Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

Esercitazione corso Matematica Generale

Corso di Laurea in Economia e Finanza L33

Esercitatore: dott.Vincenzo Morinelli

morinell@mat.uniroma2.it

Esercitazione del 22 Settembre 2016: disequazioni

Risolvere le seguenti disequazioni facendo attenzione, dove serve, ai domini delle funzioni considerate:

1. $(x+1)(x-3) < 0$, soluzione: $x \in (-1, 3)$.
2. $x^3 + 5x^2 + 4x \geq 0$, soluzione: $x \in [-4, -1] \cup [0, +\infty)$.
3. $\frac{x^2-1}{x^2+x+1} \geq 0$, soluzione: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$
4. $\frac{x-3}{x^3-x^2-4x+4} < 0$, soluzione: $x \in (-2, -1) \cup (2, +\infty)$.
5. $\sqrt{x(x+1)} > 0$, soluzione: $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.
6. $\sqrt[3]{1 - x^2 + \sqrt[3]{x}^2} > 1$, soluzione: $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.
7. $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$, soluzione: $x \in (-\infty, 0] \cup (\frac{9}{2}, +\infty)$.
8. $\sqrt{6-x} < x$, soluzione: $x \in (2, 6)$.
9. $4^{x^2-x} < 16$, soluzione: $x \in (-1, 2)$.
10. $5^x > 2^{1/x}$, soluzione: $x \in (-\sqrt{\log_5 2}, 0) \cup (\sqrt{\log_5 2}, +\infty)$.
11. $\log_{1/3} \frac{x+2}{x-2} > 0$, soluzione: $x \in (-\infty, 2)$.
12. $2\log_2(x-2) > 1 + \log_2(6-2x)$, soluzione: $x \in (2\sqrt{2}, 3)$.

Esercitazione 29 Settembre 2016: Dominio, positività, funzioni inverse, composizione di funzioni

1. Studiare parità e dominio delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = x\log(x^2-3)$ [dispari] (b) $g(x) = \frac{2x^4}{e - e^{1/x^2}}$ [pari]

2. Considerare le seguenti funzioni elementari $f(x) = \log x$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = x^2 - 1$ e tracciare il grafico di $f(x-a)$, $g(x) + b$, $|h(x)|$, $h(cx)$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

3. Date $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = \log x$ determinare le funzioni $(g \circ g \circ f)$ e $(g \circ f \circ g)$ e i rispettivi domini.

4. Determinare la funzione inversa di $e^{2x} + 4e^x$ e il suo dominio.

5. Trovare il dominio delle seguenti funzioni

   (a) $\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^\pi$, soluzione $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$

   (b) $\sqrt{\log\left(\frac{x-1}{x}\right)}$, soluzione $x < 0$

   (c) $\sqrt{\log(\sqrt{x-3} + \sqrt{4-x})}$, soluzione $3 \leq x \leq 4$

6. Studiare la positività e gli zeri delle seguenti funzioni

   (a) $(x^2 + 2x)e^x$

   (b) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

   (c) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

   (d) $\log_2^2 x + 3\log_2 x - \frac{5}{2}\log_{4\sqrt{2}} 16$

7. Provare che le funzioni f e g sono una l'inversa dell'altra e se esiste un punto in cui $f(x) = g(x)$, per

   (a) $f(x) = x^2 - x + 1$ per $x > \frac{1}{2}$,

   (b) $g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$ per $x \geq \frac{3}{4}$

