni  $p_a$  in tale intervallo, la coppia  $(f_a, p_a)$  é ragionevole in media.

Nel nostro caso  $f_a = 0$  e l'intervallo del premio diventa

$$\left( \frac{C_B}{G_+} + p\rho , \min \left\{ p , \frac{G_-}{G_+} \right\} \right] \iff \frac{C_B}{G_+} + p\rho < p_a \leq \min \left\{ p , \frac{G_-}{G_+} \right\} \quad (281)$$

La 1-a disuguaglianza é

$$\begin{aligned} \frac{C_B}{G_+} + p\rho < p_a &\iff C_B + p\rho G_+ < p_a G_+ \iff C_B + (1-p)G_- < p_a G_+ \\ &\iff \frac{C_B}{G_-} + 1 - \frac{p_a G_+}{G_-} < p \end{aligned}$$

Nel nostro caso

$$\frac{p_a G_+}{G_-} = 5,3/89 = 0,0595$$

Quindi la 1-a disuguaglianza diventa

$$\frac{C_B}{G_-} + 1 - 0,0595 = \frac{C_B}{G_-} + 0,9405 < p$$

Affinché essa abbia soluzione é necessario che

$$\begin{aligned} \frac{C_B}{G_-} + 0,9405 < 1 &\iff \frac{C_B}{G_-} < 1 - 0,9405 = 0,0595 \iff C_B < 0,0595 G_- \\ &\iff C_B < 0,0595 \times 89 = 5,2955 \end{aligned}$$

Se  $C_B$  non soddisfa questa disuguaglianza, l'intervallo dei premi ragionevoli in media é vuoto.

Poiché nel problema l'unità di misura é il milione di Euro, in casi normali tale soglia é soddisfatta. In tale caso la condizione di coerenza economica  $p_a G_+ > C_B$  é soddisfatta. Quindi tal teorema generale sappiamo che anche la condizione di coerenza economica  $f_a + p_a G_+ / G_- < 1$  é soddisfatta. Quindi se  $C_B < 5,2955$  esistono contratti ragionevoli in media.

### **Domanda (2): Soluzione.**

Dalla domanda (1) sappiamo che se si vuole un contratto ragionevole in media, deve aver luogo la stima inferiore per la probabilità:

$$\frac{C_B}{G_-} + 0,9405 < p$$

Consideriamo l'altra uguaglianza in (281), cioè

$$p_a \leq \min \left\{ p, \frac{G_-}{G_+} \right\} \iff p_a \frac{G_+}{G_-} \leq \min \left\{ p \frac{G_+}{G_-}, 1 \right\}$$

Da ciò segue che, se

$$p \frac{G_+}{G_-} > 1$$

l'intervallo di probabilità é

$$p \in \left( \frac{C_B}{89} + 0,9405, 1 \right]$$

Se invece

$$p \frac{G_+}{G_-} \leq 1$$

allora si deve avere

$$p_a \frac{G_+}{G_-} \leq p \frac{G_+}{G_-} \iff p_a \leq p$$

e l'intervallo di probabilità diventa

$$\left( \max \left\{ p_a, \frac{C_B}{89} + 0,9405 \right\}, 1 \right)$$

In particolare la seconda disuguaglianza in (281) può solo far crescere l'estremo inferiore dell'intervallo di probabilità.

Supponendo  $C_B = 0,0529 = 5,2955/100$  si trova

$$p > \frac{0,0529}{89} + 0,9405 = 0,0005 + 0,9405 = 0,9410 \quad (282)$$

**Domanda (3): Soluzione.**

Poiché, come assicuratore, stimo la probabilità di successo pari al 90%, ma la stima precedente pone un limite inferiore alla probabilità pari al 94% concluderei che un contratto ragionevole in media non é possibile e quindi tenterei di stimare il mio guadagno atteso.

