

CORSO DI MATEMATICA GENERALE

Esercitazione 1

Equazioni e disequazioni polinomiali e fratte - Insiemi:
operazioni e proprietà - Topologia della retta reale

Dr. Stefano Guarino
guarino@mat.uniroma3.it

September 23, 2014

1 Equazioni e disequazioni polinomiali e fratte

1. Risolvere le seguenti equazioni:

- (a) $x^2 - 3x + 7 = 0$
- (b) $(1 - x)^2 + (2 - x)^2 = (x - 3)^2$
- (c) $3x(x + 1) = 1 - x^2$
- (d) $8x^3 - 8x^2 + x = 4x^2 - 5x + 1$
- (e) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{1+x} = \frac{8}{x^2-1}$
- (f) $|2x + 1| = 1$
- (g) $x^2 - 2kx = 2k - x$, per $k > 0$

2. Risolvere le seguenti disequazioni:

- (a) $x^2 - 5x + 4 > 0$
- (b) $x^2 - 1 > (1 + 2x)^2 - 2$
- (c) $(2x - 1)(1 - x) < x + 2$
- (d) $(x - 1)^3 - (x - 2)^3 > 7 - 9x$
- (e) $\frac{x^2 - 3x - 2}{3x^2 + 5x - 2} < 0$
- (f) $|x^2 - 2| \leq 1$
- (g) $ax^2 - (2 - a)^2 - 2a > 0$, per $a > 0$

3. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

- (a) $\begin{cases} 2x^2 - 7x - 4 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$
- (b) $\begin{cases} 2x^2 - x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 3 < 0 \end{cases}$
- (c) $\begin{cases} (2x - 1)^2 - (3 - x)^2 > 5(27 - 2x) \\ (x + 4)(x - 4) < 33 \end{cases}$

$$(d) \begin{cases} 9x + 2 > 0 \\ 100x^2 + 40x - 21 > 0 \\ -3x^2 - 5x + 2 > 0 \end{cases}$$

2 Insiemi: operazioni e proprietà

4. Siano $A, B, C \subset \mathbb{R}$. Rispondere ai seguenti quesiti:

- (a) Se $|A| = 17$, $|B| = 22$ e $|A \cup B| = 30$, quanto vale $|A \cap B|$?
- (b) È vero che $A \cap B = A$ implica $A \cup B = B$? E il viceversa?
- (c) $A \cap B = A \cap C$ implica $B = C$?
- (d) $A \cup B = A \cup C$ implica $B = C$?
- (e) $(A \cup B) \cap B^c = A$ implica $A \cap B = \emptyset$? E il viceversa?
- (f) $A \cap B = C$, $B \cap C = A$ e $A \cap C = B$ implicano $A = B = C$? E il viceversa?

5. Dati gli insiemi:

- $A = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x \leq 4\}$
- $B = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $C = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3 \text{ o } x > 2\}$

Rappresentarli sulla retta reale, esprimerli come intervalli, e determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$, $B \cap C$, $B \setminus A$, $C \setminus A$, $B \setminus C$, A^c , B^c , C^c , $(B \setminus C)^c \cap A$.

3 Topologia della retta reale

- 6. Verificare che tutti i punti dell'intervallo $(0, 1)$ sono interni. Vale lo stesso per l'intervallo $(0, 1]$?
- 7. \mathbb{Q} (considerato come sottoinsieme di \mathbb{R}) ha punti interni? $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è aperto, chiuso, o nessuna delle due?
- 8. Esistono sottoinsiemi di \mathbb{R} che siano sia aperti che chiusi?
- 9. Siano $A = (0, 3)$, $B = (2, 5]$ e $C = [-1, 2]$. Determinare la frontiera di A , B e C . Cosa si può dire (a livello topologico) di $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $C \setminus A$?
- 10. Determinare i punti di accumulazione dell'insieme $E = \{x \in \mathbb{R} : x = 1/n, n \in \mathbb{N}\}$ e dell'insieme \mathbb{Q} .
- 11. Determinare, quando possibile, gli estremi (sup, inf, max o min) dei seguenti insiemi:
 - (a) $(-3, 1] \cup (0, 2]$
 - (b) $(-\infty, 3) \cap [2, 4)$
 - (c) $\mathbb{R} \setminus (1, +\infty)$
 - (d) $\{3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$
 - (e) $\{ne^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$
 - (f) $\{\frac{-1}{n^2+n} : n \in \mathbb{N}\}$