

Verifica di ipotesi Inferenza IV

Maura Mezzetti

Esempio: problemi psichiatrico

Uno psichiatra vuole verificare se una piccola quantità di coca cola diminuisce il tempo di reazione in adulti. Il tempo di reazione per uno specifico test si assume distribuito come una Normale con media uguale a 0.15 secondi e $\sigma=0.2$. Ad un campione di 81 persone viene fatta bere una piccola quantità di Coca Cola e il tempo di reazione risulta 0.11 secondi.

Il campione permette di dar ragione allo psichiatra?

Introduzione

La distribuzione di un carattere nella popolazione viene descritta da una v.c. $X \sim F(x; \theta), \theta \in \Theta$. L'insieme dei valori ammissibili per θ viene denotato con il simbolo Θ e viene detto *spazio parametrico*.

Esempio: $X \sim N(\mu, 9), \theta = \mu, \Theta = (-\infty, +\infty)$

Per **ipotesi statistica** si intende un'affermazione o congettura che specifica completamente (ipotesi **semplice**) o parzialmente (ipotesi **composita**) la distribuzione di X .

Esempio: $\mu = 100 \Rightarrow X \sim N(100, 9)$

Formulazione delle ipotesi

Distinguiamo 2 tipologie di ipotesi:

- ▶ l'**ipotesi nulla**, che chiameremo anche H_0 , è l'affermazione che vogliamo sottoporre a verifica, e viene formalizzata come segue:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0, \quad \Theta_0 \subset \Theta$$

- ▶ l'**ipotesi alternativa**, che denoteremo con il simbolo H_1 . Viene spesso desunta in maniera subordinata, considerando la situazione complementare rispetto a H_0 .

$$H_1 : \theta \in \Theta_1, \quad \Theta_1 \subset \Theta, \Theta_1 \cap \Theta_0 = \emptyset.$$

Entrambe possono essere semplici o composte, anche se noi concentreremo l'attenzione soltanto sul caso in cui H_0 è semplice.

Esempio: $H_0 : \mu = 100$; $H_1 : \mu < 100$

Si osservi che se la varianza σ^2 fosse incognita, l'ipotesi nulla sarebbe composta, dal momento che specifica soltanto la media della distribuzione.

Ipotesi semplice la specificazione della distribuzione di probabilità di X è completa $H_0 : \theta = \theta_0$.

Ipotesi composta (o composita) se non specifica in modo completo la popolazione, ad esempio $\theta > \theta_0$

Un'ipotesi statistica del tipo $\theta \geq \theta_0$ ovvero $\theta < \theta_0$ viene detta **unidirezionale**; un'ipotesi del tipo $\theta \neq \theta_0$ viene detta **bidirezionale**.

Esempio: $H_1 : \mu < 100$ è un'ipotesi composta unidirezionale o unilaterale sinistra)

Nel seguito si considereranno ipotesi nulle semplici, mentre si considereranno le seguenti tipologie di ipotesi alternative:

- ▶ $H_1 : \theta = \theta_1$ con $\theta_1 \neq \theta_0$ (alternativa semplice);
- ▶ $H_1 : \theta > \theta_0$ (alternativa unilaterale destra);
- ▶ $H_1 : \theta < \theta_0$ (alternativa unilaterale sinistra)
- ▶ $H_1 : \theta \neq \theta_0$ (alternativa bilaterale)

Esempio: problemi psichiatrico

Uno psichiatra vuole verificare se una piccola quantità di coca cola diminuisce il tempo di reazione in adulti. Il tempo di reazione per uno specifico test si assume distribuito come una Normale con media uguale a 0.15 secondi e $\sigma=0.2$. Ad un campione di 81 persone viene fatta bere una piccola quantità di Coca Cola e il tempo di reazione risulta 0.11 secondi.

Il campione permette di dar ragione allo psichiatra?

Il tempo di reazione si suppone diminuire
Qual è l'ipotesi nulla e quale alternativa?

$$H_0 \quad \mu = 0.15$$

$$H_1 \quad \mu = 0.10$$

Logica e caratteristiche di un test statistico

Si chiama test delle ipotesi statistiche una regola di decisione definita sullo spazio campionario che conduce, in base all'evidenza statistica del campione osservato, a rifiutare o meno l'ipotesi nulla. La regola decisionale che conduce a rifiutare o non rifiutare H_0 si basa sul confronto tra i dati del campione e la popolazione sotto H_0 . Il confronto viene svolto utilizzando una statistica campionaria. Si dice che il test è *significativo* se conduce a rifiutare H_0 a favore di H_1 .

La decisione dipende dalla discrepanza che si rileva tra un'aspettativa fondata sull'ipotesi formulata e quanto si osserva nel campione.

La conclusione di un test statistico contempla la possibilità di errore.

Non si dice nulla circa la verità o falsità di H_0 , ma si afferma unicamente che l'ipotesi risulta più o meno ragionevole, alla luce dei dati e del modello statistico implicato da H_0 e della natura dell'ipotesi alternativa.

Data una popolazione $X \sim F(x; \theta)$, supponiamo di voler sottoporre a verifica l'ipotesi $H_0 : \theta = \theta_0$ contro l'alternativa unidirezionale $H_1 : \theta < \theta_0$.

Esempio: $X \sim N(\mu, 9)$; $H_0 : \mu = 100$, $H_1 : \mu < 100$

Al fine di sottoporre a verifica H_0 estraiamo un campione casuale

$$\{X_1, \dots, X_n\}, \quad X_i \sim \text{IID} \quad F(x_i; \theta)$$

e prendiamo in considerazione una statistica test, vale a dire una statistica campionaria:

$$T = t(X_1, \dots, X_n)$$

che permette di evidenziare se sia più ragionevole accettare H_0 o rifiutarla in favore dell'ipotesi alternativa.

Appare opportuno scegliere come statistica test uno stimatore di θ , del quale si conosca, in forma esatta o approssimata (teorema del limite centrale), la distribuzione di probabilità (per lo meno sotto H_0).

Esempio: Estraiamo un campione di $n = 20$ unità:

$\{X_1, \dots, X_n\}$, $X_i \sim N(\mu, 9)$. Consideriamo la statistica campionaria $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{9}{20})$, tale che $\bar{X}|H_0 \sim N(100, \frac{9}{20})$.

Dal momento che H_0 specifica interamente la distribuzione della statistica campionaria possiamo individuare un valore c , detto **valore critico**, tale che

$$P(T < c|H_0) = \alpha$$

dove α è una probabilità ad es. pari a 0.05 o 0.01.

In base ai valori di T distingueremo una **regione critica** o di **rifiuto**, rappresentata nel nostro caso da tutti i valori

$$R_\alpha : t(x_1, \dots, x_n) < c$$

ed una regione di accettazione,

$$A_\alpha : t(x_1, \dots, x_n) \geq c$$

Viene così effettuata una partizione dello spazio campionario in zona di accettazione e zona di rifiuto, mutualmente esclusive ed esaustive: $R_\alpha \cap A_\alpha = \emptyset, R_\alpha \cup A_\alpha = \Omega$

Esempio: Poniamo $\alpha = 0.05$; $P\left(\frac{\bar{X}-100}{\sqrt{0.45}} < -1.64\right) = 0.05$,

$$P(\bar{X} < 100 - 1.64\sqrt{0.45}) = P(\bar{X} < 98.90) = 0.05$$

Pertanto, $c = 98.90$

$$R_{0.05} = \{\bar{x} : \bar{x} < 98.90\}, A_{0.05} = \{\bar{x} : \bar{x} \geq 98.90\}$$

Esempio: problemi psichiatrico

Uno psichiatra vuole verificare se una piccola quantità di coca cola diminuisce il tempo di reazione in adulti. Il tempo di reazione per uno specifico test si assume distribuito come una Normale con media uguale a 0.15 secondi e $\sigma=0.2$. Ad un campione di 81 persone viene fatta bere una piccola quantità di Coca Cola e il tempo di reazione risulta 0.11 secondi.

Il campione permette di dar ragione allo psichiatra?

Il tempo di reazione si suppone diminuire
Qual è l'ipotesi nulla e quale alternativa?

$$H_0 \quad \mu = 0.15$$

$$H_1 \quad \mu = 0.10$$

Il tempo di reazione si suppone diminuire
Qual è l'ipotesi nulla e quale alternativa?

$$H_0 \quad \mu = 0.15$$

$$H_1 \quad \mu = 0.10$$

$$R = \{(x_1, \dots, x_n) : \bar{x} \leq 0.1134\}$$

Qual è il valore critico α ?

$$H_0 \quad \mu = 0.15$$

$$H_1 \quad \mu = 0.10$$

$$R = \{(x_1, \dots, x_n) : \bar{x} \leq 0.1134\}$$

$$\alpha = P(\bar{X} \leq 0.1134 | H_0)$$

$$\alpha = P(\bar{X} \leq 0.1134 | \mu = 0.15)$$

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{X} - 0.15}{\sqrt{\frac{0.2}{81}}} \leq \frac{0.1134 - 0.15}{\frac{0.2}{\sqrt{81}}}\right) = P(Z \leq -1.647)$$

$$\alpha = 0.05$$

Errore di I e II specie

A seconda del valore assunto da $t = t(x_1, \dots, x_n)$ decidiamo dunque di accettare o meno H_0 . La decisione è sottoposta a due tipologie di rischio:

Decisione	H_0 è vera	H_0 è falsa
Accettare H_0	Decisione corretta (prob. $1 - \alpha$)	Errore di II specie (prob. β)
Rifiutare H_0	Errore di I specie (prob. α)	Decisione corretta (Potenza $1 - \beta$)

dove abbiamo definito

$$\begin{aligned}\alpha &= P(R|H_0) = P(T < c|H_0), \\ 1 - \alpha &= P(A|H_0) = P(T \geq c|H_0), \\ 1 - \beta &= P(R|H_1) = P(T < c|H_1), \\ \beta &= P(A|H_1) = P(T \geq c|H_1),\end{aligned}$$

Nomenclatura:

α viene detta livello di significatività del test o
ampiezza (*size*) del test.

$(1 - \alpha)$ viene detta coefficiente di confidenza del test

$1 - \beta$ viene detta potenza del test

β è la probabilità dell'errore di seconda specie.

Thought Questions

In tribunale, le giurie devono prendere una decisione sulla colpevolezza o l'innocenza di un imputato.

Supponiamo che di far parte della giuria in un processo per omicidio.

È ovviamente un errore se la giuria dichiara colpevole il sospettato quando in realtà è innocente.

Qual è l'altro tipo di errore che la giuria potrebbe commettere?

Quale dei due errori è più grave?