8. Calcolare, se possibile, le funzioni inverse delle seguenti funzioni:

   (a) $y = x - 1$

   (b) $y = 7x + 1$

   (c) $y = x^2 - 1$

   (d) $y = \ln x - 1$

   (e) $y = |x|$

9. Risolvere le seguenti disugualianze:

   (a) $x^2 + x - 6 < 0$

   (b) $-x^2 + 1 > 0$

   (c) $x(x+3) \geq 0$

   (d) $\frac{x-1}{x+2} < 0$

   (e) $|x+2| > 2$

   (f) $|2x+3| < x + 6$

   (g) $|\frac{4x}{3} - 5| \geq 7$

(h) $|x^2 + 3x - 1| < 3$

10. Stabilire dominio e segno delle seguenti funzioni reali:

    (a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

    (b) $f(x) = \frac{x+5}{x-5}$

    (c) $f(x) = \frac{-x^2+3x-2}{x+3}$

    (d) $f(x) = |x|$

    (e) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$

    (f) $f(x) = \ln (x^2 - 1)$

Esercitazione 6 Ottobre 2016: Limiti

1. L'insieme $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ è chiuso? Determinare la chiusura.

2. Studiare il segno, zeri e comportamento ai bordi del dominio delle seguenti funzioni

    (a) $f(x) = \ln(x^2 + x)$

    (b) $g(x) = \frac{x^3+2}{e^{x^2}+x^2}$

    (c) $h(x) = \frac{x+3}{(x-3)(x+1)^2}$

3. Calcolare i seguenti limiti

    (a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x-4} (= +\infty)$

    (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x^5+3x+4} (= 0)$

    (c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-8}{4x^2+9x-3} (= \frac{1}{4})$;

    (d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x+\log x}{2x^3+x} (= \frac{1}{2})$

    (e) $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+e^x}{2x^3+\ln x^2} (= 0)$

    (f) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x+4}{x^3+2x} (= \infty)$

    (g) $\lim_{x\to 0} \frac{x^6+2x^2}{x^4+x^2} (= 2)$

    (h) $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+6x+9} (= 0)$

    (i) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^{-8}}{\ln(1+e^{4x})} (= +\infty)$

    (j) $\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln(1 + e^{-7x}) (= 0)$

    (k) $\lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2-6x+9)^2}{(e^{x^2-9}-1)^4} (= \frac{1}{6^4})$

    (l) $\lim_{x\to+\infty} (-x^{18} + x^6)e^{-x^6} + \sin(-\pi + \frac{1}{x^9}) (= 0)$

    (m) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + 8} (= 2)$

(n) $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(=1)$

(o) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x}-x(=\frac{3}{2})$

(p) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{\frac{x^4+1}{x^3+5}} (=e^2)$

(q) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)\sqrt{\sin x}}{(1-\cos x)(\sqrt{e^x-1})}(=2)$

(r) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x-e^{-x})-1}{\sin x^2}(=-2)$

(s) $\lim_{x\to 0^+} 2^{-1/x}(=0)$

(t) $\lim_{x\to 0^-} 2^{-1/x}(=+\infty)$

Esercitazione 13 Ottobre 2016: Limiti, Asintoti, Derivate

1. Calcolare i seguenti Limiti:

   (a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^{1/x^6}-1)\ln(1+x^6)}{(\sin x^8+x^6+\ln x^8)\sin x^{-6}}(=0)$

   (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+x-e^x}{x^2\ln(1+x^8)}(1+\ln x^6)(=-\infty)$

   (c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{x}-x^4+e^{-1/x^4})(e^{4\sqrt{x}}-1)}{(\sin\sqrt{x}+x^6)\sin\sqrt{x}}(=4)$

   (d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+\ln x^8)\sqrt{x^4-6x^2}}{4x^3+4e^{-x}}(=\frac{1}{2})$

2. Determinare: dominio, positività, asintoti delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x+1}$

   (b) $g(x)=\frac{x^3-3x^2-5x-1}{x^2-1}$

   (c) $h(x)=e^{-x^2+x}-1$

   (d) $i(x)=\frac{x^3+2}{e^x+x^2}$

   (e) $l(x)=\frac{\ln x^7}{x}$

   (f) $m(x)=\sqrt{x^3+6x^2+11x+6}$

3. Calcolare usando la definizione le derivate delle seguenti funzioni:

   (a) e^{x^2}

   (b) $\sqrt{1+2x}$

   (c) $1+e^{\frac{1}{x}}$

   (d) $\cos x$

Esercitazione 20 Ottobre 2016: Studio di funzione

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

   (a) $x^4+3x^2+2x\ln x$

   (b) $\ln\sin 2x$

   (c) $\sqrt[3]{1-3x}-x$

   (d) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

   (e) $x^{\ln x}$

   (f) $\sin x^{\sin x}-\sin(\sin x)$

2. Studiare massimi e minimi relativi della funzione

   (a) $f(x) = \arctan(-x(x-1))$
   (b) $f(x) = \frac{x^2+9}{x}$
   (c) $f(x) = xe^{3x}$
   (d) $f(x) = 3x\ln(x)$