**Problema 20** *Dato il rischio:*

$$\{G_+, G_-, p\} = \{5 ME, 6,5 ME, 0.89\}$$

*Esiste un intervallo di costi  $C_B$  tale che il contratto:*

$$(f_a, p_a) = (0, 1/8)$$

*risulti ragionevole in media?*

**Soluzione.**

Dalle dispense segue che una condizione necessaria per la ragionevolezza in media della coppia  $(p_a, f_a)$  é che risulti

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \quad (283)$$

In questo caso tali coppie sono caratterizzate dalle disuguaglianze:

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) < p_a \leq 1 - \rho(f_a + p_a G_+/G_-) \quad (284)$$

Tra queste, quelle che soddisfano la condizione di ammissibilit , definiscono un contratto. Nel nostro caso:

$$\rho = \left( \frac{100}{89} - 1 \right) \frac{6,5}{5} = (1,1235 - 1) \times 1,3 = 0,1235 \times 1,3 = 0,1606$$

$$pG_+ = \frac{89}{100} 5 = \frac{89}{20} = 4,45$$

Perci 

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho = \frac{C_B}{4,45} + 0,1606 < 1 \iff C_B < (1 - 0,1606) 4,45 = 0,8394 \times 4,45 = 3,7353$$

Quindi la condizione necessaria é soddisfatta per tutti i  $C_B$  nell'intervallo

$$C_B \in (0, 3,7353)$$

La 2-a disuguaglianza in (284) é

$$p_a \leq 1 - \rho p_a G_+/G_- = 1 - p_a \left( \frac{1}{p} - 1 \right) = 1 - \frac{p_a}{p} + p_a \iff \frac{p_a}{p} < 1 \iff p_a < p$$

Dato che nelle nostre ipotesi

$$p_a = \frac{1}{8} = 0,125 < 0,89 = p$$

la condizione precedente é rispettata. La 1-a disuguaglianza in (284) é

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) = \frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - p_a G_+/G_-) = \frac{C_B}{pG_+} + \left( \rho - p_a \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \right) < p_a$$

$$\begin{aligned}
\iff \frac{C_B}{pG_+} + \rho - \frac{p_a}{p} + p_a < p_a &\iff \frac{C_B}{pG_+} + \rho < \frac{p_a}{p} \iff p \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) < p_a \\
&\iff \frac{89}{100} \left( \frac{C_B}{4,45} + 0,1606 \right) < 0,125 \\
&\iff \frac{C_B}{4,45} + 0,1606 < 0,125 \frac{100}{89} = 0,125 \times 1,1235 = 0,1404 \\
&\iff \frac{C_B}{4,45} + 0,1606 < 0,1404 \iff \frac{C_B}{4,45} < 0,1404 - 0,1606 = -0,0201
\end{aligned}$$

Ma questa é impossibile. Concludiamo che, con i dati del problema, non esiste un intervallo di costi  $C_B$  tale che il contratto  $(f_a, p_a) = (0, 1/8)$  risulti ragionevole in media

**Problema 21** *Dato il rischio:*

$$\{G_+, G_-, p\} = \{6 ME, 4 ME, 0,97\}$$

*Determinare per quali  $f_a$  e  $C_B$  il contratto  $(f_a, p_a)$  con*

$$p_a = 1/8$$

*é ragionevole in media.*

**Soluzione.**

Sappiamo che una condizione necessaria per la ragionevolezza in media della coppia  $(p_a, f_a)$  é che risulti

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho < 1 \quad (285)$$

In questo caso tali coppie sono caratterizzate dalle disuguaglianze:

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - (f_a + p_a G_+/G_-)) < p_a \leq 1 - \rho(f_a + p_a G_+/G_-) \quad (286)$$

Tra queste, quelle che soddisfano la condizione di ammissibilitá, definiscono un contratto. Nel nostro caso:

$$\rho = \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \frac{G_+}{G_-} = \left( \frac{100}{97} - 1 \right) \frac{6}{4} = \frac{3}{97} \frac{6}{4} = \frac{18}{388} = 0,0463 < 1 \quad (287)$$

