Microeconomia della Produzione

Luca Panaccione

Lezione 4/2013

Problema di massimizzazione dell'utilità/1

• Ricordiamo che l'utilità marginale del bene l (valutata al paniere x) è data da

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}$$

• La soluzione del problema di massimizzazione dell'utilità è caratterizzata tramite le condizioni (necessarie) del primo ordine

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial c_\ell} \leq \lambda p_\ell, \quad \text{with equality if } x_\ell^* > 0. \tag{3.D.1}$$

Equivalently, if we let $\nabla u(x) = [\partial u(x)/\partial x_1, \dots, \partial u(x)/\partial x_L]$ denote the gradient vector of $u(\cdot)$ at x, we can write (3.D.1) in matrix notation as

$$\nabla u(x^*) \leq \lambda p \tag{3.D.2}$$

and

$$x^* \cdot [\nabla u(x^*) - \lambda p] = 0. \tag{3.D.3}$$

Thus, if we are at an interior optimum (i.e., if $x^* \gg 0$), we must have

$$\nabla u(x^*) = \lambda p. \tag{3.D.4}$$

Problema di massimizzazione dell'utilità/2

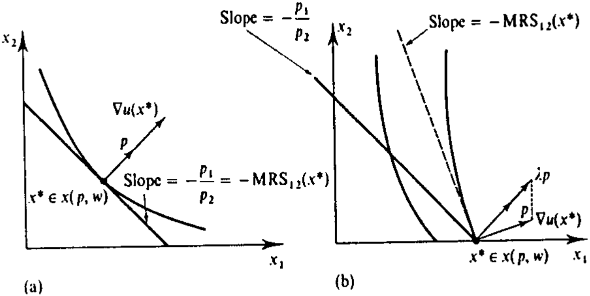

Figure 3.D.4
(a) Interior solution.
(b) Boundary solution.

- Sia $v(p,w) = \max\{u(x) \mid x \in \mathcal{B}(p,w)\}$. Clearly, $v(p,w) \geqslant u(x)$ per ogni $x \in \mathcal{B}(p,w)$

- In modo equivalente $v(p,w) = u(x)$ per ogni $x \in x(p,w)$

- $v(p,w)$ è la *funzione di utilità indiretta*

Proposition 3.D.3: Suppose that $u(\cdot)$ is a continuous utility function representing a locally nonsatiated preference relation $\succsim$ defined on the consumption set $X = \mathbb{R}^L_+$. The indirect utility function $v(p, w)$ is

(i) Homogeneous of degree zero.
(ii) Strictly increasing in w and nonincreasing in p_ℓ for any ℓ.
(iii) Quasiconvex; that is, the set $\{(p, w): v(p, w) \leq \bar{v}\}$ is convex for any $\bar{v}$.[11]
(iv) Continuous in p and w.

- Dimostriamo solo (i) e (ii)

◎ (i) $x(\alpha p, \alpha w) = x(p,w)$ per $\alpha > 0$ implica $v(\alpha p, \alpha w) = v(p,w)$

Funzione di utilità indiretta/2

- (iia) Sia $w' > w$. Dobbiamo mostrare che $v(p, w') > v(p, w)$
- Poiché $x(p, w) \subset \mathcal{B}(p, w) \subset \mathcal{B}(p, w')$, allora $v(p, w') \geqslant v(p, w)$
- Supponiamo che $v(p, w') = v(p, w)$ e scegliamo un paniere $x \in x(p, w)$
- Per l'ipotesi di non sazietà locale, esiste $y \in X$ arbitrariamente prossimo a x tale che
$$u(y) > u(x) = v(p, w) = v(p, w')$$
- Poiché $p \cdot x < w'$, segue che $p \cdot y < w'$ e quindi $y \in \mathcal{B}(p, w')$
- Perciò $v(p, w') \geqslant u(y)$,contraddizione
- Possiamo quindi concludere $v(p, w') > v(p, w)$

Funzione di utilità indiretta/3

• Se l'ipotesi di non sazietà locale non è verificata, allora può accadere che $w' > w$ e $v(p, w) = v(p, w')$

⊚ (iib) Siano p', p tali che $p'_k > p_k$ e $p'_j = p_j$ per $j \neq k$

⊚ Dobbiamo dimostrare che $v(p', w) \leqslant v(p, w)$

⊚ Scegliamo $x \in x(p', w)$, cosicché $p' \cdot x = w$

⊚ Poiché $x_l \geqslant 0$ e $p_l > 0$, $p_l x_l \leqslant p'_l x_l$ e quindi $p \cdot x \leqslant p' \cdot x = w$

⊚ Perciò $x \in \mathcal{B}(p, w)$ e quindi $u(x) = v(p', w) \leqslant v(p, w)$