

Esercitazione 4 (con soluzioni) — Martedì 15 novembre 2011

Esercizio 1 *Mr. Jones decide di assicurare la sua auto contro il furto e di recarsi per fare ciò da una compagnia di assicurazione. Dal punto di vista dell'assicuratore, Mr. Jones potrebbe essere un soggetto ad alto o a basso rischio di furto. La probabilità che Mr. Jones sia un soggetto a basso rischio di furto sia data da $t \in (0, 1)$. Per un soggetto a basso rischio, la probabilità di subire un furto sia $p_b = \frac{1}{3}$ mentre per un soggetto ad alto rischio, la stessa sia pari a $p_a = \frac{1}{2}$. Supponete che la compagnia di assicurazione sia neutrale rispetto al rischio e che operi in un contesto competitivo.*

La funzione di utilità di Mr. Jones sia data da $u(x) = \log(x)$, dove x rappresenta il valore monetario della ricchezza di Mr. Jones. La dotazione iniziale di ricchezza di Mr. Jones sia $W = 64$, in caso di furto la perdita fronteggiata sia pari a $C = 63$. Tutte le compagnie di assicurazione offrono contratti che specificano un premio (totale) pagato dall'assicurato α e la copertura in caso di furto β . Jones sceglierà il contratto (α, β) che preferisce.

- *Scrivete la funzione di utilità attesa di Mr. Jones nel caso in cui sia un soggetto ad alto e a basso rischio di furto, che decida di assicurarsi.*
- *Scrivete il vincolo di partecipazione di Mr. Jones. Spiegate il significato.*
- *Calcolate i profitti attesi della compagnia di assicurazione nel caso in cui:*
 - *non assicuri Mr. Jones;*
 - *assicuri Mr. Jones come soggetto ad alto rischio di furto;*
 - *assicuri Mr. Jones come soggetto ad basso rischio di furto;*
 - *assicuri Mr. Jones con il contratto (α, β) senza sapere che tipo di soggetto egli sia.*
- *Calcolate i contratti che emergerebbero in questo mercato se l'informazione fosse completa e perfetta, con un mercato assicurativo competitivo. Mr. Jones verrebbe completamente assicurato? Spiegate.*
- *Perché non osserveremmo questi stessi contratti se le compagnie di assicurazione non riescono a distinguere la rischiosità di Mr. Jones?*
- *Calcolate i contratti che sostengono un equilibrio di separazione nel mercato dell'assicurazione, nel caso in cui la rischiosità di Mr. Jones non sia osservabile dalle compagnie di assicurazione. **Risposta:** I contratti che sostengono un equilibrio con separazione nel mercato dell'assicurazione devono soddisfare: - il vincolo di partecipazione del tipo a basso rischio (IR_B); - il vincolo di incentivo del tipo ad alto rischio (IC_A); - il fatto che il tipo ad alto rischio riceve assicurazione completa. Quindi, $\beta_{\theta_A} = 63$ e $\alpha_{\theta_A} = 63/2$ (dalla condizione di zero profitti sui mercati assicurativi, $\Pi_{\theta_A} = 0$).*

Inoltre, da (IR_B) stringente otteniamo: $3\alpha_{\theta_B} = \beta_{\theta_B}$.

(IC_A) stringente implica:

$$\frac{1}{2} \log(1 - \alpha_{\theta_A} + \beta_{\theta_A}) + \frac{1}{2} \log(64 - \alpha_{\theta_A}) = \frac{1}{2} \log(1 - \alpha_{\theta_B} + \beta_{\theta_B}) + \frac{1}{2} \log(64 - \alpha_{\theta_B}) \quad (1)$$

dove sostituendo i valori noti otteniamo:

$$\frac{1}{2} \log(1 - \frac{63}{2} + 63) + \frac{1}{2} \log(64 - \frac{63}{2}) = \frac{1}{2} \log(1 + 2\alpha_{\theta_B}) + \frac{1}{2} \log(64 - \alpha_{\theta_B}) \quad (2)$$

Utilizzando le proprietà dei logaritmi, possiamo semplificare l'espressione per ottenere:

$$(64 - \frac{63}{2}) = (1 + 2\alpha_{\theta_B})^{1/2} (64 - \alpha_{\theta_B})^{1/2} \quad (3)$$

da cui si ottiene la seguente equazione di secondo grado in α_{θ_B} :

$$8\alpha_{\theta_B}^2 - 508\alpha_{\theta_B} + 3969 = 0 \quad (4)$$

che fornisce due valori ammissibili di α_{θ_B} e di conseguenza di β_{θ_B} .

Esercizio 2 La concentrazione che un ingegnere mette nella sua attività di progettazione ha effetto sulla probabilità di commettere un errore nella realizzazione di un prodotto. L'ingegnere può scegliere due livelli di concentrazione, alta o bassa $c \in \{c_A, c_B\}$, che inducono un errore nella produzione con probabilità pari a 0,25 e 0,75, rispettivamente. La funzione di utilità dell'ingegnere sia data da : $U(w, c) = 100 - (10/w) - v$, con w che indica il salario monetario che l'ingegnere riceve, e v che rappresenta il costo della concentrazione in termini di utilità ed assume valore 2 se viene scelta c_A , e valore 0 altrimenti. Gli errori nella progettazione sono osservabili e dunque possono essere oggetto del contratto, mentre la concentrazione non lo è. Se l'ingegnere non fa errori il valore del prodotto ottenuto è pari a 20, mentre se fa errori lo stesso è pari a 0. L'imprenditore che assume l'ingegnere, cioè il principale, è neutrale rispetto al rischio. Supponete che l'utilità di riserva dell'ingegnere sia $\bar{U} = 0$.