Decision Results

H_0 : Innocente

Jury Trial			H_0 Test		
Verdict	Actual Situation		Decision	Actual Situation	
	Innocent	Guilty		H_0 True	H_0 False
Innocent	Correct	Error	Accept H_0	$1 - \alpha$	Type II Error (β)
Guilty	Error	Correct	Reject H_0	Type I Error (α)	Power ($1 - \beta$)

Esempio

Si consideri l'ipotesi alternativa semplice

$$H_1 : \mu = 99$$

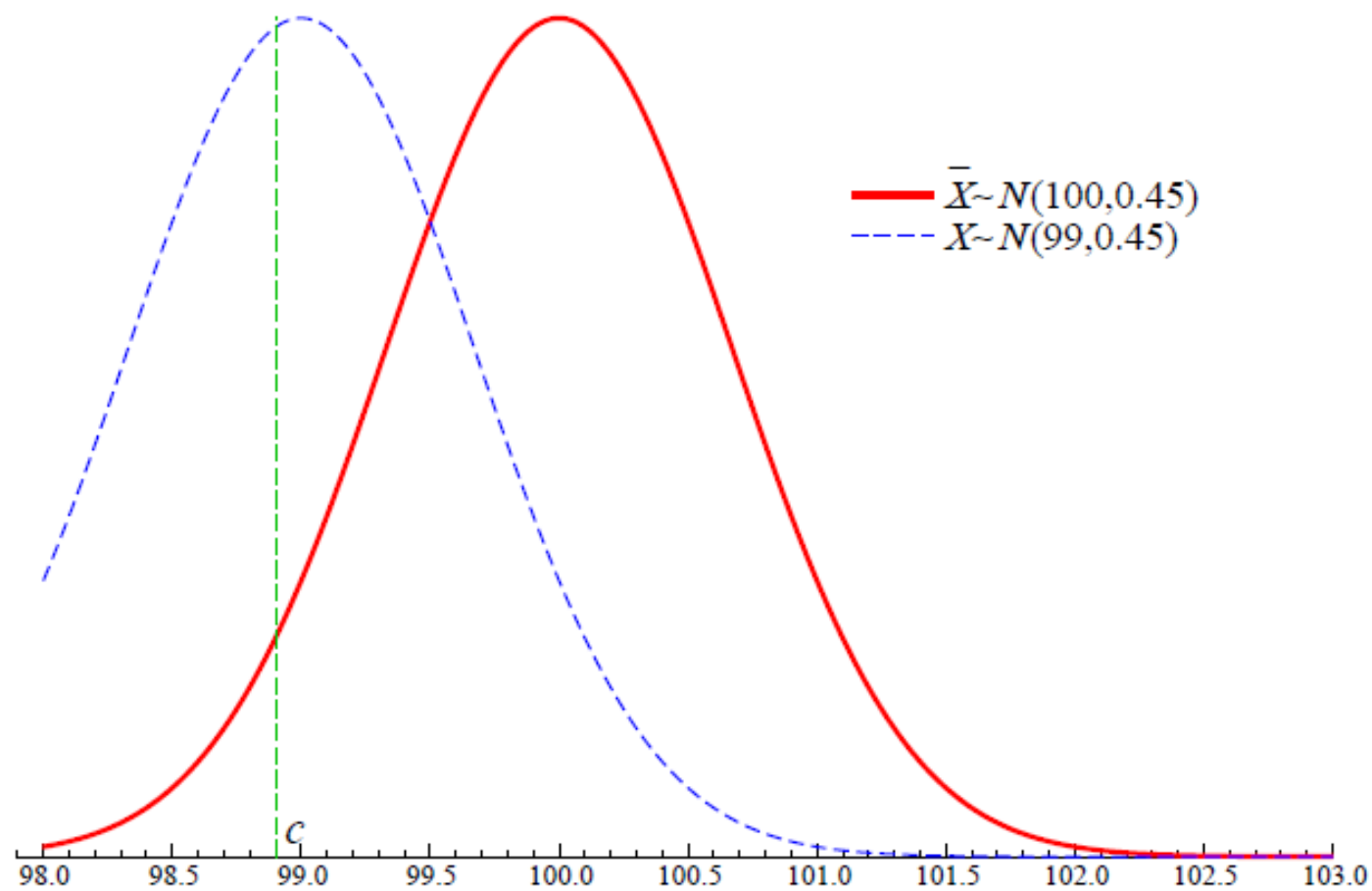
$$\alpha = P(\bar{X} < 98.90 | H_0 : \mu = 100) = 0.05,$$

$$1 - \alpha = P(\bar{X} \geq 98.90 | H_0 : \mu = 100) = 0.95,$$

$$1 - \beta = P(\bar{X} < 98.90 | H_1 : \mu = 99) = P\left(\frac{\bar{X} - 99}{\sqrt{0.45}} < \frac{98.90 - 99}{\sqrt{0.45}}\right) = \Phi(-0.15) = 0.44,$$

$$\beta = P(\bar{X} \geq 98.90 | H_1 : \mu = 99) = 0.56$$

Figura: Distribuzione campionaria sotto H_0 e H_1



Nel caso in cui $H_1 : \theta > \theta_0$ (alternativa unilaterale destra), le regioni di rifiuto e di accettazione vengono definite individuando un valore critico c , tale che

$$P(T > c | H_0) = \alpha.$$

$$R_\alpha = \{t(x_1, \dots, x_n) : t(x_1, \dots, x_n) > c\}$$

$$A_\alpha = \{t(x_1, \dots, x_n) : t(x_1, \dots, x_n) \leq c\}$$

Nel caso in cui $H_1 : \theta \neq \theta_0$ (alternativa bilaterale), le regioni di rifiuto e di accettazione vengono definite individuando un limite inferiore, $l_{\alpha/2}$, ed uno superiore, $u_{\alpha/2}$, tali che $P(l_{\alpha/2} \leq T \leq u_{\alpha/2} | H_0) = 1 - \alpha$.

$$R_\alpha = \{t(x_1, \dots, x_n) : t(x_1, \dots, x_n) < l_{\alpha/2} \text{ oppure } t(x_1, \dots, x_n) > u_{\alpha/2}\}$$

$$A_\alpha = \{t(x_1, \dots, x_n) : l_{\alpha/2} \leq t(x_1, \dots, x_n) \leq u_{\alpha/2}\}$$

Il p -value

La decisione di rifiutare o accettare $H_0 : \theta = \theta_0$ dipende dal livello di significatività α prescelto.

In un test con alternativa unilaterale sinistra $H_1 : \theta < \theta_0$, dato il valore osservato della statistica test, $t(x_1, \dots, x_n)$, possiamo calcolare la probabilità di ottenere un valore della statistica test inferiore a quello osservato, che chiamiamo $p - value$

$$p - value = P \{ T(X_1, \dots, X_n) < t(x_1, \dots, x_n) \}.$$

Esempio:

$X \sim N(\mu, 9)$, $H_0 : \mu = 100$, $H_1 : \mu < 100$, $n = 20$.

Si supponga che la statistica test calcolata sul campione osservato sia pari a $\bar{x} = 98.5$

$$p\text{-value} = P(\bar{X} < 98.5 | H_0) = \Phi\left(\frac{98.5 - 100}{\sqrt{0.45}}\right) = \Phi(-2.24) = 0.013$$

Qualora invece $\bar{x} = 99.3$

$$p\text{-value} = P(\bar{X} < 99.3 | H_0) = \Phi\left(\frac{99.3 - 100}{\sqrt{0.45}}\right) = \Phi(-1.04) = 0.148$$

Nel caso di test con regione di rifiuto unilaterale destra,

$$p - value = P\{T(X_1, \dots, X_n) > t(x_1, \dots, x_n)\}$$

Nel caso di test con regione di rifiuto bilaterale,

$$p - value = P\{|T(X_1, \dots, X_n)| > t(x_1, \dots, x_n)\}$$

Example: Computation of α and β

Let $X_1, \dots, X_3$ be a random sample from a population $N(\mu, \sigma^2 = 4)$ and let $H_0 : \mu = 0$ and $H_1 : \mu = 1$ and let consider a test with the following rejection region:

$$R = \{(x_1, x_2, x_3) : X_1 + X_2 - X_3 > 0.8\}$$

Calculate α and β

α and β

$$\alpha = P(X_1 + X_2 - X_3 > 0.8 | \mu = 0) \text{ and}$$

$$\beta = P(X_1 + X_2 - X_3 \leq 0.8 | \mu = 1)$$

$$X_1 + X_2 - X_3 \sim N(\mu, 3 \times \sigma^2)$$

$$\text{Let } Y = X_1 + X_2 - X_3$$

- Under null hypothesis: $Y \sim N(0, 12)$

- Under alternative hypothesis: $Y \sim N(1, 12)$

$$\alpha = P(Y > 0.8 | \mu = 0) = P\left(\frac{Y-0}{\sqrt{12}} > \frac{0.8-0}{\sqrt{12}}\right) = P(Z > 0.23) = 0.41$$

$$\beta = P(Y \leq 0.8 | \mu = 1) = P\left(\frac{Y-1}{\sqrt{12}} > \frac{0.8-1}{\sqrt{12}}\right) = P(Z \leq -0.058) = 0.477$$

Esempio: problemi psichiatrico

Uno psichiatra vuole verificare se una piccola quantità di coca cola diminuisce il tempo di reazione in adulti. Il tempo di reazione per uno specifico test si assume distribuito come una Normale con media uguale a 0.15 secondi e $\sigma=0.2$. Ad un campione di 81 persone viene fatta bere una piccola quantità di Coca Cola e il tempo di reazione risulta 0.11 secondi.

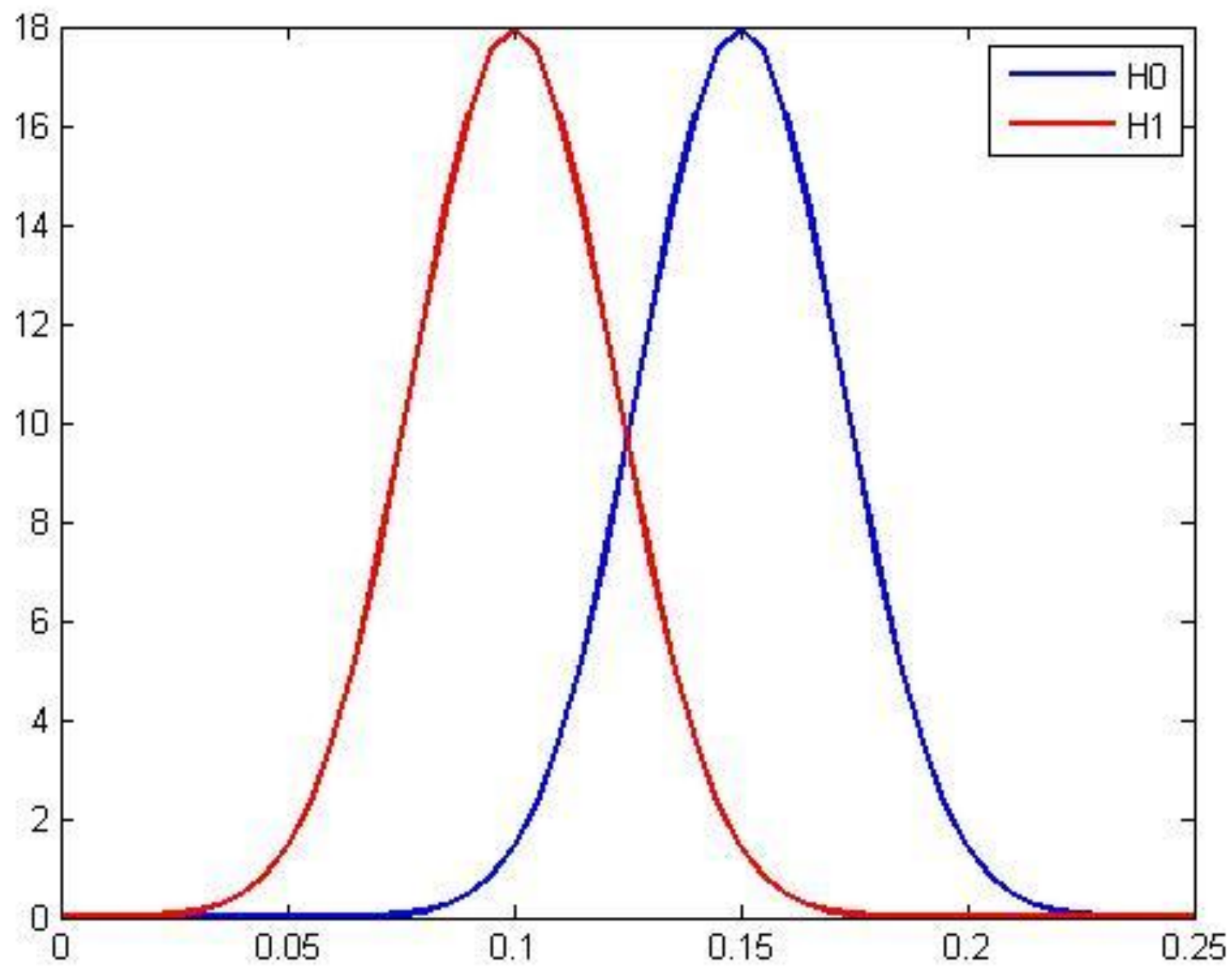
Il campione permette di dar ragione allo psichiatra?

