

Esercitazione 2

Roberto Pezzuto*

22/04/2022

Esercizio 1 I giocatori 1 e 2 stanno contrattando come dividersi un dollaro. Entrambi i giocatori dichiarano simultaneamente l'importo che vorrebbero avere, $s_1 > 0$ e $s_2 > 0$, rispettivamente. Se $s_1 + s_2 \leq 1$, ciascun giocatore riceve quanto ha dichiarato; se $s_1 + s_2 > 1$ allora entrambi i giocatori ricevono zero.

1. Identificate tutti gli equilibri di Nash in strategie pure di questo gioco.
2. Esistono equilibri in strategie debolmente dominate? Spiegare.

Esercizio 2 In un gruppo di n cacciatori, ogni cacciatore ha due opzioni: può cooperare all'inseguimento di un cervo, o distaccarsi e catturare da solo una lepre. Se tutti i cacciatori inseguono il cervo, lo catturano e se lo dividono equamente; se un cacciatore si dedica individualmente alla cattura di una lepre, il cervo scappa e la lepre viene presa dal cacciatore che si è distaccato dal gruppo. Ogni cacciatore preferisce una quota $1/n$ di cervo ad una singola lepre.

1. Per il caso in cui $n = 2$, si fornisca la rappresentazione strategica del gioco e si trovino gli equilibri di Nash.
2. Si supponga ora che i cacciatori siano $n > 2$ e che debbano collaborare tutti per catturare il cervo. Si trovino gli equilibri di Nash di questa variante, in cui le preferenze dei cacciatori rimangono le stesse del gioco originario.
3. Si trovino gli equilibri di Nash della variante del gioco precedente, con $n > 2$ giocatori, in cui m cacciatori sono sufficienti per catturare il cervo, con $2 \leq m < n$.
4. Si assuma che ogni cacciatore preferisca la frazione $1/k$ di cervo alla lepre, ma preferisca la lepre a qualsiasi frazione inferiore di cervo, dove k è un numero intero e $m \leq k \leq n$. Si trovino gli equilibri di Nash del gioco strategico che rappresenta questa situazione.

Esercizio 3 Si consideri il seguente modello di oligopolio con $n > 2$ imprese. Sia q_i la quantità prodotta dall'impresa i . Il prezzo di mercato p dipende dalla produzione totale:

$$p(q_1, \dots, q_n) = \begin{cases} a - b \sum_{i=1}^{\infty} q_i & \text{se } a - b \sum (q_i) > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $a > 0$, $b > 0$. Il costo totale dell'impresa i per produrre la quantità q_i è $C_i(q_i) = cq_i$. Cioè, non ci sono costi fissi e il costo marginale è costante e uguale a c . Si supponga che $c < a$. Si supponga che tutte le imprese scelgano le loro quantità simultaneamente.

*e-mail: roberto.pezzuto@uniroma2.it

1. Si definiscano strategie e payoff per i giocatori.
2. Si individui l'equilibrio di Nash simmetrico.
3. Cosa succede quando n si approssima all'infinito? Qual è l'interpretazione economica del risultato del limite?

Esercizio 4 Si consideri il modello di oligopolio descritto nell'Esercizio 3 e si supponga che $n = 2$. Si assuma che ciascun duopolista abbia costi medi e marginali costanti, ma che $0 < c_1 < c_2$. Si mostri che l'impresa 1 avrà maggiori profitti e produrrà una quota maggiore dell'output di mercato rispetto all'impresa 2 nell'equilibrio di Nash.

Esercizio 5 Si consideri il seguente modello di duopolio con prodotti differenziati, in cui due imprese competono sul prezzo del loro prodotto. Sia la domanda dell'impresa $i = 1, 2$:

$$q_i(p_i, p_j) = \begin{cases} \alpha - p_i + \beta p_j & \text{se } p_i < \alpha + \beta p_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $j = 1, 2$, $j \neq i$, e $\beta > 0$. Sia $C_i(q_i) = cq_i$, con $c < \alpha$, la funzione di costo di ogni impresa. Si supponga che ogni impresa scelga il prezzo del suo prodotto senza conoscere la decisione di prezzo del suo avversario.

1. Si fornisca la rappresentazione in forma strategica di questo gioco.
2. Quali sono le funzioni di risposta ottima delle imprese duopoliste?
3. Quali condizioni definiscono un equilibrio di Nash di questo duopolio? Si trovi l'equilibrio di Nash del gioco.