3. Studiare massimi e minimi relativi, concavità e convessità delle funzioni:

   (a) $e^{-x(x-2)}$
   (b) $\ln(1+x^2)$
   (c) $(3x^2+1)e^{x+2}$
   (d) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 7x + 8$
   (e) $f(x) = x^4 + x + 12$
   (f) $f(x) = e^{x^2}$
   (g) $f(x) = e^{-x}(2x+1)$
   (h) $f(x) = x^2 - x\ln x$

4. Studiare il grafico delle seguenti funzioni

   (a) $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$
   (b) $g(x) = |x^2 - 4x + 4|$
   (c) $h(x) = xe^{\frac{x+2}{x-1}}$

Esercitazione 27 Ottobre 2016: Studio di funzione

1. Calcolare i seguenti Limiti utilizzando de l'Hôpital

   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} (= +\infty)$
   (b) $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} (= 0)$
   (c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) (= 0)$

2. Studiare il grafico delle seguenti funzioni

   (a) $f(x) = \ln(1+4x)$
   (b) $g(x) = e^{-x^2+x+2} - 1$
   (c) $h(x) = \sqrt{x^2+x} - x$
   (d) $i(x) = \frac{x^2-3x}{|x-1|}$
   (e) $l(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2-x}}$
   (f) $m(x) = 1 - \ln\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right)$
   (g) $n(x) = \ln\left(\frac{\cos x}{\sin x - 1}\right)$

3. Verificare le seguenti disuguaglianze

(a) $\sin x < x$, per $x > 0$

(b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, per $x \neq 0$

(c) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$, per $x > 0$

Esercitazione 3 Novembre 2016: Ripasso

1. Calcolare i seguenti limiti

   (a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6+e^{-x^6}+e^{-x^4}-xe^x-2e^x}{e^{\cos x}+3xe^x+e^{3x}} (= 0)$

   (b) $\lim_{x\to+\infty} \left(e^{\frac{2}{x^4}} - 1\right)\left(\sin\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6}\right)\left(x^8 + \frac{x^8}{\ln x} - x^6\right) (= 1)$

   (c) $\lim_{x\to+\infty}(x^8 - x^2)e^{-x^2} + \sin\left(\pi + \frac{1}{x^4}\right) (= 0)$

   (d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\cos\frac{1}{x}-1)\ln(1+x^2)}{(\sin x^4-x^2+\ln x^4)\sin(1/x^2)} (= 0)$

2. Studiare il grafico delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = \frac{x}{4x-1}e^{-x}$

   (b) $g(x) = \frac{\ln x^7}{x}$

   (c) $h(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$

   (d) $i(x) = -\sqrt{4e^{2x} - 4}$

   (e) $j(x) = |x^2 - 1|\sqrt[3]{3x - 2}$

Esercitazione 17 Novembre 2016: Integrali

1. Calcolare le seguenti primitive

   (a) $\int \frac{\arctan x}{-(1+x^2)}dx$

   (b) $\int 5x\cos(x^2 + 6)dx$

   (c) $\int \frac{2x}{x^2+5}dx$

   (d) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

   (e) $\int(2x + 3)e^{x^2+3x+28}dx$

   (f) $\int \frac{1}{9x^2-12x+4}dx$

   (g) $\int \frac{x^2-5}{x}dx$

   (h) $\int \frac{x-3}{x(x-1)(x-2)}dx$

   (i) $\int \frac{1}{x^2+x+2}dx$

   (j) $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}dx$

2. Calcolare i seguenti integrali per parti

   (a) $\int \ln x dx$ (b) $\int x\ln(x - 4)dx$ (c) $\int xe^{-2x}dx$

3. Calcolare l'area compresa tra $y = -x^2 + \frac{3}{2}$ e $y = x - \frac{1}{2}$

4. Calcolare i seguenti integrali definiti

(a) $\int_0^{36} \frac{1}{\sqrt{x}+3} dx$ (b) $\int_1^2 \frac{e^t(e^t-1)}{e^{2t}-1} dt$ (c) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$

Ulteriori esercizi:

1. Teorema di Rolle

   Data la funzione f e l'intervallo I, determinare se il teorema di Rolle garantisce l'esistenza di un $c \in I$ tale che $f'(c) = 0$, nei seguenti casi:

   - $f(x) = x^3,\ I = [-2, 2]$
   - $f(x) = 2^x,\ I = [0, 1]$
   - $f(x) = \begin{cases} 1 & ,x \leq -1 \\ x^2 & ,-1 < x < 1 \\ 1 & ,x \geq 1 \end{cases} \quad ,I = [-1, 1]$
   - $f(x) = \begin{cases} -2(x-a) & ,x \leq a \\ 0 & ,a < x < b \\ 2(x-b) & ,x \geq b \end{cases} \quad ,I = [a, b]$

2. Teorema di Lagrange

   (a) Trova un valore di $c \in I$ che soddisfa la tesi del teorema di Lagrange per
   $$f(x) = -2x^3 + 6x - 2,\ I = [-2, 2]$$

   (b) Utilizzando il teorema di Lagrange provare che per ogni due numeri reali a e b vale
   $$|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$$

3. Esercizi sulle approssimazioni con la formula di Taylor

   (a) Utilizzando lo sviluppo di Taylor di e^x in 0, calcolare $\sqrt{e}$ in modo che l'errore nell'approssimazione sia minore di $0,01$.

   (b) Utilizzando lo sviluppo di Taylor di $\ln(x+1)$ in 0 calcolare $\ln(1.2)$ in modo che l'errore sia minore di $0,001$.

Esercitazione 24 Novembre 2016: Algebra delle matrici, sistemi lineari

1. (a) Calcolare $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, calcolare $2A^2 - {}^tA + I_3$

(c) $U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, verificare $U^tU = 1$

(d) Verificare che se $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}$ e $R_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ allora $R_{2,3}A$ scambia seconda e terza riga di A mentre $AR_{2,3}$ scambia seconda e terza colonna di A.

2. Calcolare il determinante e il rango delle seguenti matrici al variare dei parametri

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{t}{2} & 1 & -1 \\ 1 & \frac{t}{2} & -\frac{t}{2} \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$

3. Verificare se i seguenti vettori sono linearmente indipendenti ed eventualmente completare la base

(a) $\{(1,3), (-e, e)\}$

(b) $\{(1,2), (11,1), (-1,1)\}$

(c) $\{(1,1,3), (2,2,0), (3,3,-3)\}$

4. Risolvere i seguenti sistemi lineari

(a) $\begin{cases} 2X_2 + X_1 + 3X_3 = 1 \\ 2X_1 + X_2 + 4X_3 = 2 \\ 3X_1 - 3X_2 + X_3 = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} X_2 - X_3 = -1 \\ X_1 + X_3 = 1 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 = 2 \end{cases}$

5. Stabilire la risolubilità dei sistemi $Ax = b$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -t & 1 & -1 \\ -2 & t+1 & -2 \\ -1 & t & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ studiare il sistema al variare del paramametro $t \in \mathbb{R}$.

Esercitazione 1 Dicembre 2016: Spazi vettoriali, sistemi lineari, autovalori e autovettori

1. Dire se i seguenti sotto insiemi di $\mathbb{R}^3$ sono anche sottospazi vettoriali:

   (a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + z = 0\}$;

   (b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 = z^2\}$;

   (c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$;

   (d) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xy + yz = 0\}$;

2. Stabilire la dimensione di $V = \mathbf{span}\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ nei seguenti casi:

   (a) $\{v_1 = (0, 0, 1), v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 0, 0)\}$;

   (b) $\{v_1 = (0, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 1, 1)\}$;

   (c) $\{v_1 = (0, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$;

   (d) $\{v_1 = (0, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 2, 1)\}$;

   (e) $\{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, -3, -1)\}$;

   (f) $\{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, 4, 2), v_3 = (0, 0, 4)\}$;

   (g) $\{v_1 = (1, 3, 0), v_2 = (-e, e, 0)\}$;

   (h) $\{v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (11, 1, 0), v_3 = (-1, 1, 0)\}$;

   (i) $\{v_1 = (1, 1, 3), v_2 = (2, 2, 0), v_3 = (3, 3, -3)\}$;

3. Risolvere i sistemi lineari $Ax = b$ al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & t & 2t \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & t & t \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 4t \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 2t & 2t \\ 2t & 2t \\ 2t & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1+t \\ 1 & 1 & 2t+2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t+1 & 1 \\ t & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{t}{2} & 1 & -1 \\ 1 & \frac{t}{2} & -\frac{t}{2} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -t \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. Trovare autovalori e i rispettivi autovettori delle seguenti matrici

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$