Verificare l'ipotesi nulla $H_0 \mu = 0.15$
versus l'ipotesi alternative $H_1 \mu = 0.10$
avendo fissato $\alpha = 0.05$

Il tempo di reazione si suppone diminuire
Qual è l'ipotesi nulla e quale alternativa?

$$H_0 \quad \mu = 0.15$$

$$H_1 \quad \mu = 0.10$$



Il tempo di reazione si suppone diminuire
Qual è l'ipotesi nulla e quale alternativa?

$$H_0 \quad \mu = 0.15$$

$$H_1 \quad \mu = 0.10$$

$$R = \{(x_1, \dots, x_n) : \bar{x} \leq k\}$$

$$R = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \bar{x} \leq \mu_0 - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

$$R = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq -z_{1-\alpha} \right\}$$

$$\alpha = P(\text{Reject } H_0 \mid H_0)$$

$$\alpha = P(\bar{X} \leq k \mid \mu = 0.15)$$

$$P(\bar{X} \leq k \mid \mu = 0.15) = 0.05$$

$$P\left(\frac{\bar{X} - 0.15}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \frac{k - 0.15}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = 0.05$$

$$\frac{k - 0.15}{\sigma / \sqrt{n}} = -z_{1-\alpha}$$

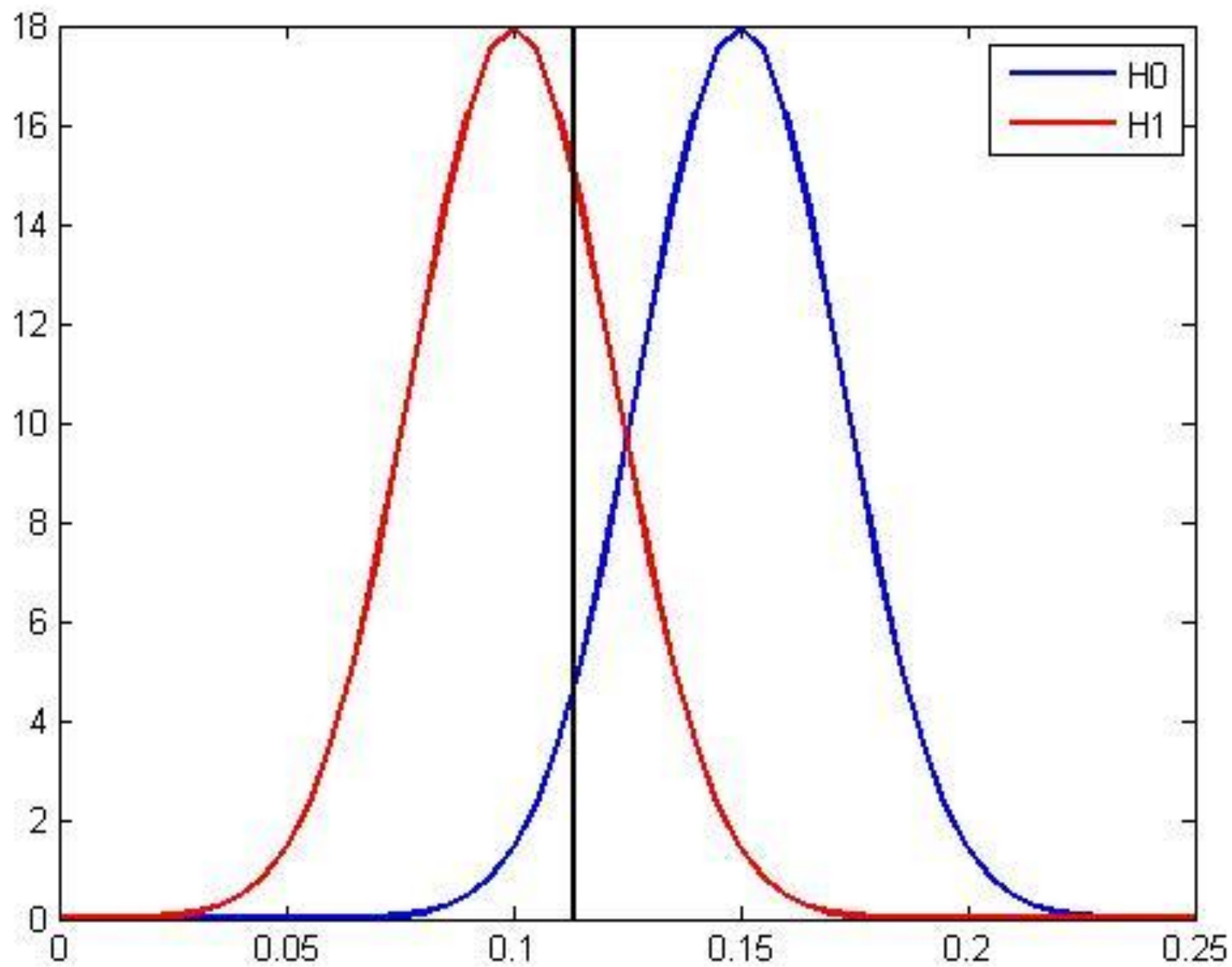
$$k = 0.15 - z_{0.95} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.15 - 1.645 \times \frac{0.2}{9}$$

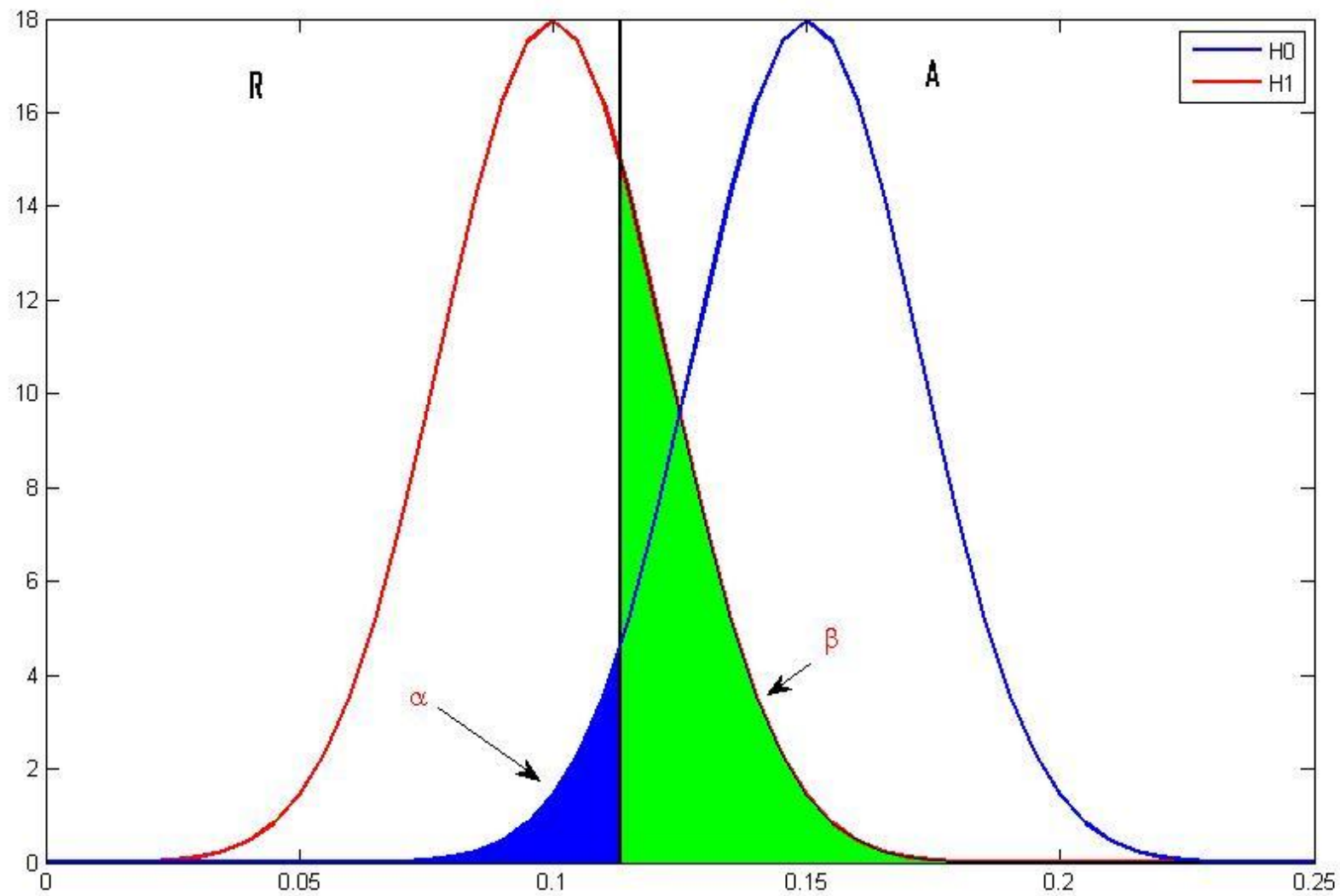
Il tempo di reazione si suppone diminuire
Qual è l'ipotesi nulla e quale alternativa?

