Esercitazione 02 dicembre 2013

per il corso di Matematica Generale

02 dicembre 2013

Esercizio 1. *Dire se è possibile effettuare il prodotto delle matrici nei seguenti casi e, in caso affermativo, calcolarlo.*

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. *Calcolare traccia, determinante e, se possibile, l'inversa delle seguenti matrici* 2×2.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. *Calcolare traccia, determinante e, se possibile, l'inversa delle seguenti matrici* 3×3.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 15 & 34^{78} \\ \sqrt{\log(567)} & 31 & 10^{-3} \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. *Calcola il rango delle seguenti matrici.*

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5. *Trova* $k \in \mathbb{R}$ *tale che il rango di* A *è massima con*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. *Calcola il rango delle seguenti matrici* 3×3.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 15 & 34^{78} \\ \sqrt{\log(567)} & 31 & 10^{-3} \end{pmatrix}$;

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 7. *Calcola il rango delle seguenti matrici al variare di $k \in \mathbb{R}$.*

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ k-1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & k & -4 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & k \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & k \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 4 & k & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8. *Scrivere una matrice 2×3 con rango 0.*

Esercizio 9. *Scrivere una matrice 2×2 con rango 1.*

Esercizio 10. *Per le seguenti espressioni matriciali determinare la matrice A utilizzando i dati forniti per ogni espressione. La matrice identità (cioè la matrice quadrata con tutti 1 sulla diagonale principale e tutti 0 altrove) verrà sempre denotata con I.*

(1) *Risolvere*
$$CAB = tr\,(C + B + D)\,I - BC,$$
dati $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, tr\,(D) = -1.$

(2) *Risolvere*
$$AB + tr\,(B + C)\,B^2 - \det(B)\,A = 0I,$$
dati $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, tr\,(C) = -1.$

(3) *Risolvere*
$$BCAC^3 = tr\,(3B - 2D)\,B,$$
dati $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, tr\,(B) = \frac{5}{3},\ tr\,(D) = 3.$

(4) Risolvere

$$DAD^{-1} = tr\left(CDC^{-1}\right) DBD^4,$$

dati $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1. \end{pmatrix}$

(5) Risolvere

$$A + 2A + BA = \det\left(13C^2\right) D,$$

dati $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \det(C) = \frac{1}{\sqrt{13}}.$

Esercizio 11. *Discutere il numero delle soluzioni e, se possibile, risolvere i seguenti sistemi lineari.*

- $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 6y = -11 \end{cases};$
- $\begin{cases} x + 5y = -8 \\ -3x - y = 10 \end{cases};$
- $\begin{cases} 3x + 7y = 2 \\ 21y + 9x = 6 \end{cases};$
- $\begin{cases} \frac{x-1}{3} + y = \frac{2}{3} \\ \frac{2-3x}{4} + \frac{y}{2} = x + 1 \end{cases};$
- $\begin{cases} (2x-1)^2 + x(y+1) = x(y+4x) \\ \frac{x-y}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2(y+2)}{6} \end{cases};$
- $\begin{cases} (2x+2)^3 = 4x^2(2x+6) + y \\ -3x + y = -6 \end{cases};$
- $\begin{cases} 2(x-4y) + (x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy \\ \frac{2y-4}{4} = \frac{x+5y}{2} - (x-3) \end{cases}.$

Esercizio 12. *Dire se* $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$, *è soluzione del sistema* $\begin{cases} \frac{70x-280}{5000} + \frac{20000y-60000}{150} = 0 \\ \frac{800-200x}{645} = \frac{9000-3000y}{985} + 1234567890 \end{cases}.$

Esercizio 13. *Scrivere un sistema lineare che ammetta come unica soluzione* $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}.$

Esercizio 14. *Scrivere un sistema lineare con* ∞^1 *soluzioni tale che* $\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$ *sia soluzione e determinare inoltre tutte le soluzioni del sistema trovato.*

Esercizio 15. *Discutere il numero delle soluzioni e, se possibile, risolvere i seguenti sistemi lineari.*

- $\begin{cases} x + 2y - 4z = 2 \\ 2x - 5y + z = -5 \\ 4x - y + 4z = -1 \end{cases}$;

- $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + y - z = -3 \\ 4x - y - z = 0 \end{cases}$;

- $\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ x - 2y = 1 \\ 2x - 5y - 4z = 2 \end{cases}$;

- $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ 3x - 6y - 7z = -4 \end{cases}$.

