

# CORSO DI MATEMATICA GENERALE

## Esercitazione 1

Equazioni e disequazioni polinomiali e fratte - Insiemi:  
operazioni e proprietà - Topologia della retta reale

Dr. Stefano Guarino  
guarino@mat.uniroma3.it

September 23, 2014

### 1 Equazioni e disequazioni polinomiali e fratte

1. Risolvere le seguenti equazioni:

- (a)  $x^2 - 3x + 7 = 0$
- (b)  $(1 - x)^2 + (2 - x)^2 = (x - 3)^2$
- (c)  $3x(x + 1) = 1 - x^2$
- (d)  $8x^3 - 8x^2 + x = 4x^2 - 5x + 1$
- (e)  $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{1+x} = \frac{8}{x^2-1}$
- (f)  $|2x + 1| = 1$
- (g)  $x^2 - 2kx = 2k - x$ , per  $k > 0$

2. Risolvere le seguenti disequazioni:

- (a)  $x^2 - 5x + 4 > 0$
- (b)  $x^2 - 1 > (1 + 2x)^2 - 2$
- (c)  $(2x - 1)(1 - x) < x + 2$
- (d)  $(x - 1)^3 - (x - 2)^3 > 7 - 9x$
- (e)  $\frac{x^2-3x-2}{3x^2+5x-2} < 0$
- (f)  $|x^2 - 2| \leq 1$
- (g)  $ax^2 - (2 - a)^2 - 2a > 0$ , per  $a > 0$

3. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

- (a)  $\begin{cases} 2x^2 - 7x - 4 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$
- (b)  $\begin{cases} 2x^2 - x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 3 < 0 \end{cases}$
- (c)  $\begin{cases} (2x - 1)^2 - (3 - x)^2 > 5(27 - 2x) \\ (x + 4)(x - 4) < 33 \end{cases}$

$$(d) \begin{cases} 9x + 2 > 0 \\ 100x^2 + 40x - 21 > 0 \\ -3x^2 - 5x + 2 > 0 \end{cases}$$

## 2 Insiemi: operazioni e proprietà

4. Siano  $A, B, C \subset \mathbb{R}$ . Rispondere ai seguenti quesiti:

- (a) Se  $|A| = 17$ ,  $|B| = 22$  e  $|A \cup B| = 30$ , quanto vale  $|A \cap B|$ ?
- (b) È vero che  $A \cap B = A$  implica  $A \cup B = B$ ? E il viceversa?
- (c)  $A \cap B = A \cap C$  implica  $B = C$ ?
- (d)  $A \cup B = A \cup C$  implica  $B = C$ ?
- (e)  $(A \cup B) \cap B^c = A$  implica  $A \cap B = \emptyset$ ? E il viceversa?
- (f)  $A \cap B = C$ ,  $B \cap C = A$  e  $A \cap C = B$  implicano  $A = B = C$ ? E il viceversa?

5. Dati gli insiemi:

- $A = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x \leq 4\}$
- $B = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $C = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3 \text{ o } x > 2\}$

Rappresentarli sulla retta reale, esprimerli come intervalli, e determinare  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup C$ ,  $A \cap C$ ,  $B \cup C$ ,  $B \cap C$ ,  $B \setminus A$ ,  $C \setminus A$ ,  $B \setminus C$ ,  $A^c$ ,  $B^c$ ,  $C^c$ ,  $(B \setminus C)^c \cap A$ .

## 3 Topologia della retta reale

- 6. Verificare che tutti i punti dell'intervallo  $(0, 1)$  sono interni. Vale lo stesso per l'intervallo  $(0, 1]$ ?
- 7.  $\mathbb{Q}$  (considerato come sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ ) ha punti interni?  $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  è aperto, chiuso, o nessuna delle due?
- 8. Esistono sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  che siano sia aperti che chiusi?
- 9. Siano  $A = (0, 3)$ ,  $B = (2, 5]$  e  $C = [-1, 2]$ . Determinare la frontiera di  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Cosa si può dire (a livello topologico) di  $A \cup B$ ,  $B \cup C$ ,  $A \cap B$ ,  $C \setminus A$ ?
- 10. Determinare i punti di accumulazione dell'insieme  $E = \{x \in \mathbb{R} : x = 1/n, n \in \mathbb{N}\}$  e dell'insieme  $\mathbb{Q}$ .
- 11. Determinare, quando possibile, gli estremi (sup, inf, max o min) dei seguenti insiemi:
  - (a)  $(-3, 1] \cup (0, 2]$
  - (b)  $(-\infty, 3) \cap [2, 4)$
  - (c)  $\mathbb{R} \setminus (1, +\infty)$
  - (d)  $\{3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$
  - (e)  $\{ne^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$
  - (f)  $\{\frac{-1}{n^2+n} : n \in \mathbb{N}\}$