$$H_0 \quad \mu = 0.15$$

$$H_1 \quad \mu = 0.10$$

$$R = \{(x_1, \dots, x_n) : \bar{x} \leq 0.1134\}$$

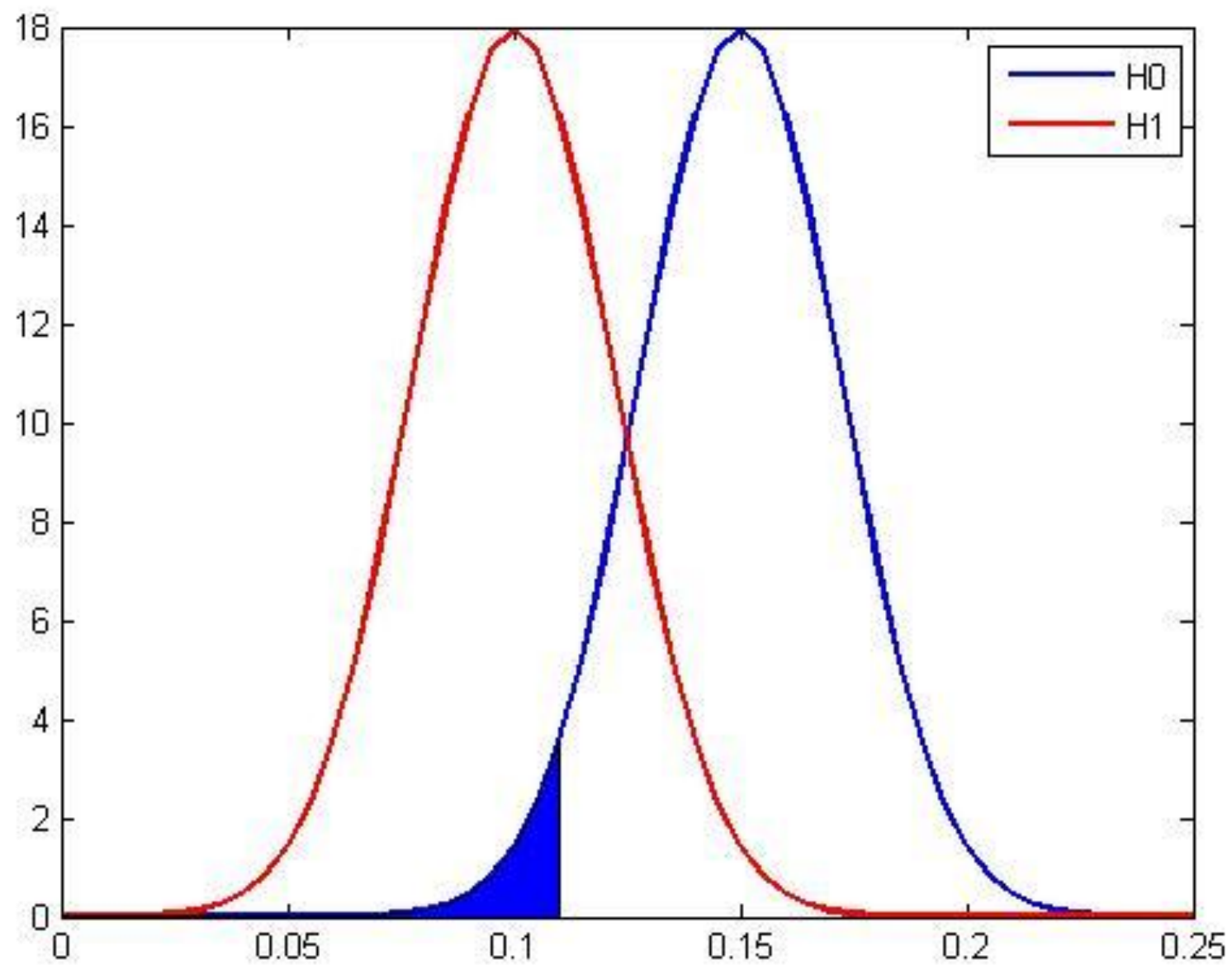




Calcolo β , probabilità errore secondo tipo

$$\beta = P(\bar{X} > 0.1134 \mid \mu = 0.10) = P\left(\frac{\bar{X} - 0.10}{\frac{0.2}{\sqrt{81}}} > \frac{0.1134 - 0.10}{\frac{0.2}{\sqrt{81}}}\right)$$
$$\beta = P(\bar{X} > 0.1134 \mid \mu = 0.10) = P(Z > .6) = 0.2743$$

$$\alpha=0.05 \quad \beta=0.2743$$



Il tempo di reazione si suppone diminuire
Qual è l'ipotesi nulla e quale alternativa?

$$H_0 \quad \mu = 0.15$$

$$H_1 \quad \mu < 0.15$$

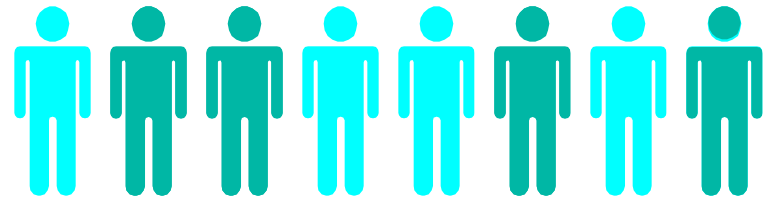
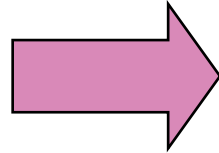
Il tempo di reazione si suppone diminuire
Qual è l'ipotesi nulla e quale alternativa?

$$H_0 \quad \mu = 0.15$$

$$H_1 \quad \mu < 0.15$$

Verifica di Ipotesi

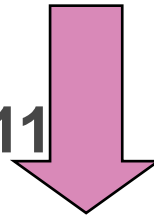
Io credo che la
media del tempo di
Reazione sia 0.15
(Ipotesi)



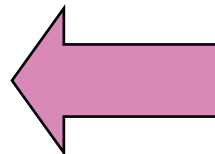
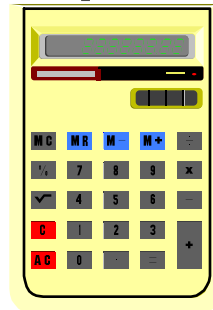
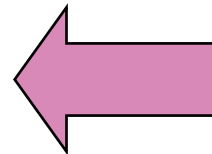
Population

$E' \quad \bar{x} = 0.11 < \mu = 0.15?$

La media
Campionaria risulta 0.11



Sample



yes

REJECT

Hypothesis

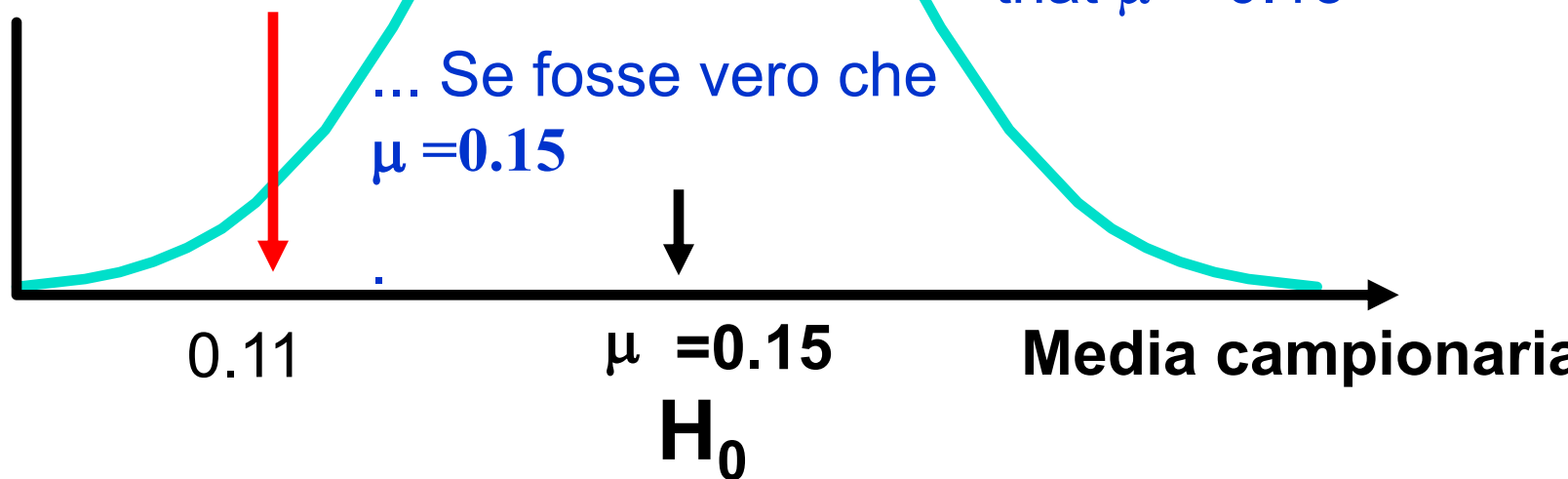
no

ACCEPT

Distribuzione campionaria

È verosimile
osservare un
valore così
basso ...

... Therefore,
we reject the
null hypothesis
that $\mu = 0.15$



Se l'ipotesi nulla fosse vera, avrei potuto osservare una media campionaria uguale a 0.11 da una distribuzione campionaria con valore centrale uguale a 0.15 deviazione standard $\sigma=0.2$?

$$P(\bar{X} < 0.11 \mid \mu = 0.15) = P\left(\frac{\bar{X} - 0.15}{\frac{0.2}{\sqrt{81}}} < \frac{0.11 - 0.15}{\frac{0.2}{\sqrt{81}}}\right)$$

$$P(\bar{X} < 0.11) = P(Z < -1.8) = 1 - P(Z < 1.8) = 0.0359$$

0.0359 rappresenta la probabilità di osservare un valore campionario ancora più estremo di ciò che è stato effettivamente osservato, cioè 0.11.

P-value

- Probabilità di osservare un valore ancora più estremo di quello effettivamente osservato
- Una misura di quanto è verosimile quanto osservato

decisione

- $P\text{-value} < \alpha$ rifiuto l'ipotesi nulla
- $P\text{-value} > \alpha$ accetto l'ipotesi nulla
- α 0,1 0.05 0.01

Test per la media di una popolazione normale con varianza nota

Popolazione $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; σ^2 nota.

Specificazione del sistema di ipotesi

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Nel seguito considereremo i casi di alternativa unilaterale e bilaterale.

Estrazione di un campione casuale di dimensione n

$\{X_1, \dots, X_n\}$, $X_i \sim IID \quad N(\mu_0, \sigma^2)$.

Determinazione della statistica test e della sua distribuzione

Si considera la media campionaria $\bar{X}$, la cui distribuzione sotto H_0 è

$$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n), \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

[Determinazione del livello di significatività (α)

Valori tipici di α sono 0.10, 0.05, 0.01, 0.001

Definizione della regione di rifiuto

H_1	Regione di rifiuto per Z	Regione di rifiuto per $\bar{X}$
$\mu > \mu_0$	$Z > z_\alpha$	$\bar{X} > \mu_0 + z_\alpha \sigma / \sqrt{n}$
$\mu < \mu_0$	$Z < -z_\alpha$	$\bar{X} < \mu_0 - z_\alpha \sigma / \sqrt{n}$
$\mu \neq \mu_0$	$ Z > z_{\alpha/2}$	$ \bar{X} - \mu_0 > z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$

dove z_α rappresenta il $100(1 - \alpha)$ -mo percentile della distribuzione normale, tale che $P(Z < z_\alpha) = 1 - \alpha$, mentre $P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.]

Calcolo della statistica test e del p-value Sia $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ il valore della media campionaria nel campione osservato.

