TRACCIA SOLUZIONI SECONDA SIMULAZIONE MATEMATICA GENERALE, II CANALE, a.a 2011/2012

Docente: Stefano Viaggiu

0.1 Primo esercizio

1) Innanzi tutto il dominio. Il modulo é sempre definito, e anche l'esponente. Quindi il dominio é tutto R: *dom* $f(x) := \{x : \forall x \in R\}$
Si ha che $|x| = x$ per $x \geq 0$, mentre $|x| = -x$ qundo $x < 0$. In generale si studiano i due rami della funzione separatamente e si uniscono nel punto in cui si annulla il modulo, in questo caso $x = 0$.

2) Nel nostro caso la $f(x)$ é pari ovvero $f(x) = f(-x)$, quindi possiamo studiare la $f(x)$ tra $(0, +\infty)$ e poi simmetrizzare il grafico cosi ottenuto rispetto all'asse y per ottenero l'andamento di $f(x)$ anche tra $(-\infty, 0)$. Se la funzione non fosse stata ne pari ne dispari, allora si studiavano separatamente i due rami della funzione nei loro rispettivi domini di definizione.
É importante notare che lo studio del punto di raccordo per quanto riguarda la derivabilitá e lo studio come max, min relativo o assoluto, é consigliabile effettuarlo quando si mettono assieme i due pezzi della funzione. In particolare, tipicamente i punti in cui si annulla un modulo possono essere punti di non derivabilitá ma, come noto (spero!) possono essere lo stesso max o min. relativi locali o assoluti. Ovviamente la funzione e' sempre positiva in quando sia $|x|$ che $e^{-\frac{x^2}{2}+1}$ sono sempre positivi. Consideriamo quindi prima la funzione nel suo **intervallo di definizione con argomento del modulo positivo**, ossia $\forall x \in (0, \infty)$.

3) Per i limiti al bordo del dominio, si ha che (ovviamente $f(0) = 0$)
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, quindi la f ha $y = 0$ come asintoto orizzontale. Quindi non puó avere asintoti obliqui. Inoltre non ha asintoti verticali.

4) La $f(x)$ é continua nel suo dominio naturale, in quanto $f(0) = 0$ sia da destra che da sinistra e altrove é continua per costruzione. Come detto precedentemente, nel caso di funzioni modulo, la derivabilitá si studia prima nei rispettivi rami e poi si mette tutto insieme. Questo a maggior ragione per funzioni pari o dispari. Si noti peró che per studiare la derivabilitá nel punto in cui si annulla il modulo occorre fare il limite della derivata sia da destra che da sinistra. Questo vale ovviamente anche per la continuitá, ma in tal caso le cose sono semplici e si puó fare tranquillamente il limite destro e sinistro.

5) Per la derivata prima si ha $f' = -(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}+1}$. La derivata prima é definita ovunque nell'intervallo $(0,\infty)$. Dallo studio si deduce che $f(x)$ é crescente tra $(0,1)$ e decrescente tra $(1,\infty)$. Quindi nel punto critico $x=1$ (unico per x positivi) abbiamo un massimo relativo locale forte. Per la derivabilitá in $x=0$ occorre vedere il limite destro e sinistro di f'. Si ha $f'(0^+)=e$.

6) Per la derivata seconda abbiamo $f'' = x(-3+x^2)e^{-\frac{x^2}{2}+1}$. Dallo studio si evince che la derivata seconda é definita ovunque tra $(0,\infty)$. Inoltre, la $f(x)$ é concava tra $(0,\sqrt{3})$ e convessa tra $(\sqrt{3},\infty)$. Come deve visto che ha un'asintoto orizzontale raggiunto 'dall'alto'. Quindi nel punto $x=\sqrt{3}$ abbiamo un punto di flesso.
Lo studio completo si ottiene unendo al grafico per $x\geq 0$ la parte con $x<0$ dove $|x|=-x$. Nel ramo negativo si ha ovviamente $f' = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}+1}$ e $f'' = -x(-3+x^2)e^{-\frac{x^2}{2}+1}$. Quindi avremo ovviamente (la funzione é pari) un massimo relativo locale in $x=-1$, un flesso per $x=-\sqrt{3}$ ed $y=0$ come asintoto orizzontale per $x\to-\infty$. La $f(x)$ é dunque crescente tra $(-\infty,-1)$ e decresce tra $(-1,0)$, convessa tra $(-\infty,-\sqrt{3})$ e concava tra $(-\sqrt{3},0)$. Inoltre $f'(0^-)=-e$, quindi la funzione ha un punto angoloso di non derivabilitá in $x=0$ e quindi la derivata seconda non esiste in $x=0$. Infine, dal grafico si deduce che i punti $x=-1, x=1$ sono punti di massimo assoluto, ed il massimo vale $\sqrt{e}$, mentre il punto $x=0$ é un punto di minimo assoluto e vale 0. Lo studente deve nel compito ovviamente calcolare derivata prima e seconda nel ramo con $x<0$.
In ogni modo in caso di funzioni con modulo, lo studente deve calcolare derivata prima e seconda anche nel ramo in cui l'argomento del modulo é negativo.