- Qual è l'attitudine dell'ingegnere rispetto al rischio?
- Nella relazione con il principale, date le rispettive attitudini al rischio, cosa vi aspettate che succeda in condizioni di informazione completa e perfetta? E se l'informazione fosse imperfetta?
- Calcolate il contratto ottimo proposto all'ingegnere e la concentrazione che il principale desidera ottenere nel caso in cui l'informazione sia simmetrica.
- Calcolate il contratto ottimo proposto all'ingegnere e la concentrazione che il principale desidera ottenere nel caso in cui l'informazione sia asimmetrica.

Esercizio 3 Una università ha bisogno di un esperto filologo per tradurre un antico manoscritto ritrovato per caso nel deposito della sua biblioteca. Esiste un solo laureato in filologia antica nel paese che possa leggere tale manoscritto, e questi lavora all'università. Poiché si tratta di una

traduzione alquanto complessa, l'unico in grado di farla é appunto quel laureato che può dedicarsi all'opera nel tempo libero. Come traduttore egli può essere di due tipi: traduttore veloce capace di tradurre due pagine in un'ora (θ_v), oppure un traduttore lento, che traduce una pagina l'ora (θ_l). Un'ora di lavoro alla traduzione implica una disutilità per il traduttore (indipendentemente dal tipo che egli sia) che può essere compensata con un salario di 10 euro.

- Il rettore ha calcolato quante pagine del manoscritto vuole far tradurre e quanto é disposto a pagare il traduttore. Questi calcoli sono stati fatti nell'ipotesi in cui il rettore sia capace di riconoscere il tipo del traduttore θ_v o θ_l . La sua decisione é di far tradurre 50 pagine del manoscritto al traduttore lento (θ_l) pagandolo 500 euro; mentre farà tradurre 80 pagine del manoscritto al traduttore veloce, pagandolo 400 euro. Spiegate se questo menu di contratti é ragionevole. **Risposta:** Sì, lo é. É ragionevole chiedere al traduttore più veloce di tradurre più pagine ($80 > 50$), dato che il costo per pagina del traduttore tipo θ_v é più basso ($5 < 10$). Inoltre, dal punto di vista dell'università e quindi del rettore, é ragionevole pagare a ciascun traduttore il salario minimo perché accetti il lavoro.
- Una volta convocato dal rettore, il traduttore si presenta nel suo ufficio e il rettore si rende conto di non essere assolutamente in grado di capire di che tipo di traduttore si tratti. Di fronte al menu che il rettore aveva calcolato, il traduttore assicura al rettore di essere un tipo lento, ma il rettore non gli crede. Perché? **Risposta:** Il tipo θ_v ha incentivo a dichiarare il falso, perché la traduzione di 50 pagine sarebbe compensata per lui con 250 euro, mentre il contratto proposto gliene offre 400.
- Il rettore decide allora di rifare tutti i calcoli e di presentare un nuovo menu di contratti al traduttore. Spiegate che forma potrà prendere il nuovo menu. Vi aspettate che egli chieda di tradurre più o meno pagine a ciascun tipo di traduttore? Come cambieranno i salari offerti ai diversi tipi di traduttore? **Risposta:** Nel caso di asimmetria informativa tra il rettore e il traduttore, sappiamo che: - il tipo θ_v riceve un contratto efficiente, in cui cioè il numero di pagine richiesto é ancora pari a 80; $n_v = 80$; - il numero di pagine invece richiesto al traduttore θ_l é inefficiente; $n_l < 50$; - il tipo θ_l ottiene la sua utilità di riserva, il vincolo di partecipazione IR_l sarà stringente; $w_l = 10n_l$; - il vincolo di compatibilità degli incentivi per θ_v é stringente; quindi il tipo θ_v non ha incentivo a mentire:

$$w_v - 5n_v = w_l - 10n_l.$$

- Verificate quanto avete spiegato al punto precedente, impostando e risolvendo analiticamente il problema di massimizzazione vincolata del rettore, nel quale $\Pi(n)$ rappresenta il valore per il rettore e per l'università di n pagine tradotte e soddisfa $\Pi'(n) > 0$ e $\Pi''(n) < 0$. **Risposta:** La struttura dei vincoli del problema é data da:

$$w_v - 5n_v \geq 0 \quad (IR_v)$$

$$w_l - 10n_l \geq 0 \quad (IR_l)$$

$$w_v - 5n_v \geq w_l - 5n_l \quad (IC_v)$$

$$w_l - 10n_l \geq w_v - 10n_v \quad (IC_l)$$

dei quali sappiamo che soltanto IR_l e IC_v sono stringenti, per cui otteniamo:

$$w_l = 10n_l \quad (5)$$

$$w_v - 5 * 80 = 10n_l - 5n_l = 5n_l \quad (6)$$

che può essere riscritta come $w_v = 400 - 5n_l$. Per ricavare n_l dobbiamo considerare la funzione obiettivo del rettore:

$$Max_{\{n_v, n_l, w_v, w_l\}} q [\Pi(n_v) - w_v] + (1 - q) [\Pi(n_l) - w_l]$$

che dopo aver sostituito quanto ottenuto dal sistema di vincoli, diventa:

$$Max_{\{n_l\}} q [\Pi(80) - (400 - 5n_l)] + (1 - q) [\Pi(n_l) - 10n_l]$$

La condizione al primo ordine di questo problema é data da:

$$5q + (1 - q)\Pi'(n_l) - 10(1 - q) = 0$$

che riscriviamo come:

$$\Pi'(n_l) = 10 - \frac{5q}{(1 - q)}$$

che per ogni $q \in (0, 1)$ implica una scelta inefficiente di n_l .