Costruiamo il valore

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

La decisione può equivalentemente essere riferita a z .

H_1	Rifiuto H_0 se	ovvero	p-value
$\mu > \mu_0$	$\bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \sigma / \sqrt{n}$	$z > z_\alpha$	$1 - \Phi(z)$
$\mu < \mu_0$	$\bar{x} < \mu_0 - z_\alpha \sigma / \sqrt{n}$	$z < -z_\alpha$	$\Phi(z)$
$\mu \neq \mu_0$	$ \bar{x} - \mu_0 > z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$	$ z > z_\alpha$	$\Phi(-z) + [1 - \Phi(z)]$

Decisione finale Accetto o rifiuto H_0 .

Esercizio

Gli americani passano in media 8.5 minuti al giorno a leggere i quotidiani. Un ricercatore è dell'opinione che gli individui che hanno cariche di tipo dirigenziale passino un tempo superiore alla media nazionale a leggere i quotidiani e a tale proposito ha selezionato un campione di 36 manager ottenendo una media campionaria di 8.8 minuti al giorno.

Supponendo che il tempo di lettura di quotidiani al giorno sia una v.a. Normale con varianza $\sigma^2=1$, a quali conclusioni si può arrivare?

(Utilizzare un'ampiezza del test pari a $\alpha=0.05$)

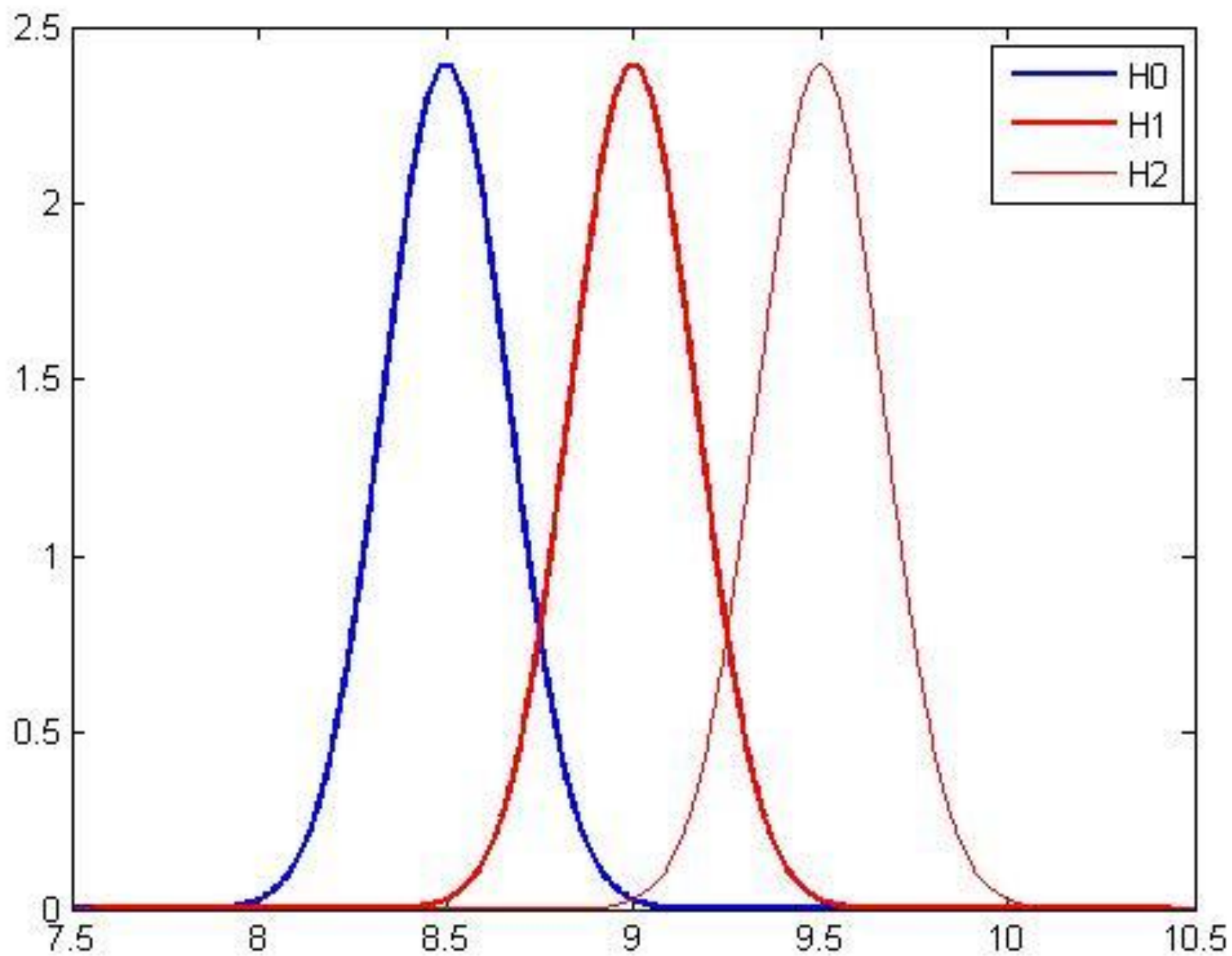
Soluzione

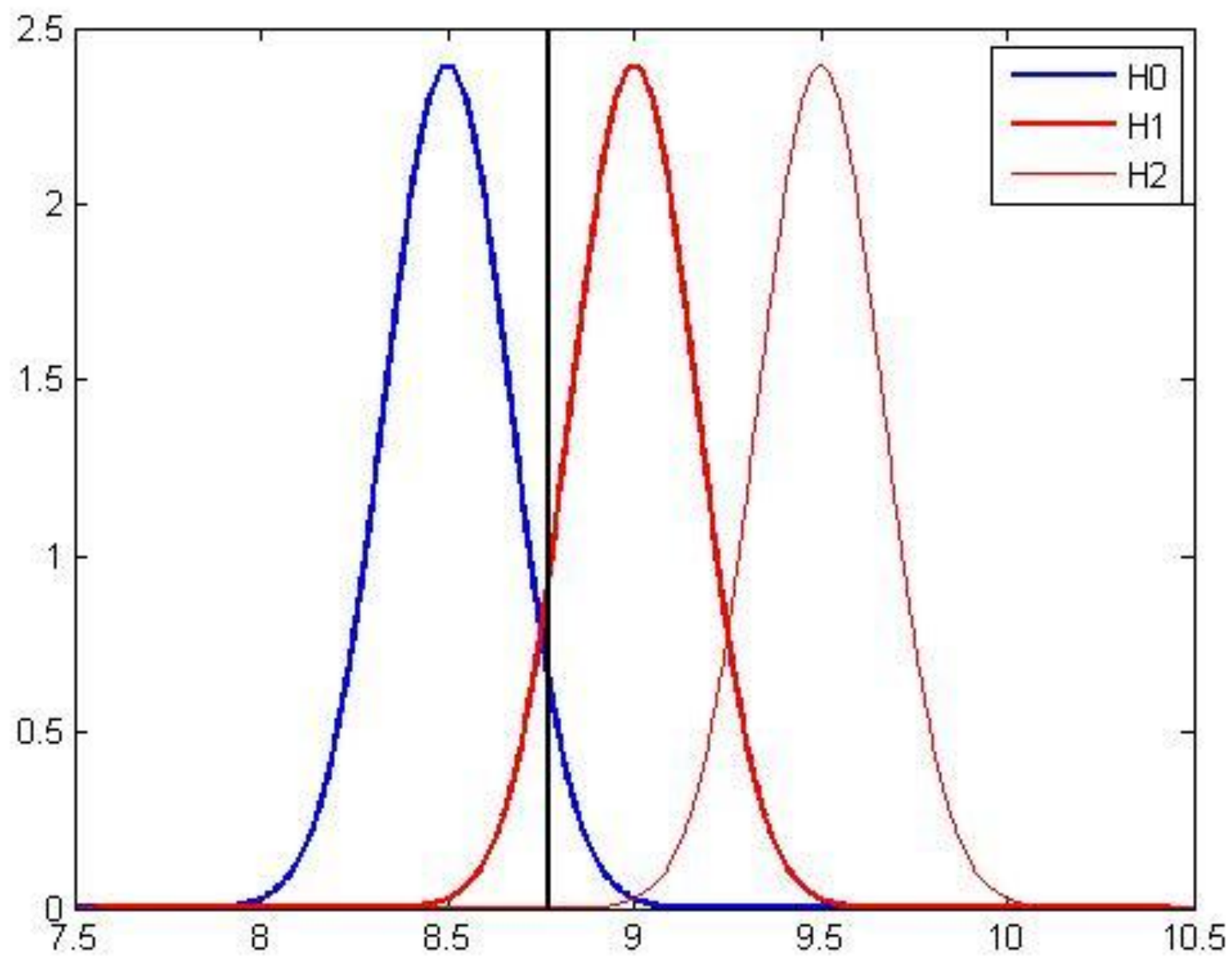
Sistema di ipotesi:

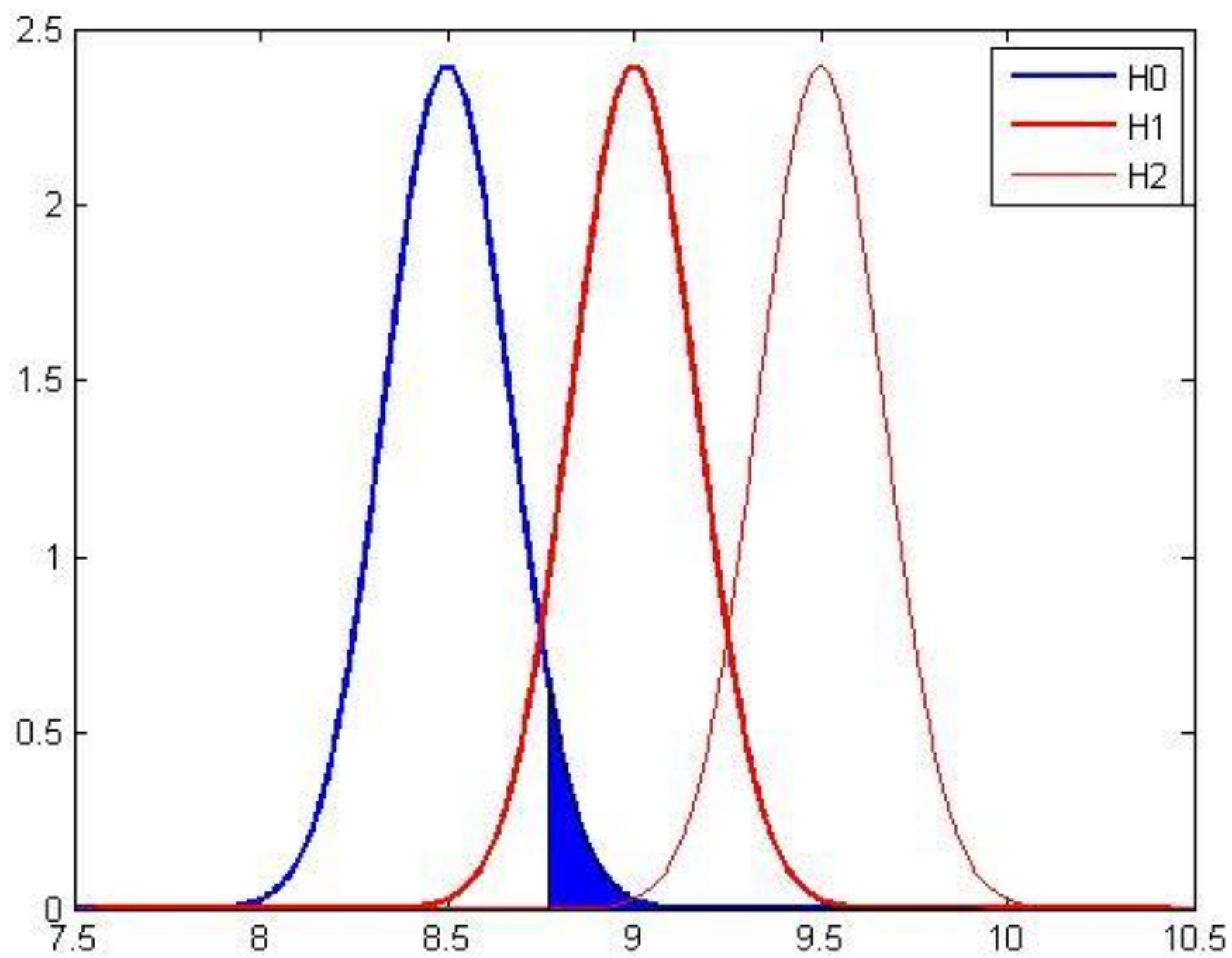
$$H_0: \mu = 8.5$$

$$H_1: \mu > 8.5$$

$$\bar{x} = 8.8 \quad \alpha = 0.05 \quad \sigma = 1 \quad n = 36$$







Soluzione

Sistema di ipotesi:

$$H_0: \mu = 8.5$$

$$H_1: \mu > 8.5$$

$$\bar{x} = 8.8 \quad \alpha = 0.05 \quad \sigma = 1 \quad n = 36$$

$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq 1.64 \right\} = \left\{ \frac{\bar{x} - 8.5}{1/\sqrt{6}} \geq 1.64 \right\} \quad 1.8 \geq 1.64$$

$$R = \left\{ \bar{x} \geq \mu_0 + 1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = \left\{ \bar{x} \geq 8.5 + 1.64 \frac{1}{6} \right\} = \{ \bar{x} \geq 8.7733 \} \quad 8.8 \geq 8.7733$$

$$p\text{-value} = P(\bar{X} \geq 8.8 \mid \mu = 8.5) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu = 8.5 \right)$$

$$p\text{-value} = P(Z \geq 1.8 \mid \mu = 8.5) = 0.036$$

Soluzione

Decisione:

Rifiuto (ampiezza = 0.05 , p-value = 0.036)

Gli individui che hanno cariche di tipo dirigenziale passano un tempo superiore alla media nazionale a leggere i quotidiani

Verifica di ipotesi

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ varianza nota $H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$

$$R = \left\{ \bar{x} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{1-\alpha} \right\}$$

$$p\text{-value} = P(\bar{X} \geq \bar{x} \mid \mu = \mu_0)$$

Verifica di ipotesi

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ varianza nota $H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$

$$R = \left\{ \bar{x} \leq \mu_0 - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq -z_{1-\alpha} \right\}$$

$$p\text{-value} = P(\bar{X} \leq \bar{x} \mid \mu = \mu_0)$$

Verifica di ipotesi

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ varianza nota $H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

$$R = \left\{ \bar{x} \leq \mu_0 - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cup \bar{x} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

$$R = \left\{ \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq z_{1-\alpha/2} \right\}$$

Verifica di ipotesi

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ varianza NON nota

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$

$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq t_{1-\alpha}^{n-1} \right\}$$

$$p\text{-value} = P(\bar{X} \geq \bar{x} \mid \mu = \mu_0)$$

Verifica di ipotesi

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ varianza NON nota

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$

$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \leq -t_{1-\alpha}^{n-1} \right\}$$

$$p\text{-value} = P(\bar{X} \leq \bar{x} \mid \mu = \mu_0)$$

Verifica di ipotesi

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ varianza NON nota

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$R = \left\{ \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right| \geq t_{1-\alpha/2}^{n-1} \right\}$$

Test per la media di una popolazione normale con varianza incognita

Popolazione $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; σ^2 incognita.

Specificazione del sistema di ipotesi

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Nel seguito considereremo i casi di alternativa unilaterale e bilaterale.

Estrazione di un campione casuale di dimensione n

$\{X_1, \dots, X_n\}$, $X_i \sim IID \quad N(\mu_0, \sigma^2)$.

Determinazione della statistica test e della sua distribuzione

La varianza incognita può essere stimata utilizzando la varianza campionaria

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2.$$

Si considera la media campionaria $\bar{X}$, la cui distribuzione sotto H_0 non è completamente specificata, $\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$, tuttavia

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

T ha distribuzione t di Student con $n - 1$ gradi di libertà.

[Determinazione del livello di significatività (α)

Definizione della regione di rifiuto

H_1	Regione di rifiuto per T	Regione di rifiuto per $\bar{X}$
$\mu > \mu_0$	$T > t_\alpha$	$\bar{X} > \mu_0 + t_\alpha S / \sqrt{n}$
$\mu < \mu_0$	$T < -t_\alpha$	$\bar{X} < \mu_0 - t_\alpha S / \sqrt{n}$
$\mu \neq \mu_0$	$ T > t_{\alpha/2}$	$ \bar{X} - \mu_0 > t_{\alpha/2} S / \sqrt{n}$

dove t_α rappresenta il $100(1 - \alpha)$ -mo percentile della distribuzione t di Student con $n - 1$ gradi di libertà, tale che $P(T < t_\alpha) = 1 - \alpha$, mentre $P(T < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.]

Calcolo della statistica test e del p-value

Sia $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ il valore della media campionaria nel campione osservato. Sia inoltre

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Costruiamo il valore

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

H_1	Rifiuto H_0 se	ovvero	p-value
$\mu > \mu_0$	$\bar{x} > \mu_0 + t_\alpha s/\sqrt{n}$	$t > t_\alpha$	$P(T > t)$
$\mu < \mu_0$	$\bar{x} < \mu_0 - t_\alpha s/\sqrt{n}$	$t < -t_\alpha$	$P(T < t)$
$\mu \neq \mu_0$	$ \bar{x} - \mu_0 > t_{\alpha/2} s/\sqrt{n}$	$ t > t_\alpha$	$P(T > t)$

Esercizio

Il direttore dell'Ospedale XYZ, situato in un quartiere molto povero nei sobborghi di New York, sospetta che i neonati che nascono lì abbiano un peso inferiore rispetto alla media nazionale (pari a 3.2 Kg), tale da dover richiedere un intervento di prevenzione sulla malnutrizione delle donne del quartiere.

Possiamo supporre che la variabile aleatoria X ="peso alla nascita" si distribuisca (nel quartiere) come una normale di valore atteso non noto μ e varianza non nota σ^2 . Il direttore decide allora di verificare l'ipotesi $H_0: \mu=3.2$ in alternativa all'ipotesi $H_1: \mu<3.2$,

Esercizio

Il direttore dell'ospedale misura quindi il peso $(x_1, x_2, \dots, x_{81})$ di 81 bambini scelti casualmente tra i neonati nell'ultimo anno e riscontra che

$$\sum_{i=1}^{81} x_i = 234.9 \quad \sum_{i=1}^{81} x_i^2 = 1001.21$$

- Proporre un opportuno stimatore non distorto per il parametro σ^2 e fornirne una stima.
- Calcolare l'intervallo di confidenza a livello $1-\alpha=0.9$ per il parametro μ .
- Scrivere l'espressione analitica del p-value corrispondente alla realizzazione campionaria osservata e calcolarne il valore. Decidere inoltre se il direttore riterrà necessario un intervento di sanità pubblica contro la malnutrizione, avendo fissato α , il livello di significatività del test uguale a 0.025 (motivare la risposta).

Soluzione

$$\bar{x} = 2.9$$

$$s^2 = \frac{1}{81} \sum_{i=1}^{81} x_i^2 - \left(\frac{1}{81} \sum_{i=1}^{81} x_i \right)^2 = \frac{1001.21}{81} - \left(\frac{234.9}{81} \right)^2 = 12.3606 - 2.9^2 = 12.3606 - 8.41 = 3.9506$$

$$s_c^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{81}{80} s^2 = 4$$

$$90\%CI = \left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{s_c}{\sqrt{n}}; \quad \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{s_c}{\sqrt{n}} \right] = \left[2.9 - 1.645 \frac{2}{9}; \quad 2.9 + 1.645 \frac{2}{9} \right] = [2.5344, \quad 3.6256]$$

$$\begin{aligned}
 p\text{-value} &= P(\bar{X} < \bar{x} \mid \mu = 3.2) = P(\bar{X} < 2.9 \mid \mu = 3.2) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s_c}{\sqrt{n}}} < \frac{2.9 - 3.2}{\frac{s_c}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(T^{n-1} < \frac{2.9 - 3.2}{\frac{s_c}{\sqrt{n}}}\right) = \\
 &= P\left(Z < \frac{2.9 - 3.2}{\frac{s_c}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z < \frac{2.9 - 3.2}{\frac{2}{9}}\right) = P(Z < -1.35) = 1 - 0.9115 = 0.0885
 \end{aligned}$$

$$R = \left\{ \bar{x} \leq \mu - z_{0.025} \frac{s}{\sqrt{n}} \right\} = \left\{ \bar{x} \leq 3.2 - z_{0.025} \frac{s}{\sqrt{9}} \right\}$$

$$R = \left\{ \bar{x} \leq 3.2 - 1.96 \frac{s}{\sqrt{9}} \right\} \quad 2.9 \leq 2.76? \quad NO$$

$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leq -z_{0.025} \right\} = \left\{ \frac{\bar{x} - 3.2}{\frac{s}{\sqrt{81}}} \leq -z_{0.025} \right\} \quad -1.35 \leq -1.96? \quad NO$$

Decisione

Accettiamo l'ipotesi nulla, poiché il p-value è maggiore di α , non si ritiene necessario un intervento di prevenzione sulla malnutrizione delle donne del quartiere.

Esercizio

La distribuzione delle pressioni diastoliche delle donne della popolazione di donne diabetiche di età compresa fra i 30 e i 34 anni ha una media μ non nota, mentre la deviazione standard è $\sigma = 9.1 \text{ mmHg}$.

Può essere utile ai medici sapere se la media di questa popolazione è uguale alla pressione diastolica media di 74.4 mmHg della popolazione generale delle donne di questa fascia di età.

(a) Qual è l'ipotesi nulla del test?

(b) Qual è l'ipotesi alternativa?

(c) Si seleziona un campione casuale di 10 donne diabetiche, la loro pressione diastolica media è $\bar{x} = 84 \text{ mmHg}$.

Utilizzando questa informazione, eseguire un test bilaterale ad un livello di significatività $\alpha = 0.05$.

