

## Esercitazione 2 con soluzioni — 30 ottobre 2012

**Esercizio 1** La concentrazione che un ingegnere mette nella sua attività di progettazione ha effetto sulla probabilità di commettere un errore nella realizzazione di un prodotto. L'ingegnere può scegliere due livelli di concentrazione, alta o bassa  $c \in \{c_A, c_B\}$ , che inducono un errore nella produzione con probabilità pari a 0,25 e 0,75, rispettivamente. La funzione di utilità dell'ingegnere sia data da :  $U(w, c) = 100 - (10/w) - v$ , con  $w$  che indica il salario monetario che l'ingegnere riceve, e  $v$  che rappresenta il costo della concentrazione in termini di utilità ed assume valore 2 se viene scelta  $c_A$ , e valore 0 altrimenti. Gli errori nella progettazione sono osservabili e dunque possono essere oggetto del contratto, mentre la concentrazione non lo è. Se l'ingegnere non fa errori il valore del prodotto ottenuto è pari a 20, mentre se fa errori lo stesso è pari a 0. L'imprenditore che assume l'ingegnere, cioè il principale, è neutrale rispetto al rischio. Supponete che l'utilità di riserva dell'ingegnere sia  $\bar{U} = 0$ .

- Qual è l'attitudine dell'ingegnere rispetto al rischio?
- Nella relazione con il principale, date le rispettive attitudini al rischio, cosa vi aspettate che succeda in condizioni di informazione completa e perfetta? E se l'informazione fosse imperfetta?
- Calcolate il contratto ottimo proposto all'ingegnere e la concentrazione che il principale desidera ottenere nel caso in cui l'informazione sia simmetrica.
- Calcolate il contratto ottimo proposto all'ingegnere e la concentrazione che il principale desidera ottenere nel caso in cui l'informazione sia asimmetrica.

**Esercizio 2** Consideriamo un mercato in cui coesistano due gruppi di lavoratori, ciascuno contraddistinto da una diversa produttività. I lavoratori del primo gruppo hanno una produttività  $\theta = 1$ , mentre i lavoratori del secondo gruppo hanno una produttività  $\theta = 2$ . Ciascun lavoratore può accedere a dei corsi di formazione, ma il costo di raggiungere un dato livello di formazione è relativamente più elevato per i lavoratori a bassa produttività  $\theta = 1$ . In particolare, il costo di  $e$  unità di formazione per un generico lavoratore di tipo  $\theta$  è misurato dalla funzione  $c(e; \theta) = \frac{e}{\theta}$ .

	Gruppi	Produttività ( $\theta_i$ )	Quote	Costo della formazione
	I	1	$\lambda$	$e$
	II	2	$1 - \lambda$	$\frac{e}{2}$

Sia l'utilità del lavoratore di tipo  $\theta$  data dalla relazione  $U(w, e; \theta) = w - c(e; \theta)$  e sia il settore produttivo in concorrenza perfetta (i lavoratori vengono cioè retribuiti in base alla produttività attesa).

- Spiegate se il livello di formazione influenza la produttività del lavoratore. Quale sarebbe la scelta ottima in termini di formazione ( $e$ ) se imprese e lavoratori avessero la stessa informazione sul livello di produttività  $\theta$  di ciascun lavoratore?

Supponete che la produttività individuale sia informazione privata di ciascun lavoratore, dunque non osservabile dall'impresa, la quale può soltanto osservare il livello di formazione e raggiunto dal lavoratore. L'impresa in questione inoltre ritiene che un livello di formazione superiore o uguale a  $e_0$  sia indice di elevata produttività, mentre un livello inferiore sia parimenti indice di bassa produttività. L'impresa è pronta dunque ad offrire la seguente struttura di salari:  $w(e) = 2$  se  $e \geq e_0$  e  $w(e) = 1$  se  $e < e_0$ .

- Dati questi salari calcolate il livello di formazione che ciascun tipo di lavoratore sceglierà.
- Qual è la condizione necessaria su  $e_0$  affinché la formazione sia un segnale efficace della produttività? Calcolate  $e_0$ .