Quindi, dato che

$$pG_+ = 0,97 \times 6 = 5,82 \quad (288)$$

la condizione necessaria diventa

$$\frac{C_B}{5,82} + 0,0463 < 1 \iff C_B < 5,82(1 - 0,0463) = 5,82 \times 0,9537 = 5,5505$$

che definisce l'intervallo

$$C_B \in (0, 5,5505) \quad (289)$$

La 2-a disuguaglianza nella (286) é

$$p_a \leq 1 - \rho f_a - p_a \rho G_+ / G_- \iff p_a \left( 1 + \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \right) = \frac{p_a}{p} \leq 1 - 0,0463 f_a$$

$$p_a \leq p(1 - 0,0463 f_a) = 0,97(1 - 0,0463 f_a) = 0,97 - 0,97 \times 0,0463 f_a = 0,97 - 0,0449 f_a$$

Quindi nel nostro caso si deve avere

$$p_a = 1/8 = 0,125 \leq 0,97 - 0,0449 f_a \iff 0,125 - 0,97 = -0,845 \leq -0,0449 f_a$$

$$\iff 0,845 \geq 0,0449 f_a \iff \frac{0,845}{0,0449} = 18,8195 \geq f_a$$

che é identicamente soddisfatta poiché  $f_a < 1$ . Quindi la 2-a disuguaglianza nella (286) non pone limiti sulla franchigia.

La 1-a disuguaglianza nella (286) é

$$\frac{C_B}{pG_+} + \rho(1 - (f_a + p_a G_+ / G_-)) < p_a$$

$$\iff \frac{C_B}{pG_+} + \rho - \rho f_a - \rho p_a G_+ / G_- < p_a$$

$$\iff \frac{C_B}{pG_+} + \rho - \rho f_a - p_a \left( \frac{1}{p} - 1 \right) < p_a$$

$$\iff \frac{C_B}{pG_+} + \rho - \rho f_a < \frac{p_a}{p}$$

$$\iff \frac{C_B}{pG_+} + \rho - \frac{p_a}{p} < \rho f_a$$

Nel nostro caso questa é equivalente a

$$\iff \frac{C_B}{5,82} + 0,0463 - \frac{1}{8 \times 0,97} < 0,0463 f_a$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{C_B}{5,82} + 0,0463 - \frac{1}{7,76} < 0,0463f_a \\
&\Leftrightarrow \frac{C_B}{5,82} + 0,0463 - 0,1288 < 0,0463f_a \\
&\Leftrightarrow \frac{C_B}{5,82} - 0,0825 < 0,0463f_a \\
&\Leftrightarrow C_B - 5,82 \times 0,0825 < 5,82 \times 0,0463f_a \\
&\Leftrightarrow C_B - 0,4801 < 0,2694f_a \\
&\Leftrightarrow \frac{C_B - 0,4801}{0,2694} < f_a
\end{aligned}$$

Da cui si deduce che dev'essere

$$\begin{aligned}
\frac{C_B - 0,4801}{0,2694} < 1 &\Leftrightarrow C_B - 0,4801 < 0,2694 \Leftrightarrow C_B < 0,2694 + 0,4801 \\
&\Leftrightarrow C_B < 0,2694 + 0,4801 = 0,7495
\end{aligned}$$

Quindi l'intervallo (289), cioè

$$C_B \in (0, 5,5505)$$

si restringe a

$$C_B \in (0, 0,7495) \quad (290)$$

Per ogni  $C_B$  in quest'intervallo e per ogni franchigia nell'intervallo

$$f_a \in \left( \frac{C_B - 0,4801}{0,2694}, 1 \right) \cap [0, 1) \quad (291)$$

la coppia  $(1/8, f_a)$  é ragionevole in media.