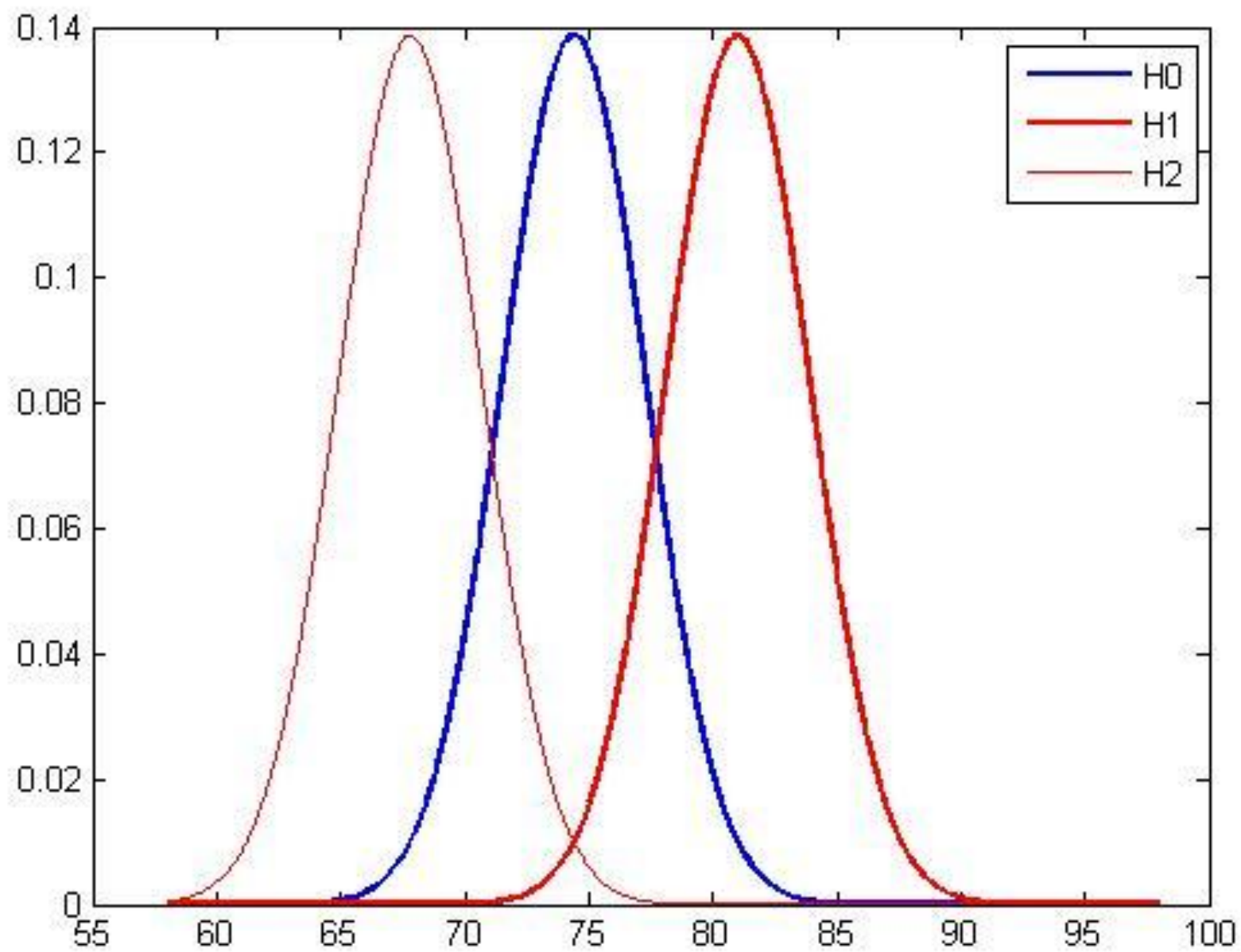
(d) Quale conclusione si può trarre dai risultati del test?

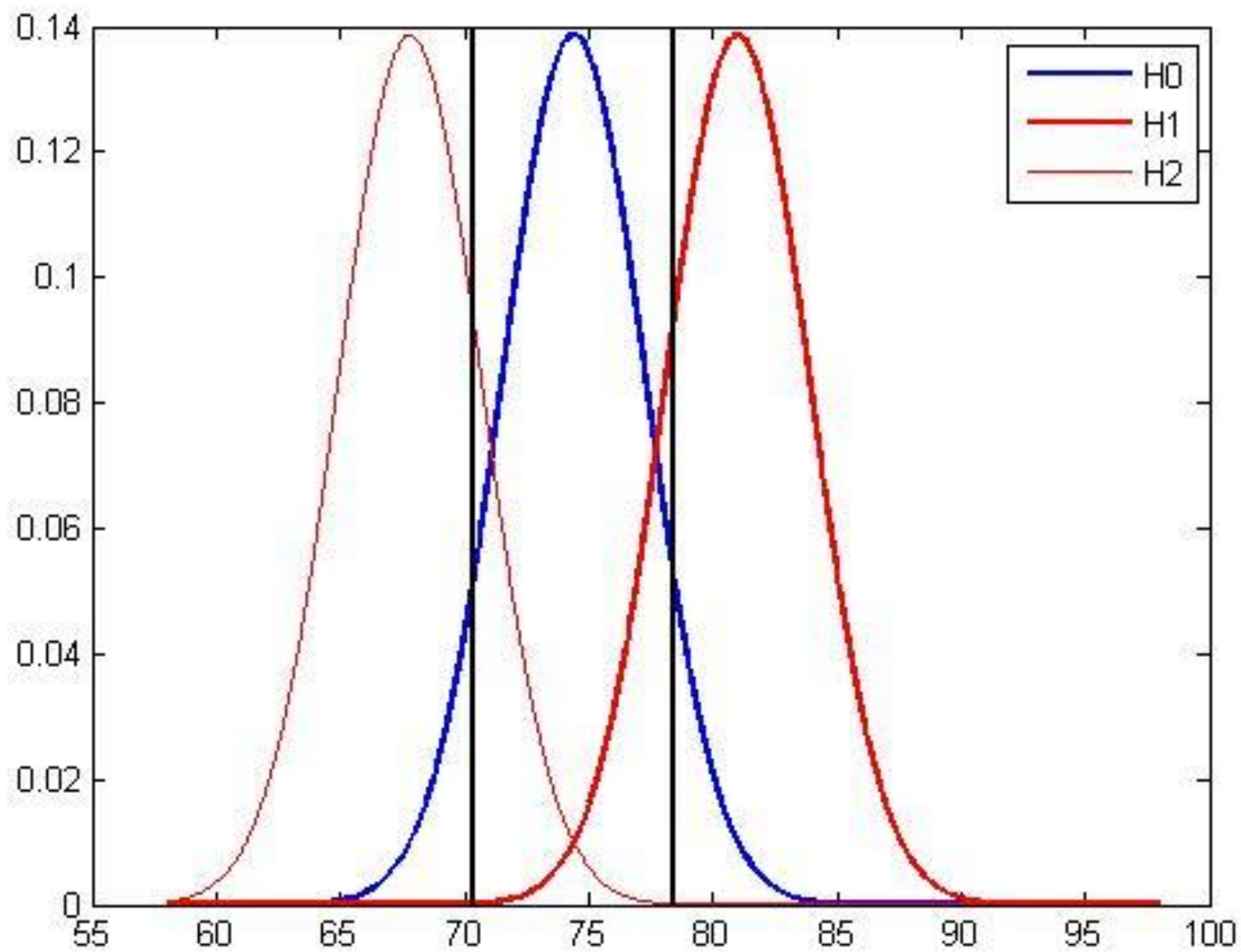
(e) La conclusione sarebbe stata diversa con $\alpha = 0.01$ invece di 0.05?

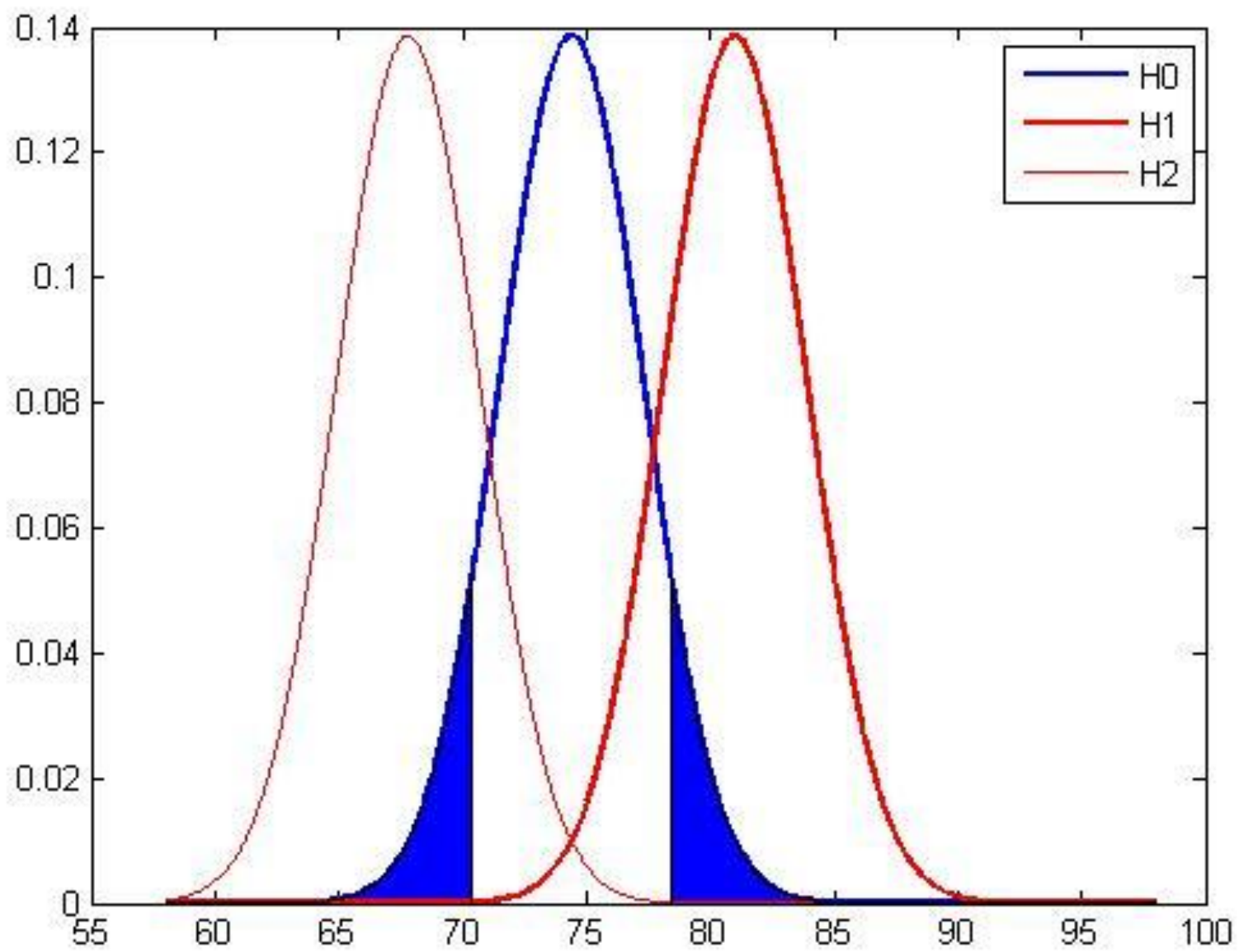
Soluzione

L'ipotesi nulla del test è $H_0 : \mu = 74.4 \text{ mmHg}$

L'ipotesi alternativa del test è $H_A : \mu \neq 74.4 \text{ mmHg}$.







$$R = \{\bar{x} \leq k_1 \cup \bar{x} \geq k_2\}$$

$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq k_1 \cup \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq k_2 \right\}$$

$$R = \left\{ \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq k \right\}$$

$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq -z_{1-\alpha/2} \cup \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq z_{1-\alpha/2} \right\}$$

$$R = \left\{ \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| > z_{1-\alpha/2} \right\}$$

$$R = \left\{ \bar{x} \leq \mu_0 - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cup \bar{x} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

Soluzione

L'ipotesi nulla del test è $H_0 : \mu = 74.4 \text{ mmHg}$

L'ipotesi alternativa del test è $H_A : \mu \neq 74.4 \text{ mmHg}$.