Mantenendo fissa l'ipotesi che la produttività individuale non sia osservabile dall'impresa, mentre lo sia la formazione  $e$ ; considerate ora il caso in cui l'impresa decida di voler offrire un salario costante a tutti i tipi di lavoratore indipendentemente dal livello di formazione raggiunto. Se l'impresa ritiene equiprobabile che un lavoratore sia di alta o di bassa produttività ( $\lambda = 1/2$ ), sia  $w(e) = E(w)$  il salario a cui l'impresa è disposta ad assumere il lavoratore, con  $E(w) = 1/2 * \theta_1 + 1/2 * \theta_2$ . Aggiungete inoltre l'ipotesi che ciascun lavoratore voglia al salario  $E(w)$  scegliere di non fare nessuna formazione ( $e = 0$ ).

- Discutete che tipo di equilibrio stiamo sostenendo in questo caso e trovate il livello di formazione che permette di sostenere questo equilibrio. Chiamate questo livello  $\bar{e}$ .
- Qual è la condizione necessaria su  $\bar{e}$  affinché la formazione sia un segnale efficace della produttività?
- Potete confrontare  $\bar{e}$  con  $e_0$ ? Interpretate il risultato.
- In che tipo di mercato pensate stia operando l'impresa che è stata considerata in questo esercizio.

**Esercizio 3** Air Shangri-la è la unica compagnia aerea che ha il permesso di volare tra le isole di Shangri-la e Nirvana. Ci sono due possibili tipi di passeggeri, a seconda della classe in cui viaggiano: la turistica o la business. I viaggiatori in business class sono disposti a pagare un prezzo più alto di coloro che viaggiano in classe turistica. La compagnia però non riesce a distinguere la categoria di viaggiatore se non dopo che ha comprato il biglietto. I due tipi di viaggiatori differiscono anche rispetto alla disponibilità a pagare per poter comprare il biglietto all'ultimo minuto, diciamo per il grado di flessibilità. (I passeggeri preferiscono rimanere flessibili il più possibile e avere la possibilità di acquistare il biglietto all'ultimo minuto).

Le utilità di ciascuno dei due tipi di viaggiatori dipendono dal prezzo del biglietto aereo,  $P$ , e dall'ammontare di tempo con cui devono acquistare il biglietto in anticipo  $W$ , e sono date dalle seguenti relazioni:

- Viaggiatori in business:  $v - \theta_B P - W$

- Viaggiatori in turistica:  $v - \theta_T P - W$

dove  $0 < \theta_B < \theta_T$ . (Osservate che per ogni dato ammontare di  $W$ , i viaggiatori in business class sono disposti a pagare un prezzo più alto per il proprio biglietto aereo. Inoltre, i viaggiatori in business sono disposti a pagare di più per vedersi ridurre il valore di  $W$  al minimo.) Sia l'utilità di riserva per entrambi i tipi in caso decidano di non viaggiare pari a 0. La probabilità con cui un viaggiatore preferisce la classe turistica sia data da  $\lambda$ . Supponete che il costo di trasporto per passeggero sia  $c$ , e che la compagnia aerea sia neutrale rispetto al rischio. In tutti i quesiti supponete sempre che la compagnia non voglia escludere nessun passeggero dal viaggiare.

a) Formulate il problema di discriminazione di prezzo che la compagnia aerea risolve nell'ipotesi che intenda massimizzare i propri profitti attesi e possa osservare i tipi dei viaggiatori.

**Soluzione**

$$\text{Max} \quad P_T - c$$

s.t.

$$\begin{aligned} v - \theta_T P_T - W_T &\geq 0 & IR_T \\ P_T &\geq 0 \end{aligned}$$

ed, analogamente, ai viaggiatori che scelgono la classe business la compagnia aerea offrirà la coppia  $(P_B, W_B)$  che soddisfi  $IR_B$  ed il corrispondente vincolo di non-negatività su  $P_B$ . Osservate che la compagnia aerea può fissare  $W_T^*$  e  $W_B^*$  pari a zero al first best, senza peraltro che questo abbia alcun effetto sui suoi profitti. Dunque, il vincolo di partecipazione per ciascun tipo ( $T$  e  $B$ ) sarà stringente, e determinerà  $P_T^* = \frac{v}{\theta_T}$  e  $P_B^* = \frac{v}{\theta_B}$ .

b) Formulate il problema di discriminazione di prezzo ottimale della compagnia aerea, che intende massimizzare i propri profitti attesi e NON può osservare i tipi dei viaggiatori. [Suggerimento: Imponete i vincoli di non-negatività sui prezzi offerti, poiché se venisse offerto un biglietto ad prezzo negativo la compagnia venderebbe una quantità infinita di biglietti a quel prezzo.]