La 1-a condizione di coerenza economica impone che

$$\begin{aligned}
f_a + p_a G_+ / G_- = f_a + \frac{16}{84} = f_a + \frac{8}{32} = f_a + 0,25 < 1 \\
f_a < 1 - 0,25 = 0,75
\end{aligned}$$

Tenuto conto di (291), ciò é possibile se e solo se

$$\frac{C_B - 0,4801}{0,2694} < 0,75 \Leftrightarrow C_B - 0,4801 < 0,2694 \times 0,75 = 0,202$$

$$\iff C_B < 0,202 + 0,4801 = 0,6821$$

Quindi l'intervallo (290) si restringe a

$$C_B \in (0, 0,6821) \quad (292)$$

La 2-a condizione di coerenza economica impone che

$$C_B < p_a G_+ = \frac{1}{8}6 = 0,75$$

e, data la (292), questa é automaticamente soddisfatta. In conclusione: per ogni  $C_B \in (0, 0,6821)$  e per ogni  $f_a \in \left( \frac{C_B - 0,4801}{0,2694}, 1 \right) \cap [0, 1)$ , la coppia  $(1/8, f_a)$  é ragionevole in media.

**Problema 22** *Nelle condizioni dell'esercizio 21 esistono franchigie  $f_a$  che rendono il contratto equo e ragionevole in media? In caso affermativo determinarle.*

**Soluzione.**

Nell'esercizio 21 il rischio é

$$\{G_+, G_-, p\} = \{6 ME, 4 ME, 0,97\}$$

ed il premio é

$$p_a = 1/8$$

Sappiamo che, dato il rischio  $\{G_+, G_-, p\}$  le coppie  $(f_a, p_a)$ , EM con capitali investiti  $(C_A, C_B)$ , sono quelle che soddisfano la condizione:

$$\frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{pG_+} + \rho \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = \rho f_a + \frac{p_a}{p} \quad (293)$$

Nel nostro caso, ricordando dalle (288), (287), (288) che

$$pG_+ = 5,82 \quad ; \quad \rho = 0,0463 \quad ; \quad pG_+ = 5,82$$

questa diventa

$$\frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{5,82} + 0,0463 \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = 0,0463 f_a + \frac{1}{8 \times 0,97}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{C_A}{C_A + C_B} \left( \frac{C_B}{5,82} + 0,0463 \right) + \frac{C_B}{C_A + C_B} = 0,0463f_a + \frac{1}{7,76} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1 + C_B/C_A} \left( \frac{C_B}{5,82} + 0,0463 \right) + \frac{1}{1 + C_A/C_B} = 0,0463f_a + 0,1288 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1 + C_B/C_A} \left( \frac{C_B}{5,82} + 0,0463 \right) + \frac{1}{1 + C_A/C_B} - 0,1288 = 0,0463f_a \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1 + C_B/C_A} \left( \frac{C_B}{5,82 \times 0,0463} + 1 \right) + \frac{1}{0,0463} \frac{1}{1 + C_A/C_B} - \frac{0,1288}{0,0463} = f_a \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1 + C_B/C_A} \left( \frac{C_B}{0,02694} + 1 \right) + \frac{1}{0,0463} \frac{1}{1 + C_A/C_B} - 2,7818 = f_a
\end{aligned}$$