0.2 Secondo esercizio

Si evince che il rango della matrice A é sicuramente almeno 2 prendendo, ad esempio, il minore $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.
Per il determinante di A, si ha $detA = 2-3t^2+t$. Quindi é 0 per $t=1,-\frac{2}{3}$. Per $t=-\frac{2}{3}$ il sistema é incompatibile. Infatti, in tal caso il rango di A é 2, mentre il rango della matrice completa é 3, basta prendere $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.
Per $t=1$, si vede facilmente che il rango di A e della matrice completa é 2. Infatti si ha che il minore $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ ha determinante 0 (l'altro é

zero perché é quello della matrice incompleta). Quindi le soluzioni sono ∞^1. Basta prendere un qualunque minore di ordine 2 e risolvere. Ad esempio prendiamo le equazioni $2y+z=0, x+3y=-1$. Ponendo $z=c$, la soluzione é $\begin{bmatrix} -1+\frac{3c}{2} \\ -\frac{c}{2} \\ c \end{bmatrix}$, che al variare di c descrive una retta nello spazio ordinario.
Infine, per $t \neq, 1, -\frac{2}{3}$, ovviamente il rango di A e della matrice completa é 3 ed il sistema ammette una sola soluzione. Usando Cramer si ha
$\begin{bmatrix} \frac{-2-4t}{detA} \\ \frac{t(t+1)}{detA} \\ \frac{-2(t+1)}{detA} \end{bmatrix}$.
Per il sistema omogeneo associato, si ha che per t diverso da 1 e $-\frac{2}{3}$, si ha come unica soluzione quella banale. Per $t=1$ e $t=-\frac{2}{3}$ abbiamo ∞^1 soluzioni, ovvero i punti di una retta.

0.3 Terzo esercizio

L'integrale si risolve per parti. Si ha

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \int_1^e \left(\frac{-1}{x}\right)' \ln(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{2}{e}.$$

0.4 Quarto esercizio

Per il limite, notare che per $x \to 0$ si ha $2x + x^2 = 2x + o(1)$, e $\sqrt{x^4+x^8} = x^2\sqrt{1+o(1)}$. Inoltre, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1$, e $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Quindi $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(x)}{x^3} = 1$.
Mettendo tutto assieme, si ottiene che il limite vale 2.
Evitare de L'Hopital, anche all'esame. Al massimo si puo' usare de l'Hopital a pezzi, escludendo il pezzo con la radice che derivato da problemi. Ad esempio, possiamo applicare de L'Hopital al pezzo $\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$ ed a $\frac{\sin(x)}{x}$ o meglio $\frac{x}{\sin(x)}$ e poi elevare il risultato al cubo, dopo peró aver estratto la parte principale dalla radice e del termine $2x + x^2$ e poi fare il prodotto dei limiti. Si ricorda infatti che se abbiamo un limite che é il prodotto di piú funzioni, la parte principale é il prodotto delle parti principali, e questo facilita l'uso di L'Hopital a pezzi. Ma a mio avviso il limite é piú semplice da svolgare come prodotto di limiti di parti principali. Quindi de L'Hopital puó essere usato se non si ricordano esattamente i limiti notevoli delle forme indeterminate.
Notare che de L'Hopital si puó applicare solo a forme del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ e NON a forme del tipo $\frac{0.\infty}{0}$ o $\frac{0.\infty}{\infty}$. É evidente che se uno studente svolgesse correttamente l'esercizio con solo de L'Hopital applicato correttamente ma disperatamente sia a numeratore che a denominatore (dopo traumatiche

derivazioni), sarebbe considerato corretto (5 punti). Ma se ho il caso sopra, ovvero $\frac{0.\infty}{0}$ o $\frac{0.\infty}{\infty}$, de L'Hopital si puó applicare solo a pezzi, ovvero i pezzi che rappresentano forme indeterminate $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

0.5 Quinto esercizio

La funzione é differenziabile infinite volte (é analitica!). Per il gradiente si ha $f_x = 12x^3 + 12y$, $f_y = 12x + 12y^5$. Inponiamo ora la condizione che il gradiente sia nullo. Ovviamente abbiamo la soluzione banale $(x, y) = (0, 0)$. Dalla seconda si ricava $x = -y^5$, che sostituita nella prima da $y(1-y^{14}) = 0$. Quindi otteniamo l'ulteriore soluzione $y = \pm 1$. I tre punti critici sono dunque $(0, 0), (-1, 1), (1, -1)$. Per l'Hessiano si ha
$H(x, y) = \begin{bmatrix} 36x^2 & 12 \\ 12 & 60y^4 \end{bmatrix}$. Poiché $detH(0, 0) < 0$, il punto $(0, 0)$ é di sella. Per gli altri due punti il determinante di H é positivo e gli elementi sulla diagonale sono positivi, quindi sono punti di minimo relativo.