**Soluzione**

$$\text{Max} \quad \lambda P_T + (1 - \lambda) P_B - c$$

subject to

$$\begin{aligned} v - \theta_B P_B - W_B &\geq v - \theta_B P_T - W_T & IC_B \\ v - \theta_T P_T - W_T &\geq v - \theta_T P_B - W_B & IC_T \\ v - \theta_B P_B - W_B &\geq 0 & IR_B \\ v - \theta_T P_T - W_T &\geq 0 & IR_T \\ P_B &\geq 0; P_T &\geq 0 \end{aligned}$$

c) Mostrate che la soluzione ottima per la Air Shangri-la implica che i viaggiatori in classe turistica siano indifferenti tra acquistare il biglietto e non viaggiare affatto.

**Soluzione** Supponete che il contratto ottimo per i turisti sia tale che  $IR_T$  non sia stringente. Siano  $(W_T, P_T)$  gli elementi di tale contratto. Considerate il vincolo  $IC_B$ ,

$$v - \theta_B P_B - W_B \geq v - \theta_B P_T - W_T > v - \theta_T P_T - W_T \geq 0$$

Se  $IR_T$  non é stringente, non lo é neppure  $IR_B$ . Dunque la compagnia aerea può aumentare i prezzi sia dei viaggiatori di classe turistica che business di  $\epsilon > 0$  senza alterare la struttura degli incentivi ed in modo da soddisfare i vincoli di partecipazione, e raggiungere un profitto strettamente maggiore:  $\lambda P'_T = \lambda(P_T + \epsilon) > \lambda P_T$  e anche  $\lambda P'_B = \lambda(P_B + \epsilon) > \lambda P_T$ .  $\Rightarrow$  Contraddizione.

d) *Mostrate che la soluzione ottima del problema della Air Shangri-la implica che i viaggiatori in business class non acquistino mai il biglietto con anticipo prima della partenza, e che siano indifferenti tra fare questo e comprare quando comprano i viaggiatori in classe turistica.*

**Soluzione** Riprendete il vincolo  $IC_B$ :

$$v - \theta_B P_B - W_B \geq v - \theta_B P_T - W_T$$

dobbiamo dimostrare che il contratto ottimo per i viaggiatori di business implica  $W_B = 0$  e  $IC_B$  stringente. Abbiamo dimostrato al punto precedente che all'ottimo deve essere  $IR_T$  stringente, sappiamo che questo implica che  $IR_B$  non lo é. Dunque,

$$v - \theta_B P_B - W_B > 0$$

Dunque, per i viaggiatori di business class la compagnia aerea può scegliere  $W_B$  più basso possibile compatibile con la partecipazione, poiché questo elemento del contratto non ha effetto diretto sul profitto atteso della compagnia Shangri-la. Dunque, può offrire massima flessibilità ai viaggiatori business, i.e.  $W_B = 0$ . Studiamo i vincoli di compatibilità degli incentivi  $IC_T$  e  $IC_B$ :

$$\begin{aligned} v - \theta_B P_B &\geq v - \theta_B P_T - W_T & IC_B \\ v - \theta_T P_T - W_T &\geq v - \theta_T P_B & IC_T \end{aligned}$$

Sommando membro a membro, si ottiene:

$$\begin{aligned} v - \theta_B P_B + v - \theta_T P_T - W_T &\geq v - \theta_B P_T - W_T + v - \theta_T P_B \\ -\theta_B P_B - \theta_T P_T &\geq -\theta_B P_T - \theta_T P_B \\ (\theta_T - \theta_B)(P_B - P_T) &\geq 0 \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi  $\theta_T > \theta_B$ , per rispettare gli incentivi, deve essere  $P_B \geq P_T$ , cioè il principale deve offrire un prezzo più alto ai viaggiatori di business class rispetto a quello offerto a chi viaggia in classe turistica.

Dimostriamo adesso che  $IC_B$  é stringente all'ottimo, cioè

$$v - \theta_B P_B = v - \theta_B P_T - W_T$$

Ragioniamo per assurdo, supponendo che il contratto ottimo soddisfi  $IC_B$  come stretta disuguaglianza:

$$v - \theta_B P_B > v - \theta_B P_T - W_T > v - \theta_T P_T - W_T = 0$$

La compagnia aerea potrebbe aumentare  $P_B$  di un qualche  $\epsilon > 0$  piccolo, lasciando invariato  $W_B = 0$ , in modo tale che i viaggiatori business compreranno ancora il biglietto ( $IR_B \geq 0$ ) e ottenere profitti più elevati.  $\Rightarrow$  Una contraddizione.