Esercizio 16. *Discutere il numero delle soluzioni e, se possibile, risolvere i seguenti sistemi lineari.*

- $\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y = 0 \\ x - y = 1 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$;

- $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - y - 3z = 5 \\ -x + y + \frac{1}{2}z = -\frac{5}{2} \\ x - y + 9z = -9 \end{cases}$;

- $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$.

Esercizio 17. *Scrivere un sistema lineare di 3 equazioni in 2 incognite avente* $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ *come unica soluzione. E' vero che una delle equazioni è combinazione lineare delle altre? E' vero che sono tutte proporzionali?*

Esercizio 18. *Costruire, se esiste, un sistema lineare di 3 equazioni in 2 incognite tale che valga di volta in volta una delle seguenti proprietà:*

- *il sistema ammetta una e una sola soluzione;*
- *il sistema ammetta* ∞^1 *soluzioni;*
- *il sistema ammetta* ∞^2 *soluzioni;*
- *il sistema non ammetta soluzioni.*

Esercizio 19. *Discutere il numero delle soluzioni e, se possibile, risolvere i seguenti sistemi lineari al variare di* $k \in \mathbb{R}$.

- $\begin{cases} kx - 2y = 2k - 1 \\ x - 2ky = k \end{cases}$;

- $\begin{cases} ke^k x + 2y = 0 \\ kx + y = 0 \end{cases}$;

- $\begin{cases} e^{k-1} x + y = 1 \\ kx + ky = 0 \end{cases}$;

- $\begin{cases} (k+1)\,x + (5-k)\,y = k^2 + k + 18 \\ 7x + 2y = 7k + 27 \end{cases}$;

- $\begin{cases} 5x + (k+8)\,y = -5k - 10 \\ 3x + (-k-3)\,y = -3k - 6 \end{cases}$;

- $\begin{cases} (2-k)\,x + (6-k)\,y = -k^2 - 3k + 18 \\ 6x + 3y = 6k + 24 \end{cases}$;

- $\begin{cases} 2x + (k+5)\,y = k + 3 \\ x + (-k-1)\,y = -k - 2 \end{cases}$.

Esercizio 20. *Discutere il numero delle soluzioni e, se possibile, risolvere i seguenti sistemi lineari al variare di* $k \in \mathbb{R}$.

- $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$;

- $\begin{cases} kx + y = 1 \\ -z - y = 3 \\ ky + x = 4 \end{cases}$;

- $\begin{cases} x + ky = k \\ x + kz = 1 \\ -4x - 4kz = 2 \end{cases}$;

- $\begin{cases} -2y - z = 1 \\ x - 2ky = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$;

- $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ky + z = 2 \\ x - kz = -k \end{cases}$;

- $\begin{cases} 5 = 2x - 4z \\ x + y = 2x - 3 \\ kx + ky + z = 0 \end{cases}$;

- $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ -x - y - z = -1 \end{cases}$.

Esercizio 21. *Discutere il numero delle soluzioni e, se possibile, risolvere i seguenti sistemi lineari al variare di $k \in \mathbb{R}$.*

- $\begin{cases} \log(k)x + y = 0 \\ kx + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$;

- $\begin{cases} kx + y = -1 \\ 4x + 2y = -k \\ 6x + 3y = -3 \end{cases}$;

- $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + kz = k \\ x + (k-1)\,y = 0 \\ x + (k-1)\,y + kz = k. \end{cases}$.

Esercizio 22. *Sia $AX = B$ il sistema lineare con $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & -1 \\ k & k & -k & 1 \end{pmatrix}$,*

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- *Per quali valori reali di k il sistema ha ∞^1 soluzioni?*

- *Fissato $k = 0$ aggiungere al sistema un numero opportuno di equazioni in modo tale che il nuovo sistema abbia un'unica soluzione.*

Esercizio 23. *Dato il sistema lineare* $\begin{cases} x + y - kz = k \\ 2x + y - kz = k \\ kx - y = 1 \end{cases}$,

- *Stabilire se esistono valori reali di k per i quali il sistema è equivalente (i.e. ha le stesse soluzioni) al sistema formato dalle prime due equazioni.*

- *Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema formato dalle prime due equazioni.*