La condizione  $f_a \in [0, 1)$  impone due disuguaglianze. La prima é

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 + C_B/C_A} \left( \frac{C_B}{0,02694} + 1 \right) + \frac{1}{0,0463} \frac{1}{1 + C_A/C_B} - 2,7818 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1 + C_B/C_A} \left( \frac{C_B}{0,02694} + 1 \right) + \frac{1}{0,0463} \frac{1}{1 + C_A/C_B} \geq 2,7818 \\
&\Leftrightarrow \frac{C_B}{0,02694} + 1 + \frac{1}{0,0463} \frac{1 + C_B/C_A}{1 + C_A/C_B} \geq 2,7818(1 + C_B/C_A) = 2,7818 + 2,7818 \frac{C_B}{C_A} \\
&\Leftrightarrow \frac{C_B}{0,02694} + \frac{1}{0,0463} \frac{1 + C_B/C_A}{1 + C_A/C_B} \geq 1,7818 + 2,7818 \frac{C_B}{C_A} \\
&\Leftrightarrow C_B + \frac{0,02694}{0,0463} \frac{1 + C_B/C_A}{1 + C_A/C_B} \geq 0,02694 \times 1,7818 + 0,02694 \times 2,7818 \frac{C_B}{C_A} \\
&\Leftrightarrow C_B + 0,5818 \frac{1 + C_B/C_A}{1 + C_A/C_B} \geq 0,048 + 0,0749 \frac{C_B}{C_A} \\
&\Leftrightarrow C_B(1 + C_A/C_B) + 0,5818(1 + C_B/C_A) \geq 0,048(1 + C_A/C_B) + 0,0749 \frac{C_B}{C_A}(1 + C_A/C_B) \\
&\Leftrightarrow C_B \frac{C_A + C_B}{C_B} + 0,5818 \frac{C_A + C_B}{C_A} \geq 0,048 \frac{C_A + C_B}{C_B} + 0,0749 \frac{C_B}{C_A} \frac{C_A + C_B}{C_B} \\
&\Leftrightarrow (C_A + C_B) + 0,5818 \frac{C_A + C_B}{C_A} \geq 0,048 \frac{C_A + C_B}{C_B} + 0,0749 \frac{C_A + C_B}{C_A} \\
&\Leftrightarrow C_A C_B (C_A + C_B) + 0,5818 C_B (C_A + C_B) \geq 0,048 C_A (C_A + C_B) + 0,0749 C_B (C_A + C_B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow C_A C_B (C_A + C_B) + (0,5818 - 0,0749) C_B (C_A + C_B) \geq 0,048 C_A (C_A + C_B) \\
&\Leftrightarrow C_A C_B (C_A + C_B) + 0,5069 C_B (C_A + C_B) \geq 0,048 C_A (C_A + C_B) \\
&\Leftrightarrow C_A C_B + 0,5069 C_B \geq 0,048 C_A \Leftrightarrow C_B (C_A + 0,5069) \geq 0,048 C_A \\
&\Leftrightarrow C_B \geq \frac{0,048 C_A}{C_A + 0,5069}
\end{aligned}$$

Ricordando dalla (??) che

$$C_B \in (0, 0,75)$$

ciò restringe l'intervallo di  $C_B$  a

$$C_B \in \left( \frac{0,048 C_A}{C_A + 0,5069}, 0,75 \right) \quad (294)$$

L'intervallo (294) é non vuoto se e solo se

$$\frac{0,048 C_A}{C_A + 0,5069} < 0,75 \Leftrightarrow 0,048 C_A < 0,75 (C_A + 0,5069) = 0,75 C_A + 0,75 \times 0,5069$$

$$\Leftrightarrow C_A (0,048 - 0,75) = C_A (-0,702) < 0,75 \times 0,3801$$

Dato che questa condizione é identicamente soddisfatta, essa non pone alcun limite su  $C_A$ .

Riassumendo: per ogni  $C_B$  nell'intervallo (294) e per ogni  $C_A$ , la franchigia

$$f_a = \frac{1}{1 + C_B/C_A} \left( \frac{C_B}{0,02694} + 1 \right) + \frac{1}{0,0463} \frac{1}{1 + C_A/C_B} - 2,7818 \quad (295)$$

definisce una coppia equa in rischio. Per tale coppia la 1-a condizione di coerenza economica impone che

$$f_a + p_a G_+ / G_- = f_a + \frac{16}{84} = f_a + \frac{8}{32} = f_a + 0,25 < 1$$

e, tenuto conto della (295), questa diventa

$$\frac{1}{1 + C_B/C_A} \left( \frac{C_B}{0,02694} + 1 \right) + \frac{1}{0,0463} \frac{1}{1 + C_A/C_B} - 2,7818 + 0,25 < 1$$

## Bibliografia essenziale

- [Ba900] L. Bachelier:  
Theorie de la spéculation  
Annales Scientifiques de L'école Normale Supérieure III 17 (1900) 21–88  
Traduzione inglese in: [Ba64] L. Bachelier:  
Theory of speculation  
in: The Random Character of Stock Market Prices, P.H. Cootner Ed.,  
M.I.T. Press, Cambridge, MA (1964)  
[Pliska97] Stanley R. Pliska:  
Introduction to Mathematical Finance. Discrete time models,  
Blackwell Publishers (1997)