Poichè conosciamo la deviazione standard $\sigma = 9.1 \text{ mmHg}$, utilizziamo il test. Poichè nel nostro esempio $n = 10$ e media $\bar{x} = 84 \text{ mmHg}$, avremo che il valore di

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{84 - 74.4}{\frac{9.1}{\sqrt{10}}} = 3.33$$

$$p\text{-value} = 2 \times P(Z \geq z) = 2 \times P(Z \geq 3.33) < 0.01$$

Rifiutiamo l'ipotesi nulla!

Esercizio

In una popolazione di donne in gravidanza è noto che il livello di glicemia nel sangue si distribuisce approssimativamente secondo una curva normale con media $\mu_0 = 78.3$ mg/100ml e varianza $\sigma^2 = (13.5 \text{ mg/100})^2$. In un campione di $n = 100$ donne gravide si rivela un livello medio di glicemia di 81.1 mg/100ml. Ci si chiede se la variazione riscontrata tra campione e popolazione può portare alla conclusione che le donne appartenenti al campione presentano scompensi glicemici

verificare l'ipotesi nulla $H_0: \mu = 78.3 \text{ } \mu\text{g}/\text{m}^3$ mg verso l'ipotesi alternativa $H_1: \mu > 78.3 \text{ } \mu\text{g}/\text{m}^3$, avendo fissato $\alpha = 0.05$.

RIFIUTIAMO IPOTESI NULLA

$$R = \left\{ \bar{x} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{s^2}{n}} \right\} = \{ \bar{x} \geq 78.3 + 1.645 \times 1.35 \} = \{ \bar{x} \geq 80.52 \}$$

$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \geq z_{1-\alpha} \right\}$$

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{81.1 - 78.3}{\sqrt{\frac{13.5^2}{100}}} = 2.074$$

$$p\text{-value} = P(\bar{X} \geq \bar{x}) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \geq \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \right) = P(Z \geq 2.074) = 0.02$$

La potenza del test

In presenza di un'alternativa composta, $H_1 : \theta \in \Theta_1$, la funzione di potenza

$$\pi(\theta) = 1 - \beta(\theta)$$

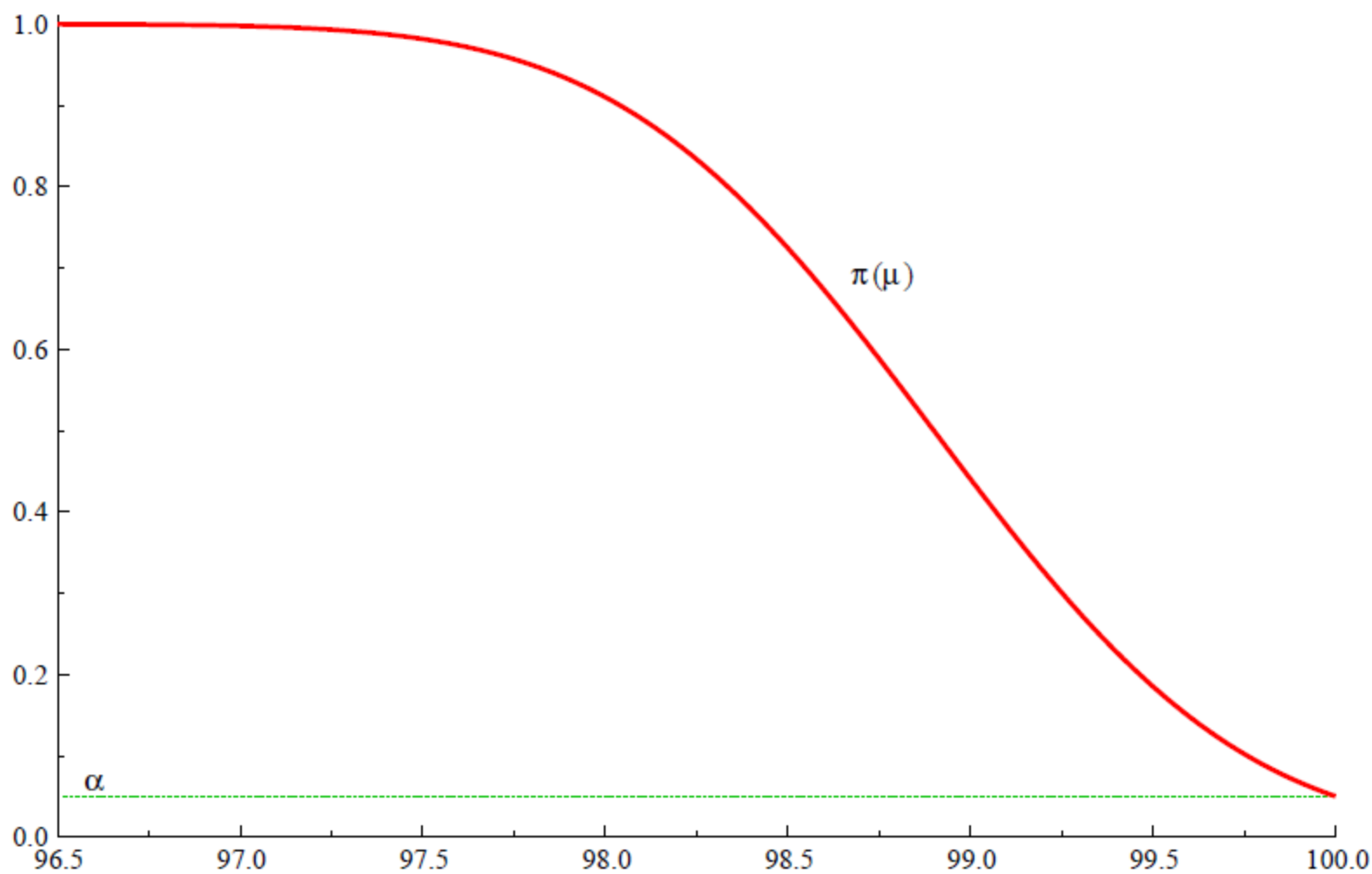
descrive la probabilità di rifiutare H_0 quando questa è falsa, al variare di θ in Θ_1 .

Esempio:

$$X \sim N(\mu, 9); \quad H_0 : \mu = 100, \quad H_1 : \mu < 100$$

$$\begin{aligned} \pi(\mu) &= P(R|H_1) = P(\bar{X} < 98.90|H_1) = \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{0.45}} < \frac{98.90 - \mu}{\sqrt{0.45}}\right) = \Phi\left(\frac{98.90 - \mu}{\sqrt{0.45}}\right) \end{aligned}$$

Figura: Funzione di potenza



Relazione tra intervalli di confidenza e test di ipotesi

Consideriamo il caso in cui $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 nota, e si voglia sottoporre a verifica $H_0 : \mu = \mu_0$ contro l'alternativa bidirezionale $\mu \neq \mu_0$.

Si ricorda che l'IC per μ al livello di confidenza dell' $100(1 - \alpha)\%$ è

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Se H_0 è vera,

$$P \left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

e dunque, calcolato l'intervallo di confidenza osservato,

$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$, si accetta H_0 se il valore μ_0 è in esso contenuto.

Esercizio

Sia X il tempo impiegato da un macchinario per compiere un intero ciclo di produzione. Il fornitore del macchinario sostiene che X si distribuisce come una Normale con media 10 minuti e varianza $\sigma^2=9$ minuti². Il potenziale acquirente del macchinario però sospetta che il tempo medio di completamento del ciclo produttivo sia maggiore di 10.

A tal fine, si decide di condurre un test di ipotesi, osservando $n = 16$ cicli produttivi ed ottenendo un tempo medio, $\bar{x}$, pari a 12 minuti.

Costruire un intervallo di confidenza a 95%

Esercizio

A tal fine, si decide di condurre un test di ipotesi, osservando $n = 16$ cicli produttivi ed ottenendo un tempo medio, $\bar{x}$, pari a 12 minuti.

Assumendo un livello di significatività del 5%, verificare l'ipotesi che il tempo medio sia 10 versus l'alternativa che sia diverso

Soluzione

Intervallo di confidenza

$$[12 - 1.96 * \sqrt{9/16}, 12 + 1.96 * \sqrt{9/16}] =$$

$$[12 - 1.96 * 0.75, 12 + 1.96 * 0.75] =$$

$$[12 - 1.47, 12 + 1.47] = [10.53, 13.47]$$

Verifica di ipotesi

$$z = \frac{12 - 10}{\sqrt{9/16}} = \frac{2}{0.75} = 2.\bar{6} > 2.32 = z_{0.99}$$

Rifiuto ipotesi nulla

Esercizio

Supponiamo di avere intervistato un campione casuale semplice di $n = 1200$ cittadini e che 631 di loro abbiano espresso l'intenzione di rieleggere il Sindaco: abbiamo abbastanza evidenza per concludere che il Sindaco dispone di una maggioranza?

X « vota per il sindaco »

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$

Stimatore per p ?

Stima per p ?

X Bernoulli(p)

Stimatore per p ?

Proporzione campionaria

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Stima per p ?

$$\hat{p} = \frac{631}{1200} = 0.526$$

Intervallo di confidenza per p proporzione della popolazione

- $X \sim \text{Bernoulli}(p)$
- $E(X)=p$ $\text{Var}(X)=p(1-p)$ n grande

$$\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

$$\hat{p} = 0.526$$

$$z_{1-\alpha/2} = 1.96$$

$$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0.526 \times 0.474}{1200}} = 0.014$$

$$95\%CI = (0.526 - 1.96 \times 0.014; 0.526 + 1.96 \times 0.014)$$

$$95\%CI = (0.499; 0.553)$$

Verifica di ipotesi

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$ $H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$

$$R = \left\{ \hat{p} \geq p_0 + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\}$$

$$R = \left\{ \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \geq z_{1-\alpha} \right\}$$

$$p\text{-value} = P(\hat{P} \geq \hat{p} \mid p = p_0)$$

Verifica di ipotesi

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$ $H_0: p = 0.5$ $H_1: p > 0.5$

$$R = \left\{ \hat{p} \geq p_0 + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\}$$

$$R = \{ \hat{p} \geq 0.523 \}$$