Note sui Sistemi Lineari per gli studenti del corso di Matematica Generale (II canale)

Roberto Monte

January 2, 2003

Abstract

These notes are still a work in progress and are intended to be for internal use. Please, don't cite or quote.

Contents

Contents

0.1 Sistemi Lineari

0.1.1 Sistemi lineari di m equazioni in n incognite

Definition 1 *Data una famiglia indicizzata di numeri reali $a_{i,j}, b_i$, al variare degli indici $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, il problema della determinazione di tutte le n-ple di numeri reali $(x_1, \ldots, x_n)$ che soddisfano le m equazioni*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & +\ldots+ & a_{1,j}x_j & +\ldots+ & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{i,1}x_1 & +\ldots+ & a_{i,j}x_j & +\ldots+ & a_{i,n}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m,1}x_1 & +\ldots+ & a_{m,j}x_j & +\ldots+ & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \right. , \tag{1}$$

è chiamato sistema lineare reale di m equazioni nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$ *a* coefficienti $a_{i,j}$ *e* termini noti b_i.

Definition 2 *Chiamiamo* soluzione particolare *del sistema (1) ogni n-pla di numeri reali $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ tale che attribuendo rispettivamente i valori x_j^0 alle incognite x_j, per ogni $j = 1, \ldots, n$, tutte le m equazioni del sistema siano soddisfatte. Chiamiamo* soluzione generale *del sistema (1) l'insieme di tutte le sue soluzioni particolari.*

Example 3 *Il sistema lineare*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{array} \right. \tag{2}$$

ha un'unica soluzione $(x_1^0, x_2^0) = (3/2, -1/2)$. La soluzione generale di (2) è allora l'insieme

$$\{(3/2, -1/2)\},$$

costituito dal solo elemento $(3/2, -1/2)$.

Example 4 *Il sistema lineare*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{array} \right. \tag{3}$$

ha infinite soluzioni $(x_1^0, x_2^0) = (1-k, k)$*, al variare di* $k \in \mathbb{R}$*. Una soluzione particolare di (3) è, ad esempio, la coppia* $(1, 0)$*, mentre la sua soluzione generale è l'insieme*

$$\{(1-k, k), \quad k \in \mathbb{R}\}.$$

Example 5 *Il sistema lineare*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

non ha alcuna soluzione. La soluzione generale di (4) è allora l'insieme vuoto.

Definition 6 *La matrice di* m *righe ed* n *colonne*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \equiv (a_{i,j}) \equiv A \tag{5}$$

è chiamata matrice dei coefficienti*del sistema (1). I vettori*

$$A^1 \equiv \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \ldots, A^j \equiv \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}, \ldots, A^n \equiv \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{i,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

sono chiamati vettori colonna della matrice dei coefficienti *del sistema lineare (1). I vettori*

$$A_1 \equiv (a_{1,1}, \ldots, a_{1,j}, \ldots, a_{1,n}), \ldots, A_i \equiv (a_{i,1}, \ldots, a_{i,j}, \ldots, a_{i,n}), \ldots, A_m \equiv (a_{m,1}, \ldots, a_{m,j}, \ldots, a_{m,n}) \in \mathbb{R}^n$$

sono chiamati vettori riga della matrice dei coefficienti *del sistema lineare (1).*

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \equiv (b_i) \equiv B \in \mathbb{R}^m \qquad \textit{ed} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \equiv (x_j) \equiv X \in \mathbb{R}^n$$

sono rispettivamente chiamati vettore dei termini noti *e* vettore delle incognite del sistema.

Definition 7 *Diciamo che il sistema lineare (1) è* omogeneo *se il vettore dei termini noti* B *è il vettore nullo di* $\mathbb{R}^m$*, ossia se* $b_i = 0$ *per ogni* $i = 1, \ldots, m$*.*

Definition 8 *Supposto che (1) non sia omogeneo, allora il sistema lineare omogeneo*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & +\ldots+ & a_{1,j}x_j & +\ldots+ & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{i,1}x_1 & +\ldots+ & a_{i,j}x_j & +\ldots+ & a_{i,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m,1}x_1 & +\ldots+ & a_{m,j}x_j & +\ldots+ & a_{m,n}x_n & = & 0 \end{cases} \tag{6}$$

è chamato sistema lineare omogeneo associato *a (1).*

Remark 9 *Risolvere il sistema lineare (1) equivale a risolvere l'equazione matriciale*

$$AX = B. \tag{7}$$

In particolare, risolvere il sistema lineare (6) equivale a risolvere l'equazione matriciale

$$AX = 0. \tag{8}$$

Definition 10 *L'equazione matriciale (8) è chiamata* equazione omogenea associata *alla (7).*

Remark 11 *L'equazione matriciale (8) ammette sempre almeno la soluzione banale $X = 0$.*

Remark 12 *Supposto che i vettori X ed Y siano soluzioni dell'equazione matriciale (8), allora, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il vettore $Z \equiv \alpha X + \beta Y$ è anche esso soluzione di (8).*

Proof. Per ipotesi

$$AX = 0 \qquad \text{e} \qquad AY = 0.$$

Allora, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$A(\alpha X) = \alpha AX = 0 \qquad \text{e} \qquad A(\beta Y) = \beta AY = 0.$$

Pertanto

$$AZ = A(\alpha X + \beta Y) = A(\alpha X) + A(\beta Y) = 0,$$

c.v.d.. ■

Corollary 13 *La soluzione generale dell'equazione matriciale omogenea (8) è un sottospazio lineare (eventualmente il sottospazio banale) di $\mathbb{R}^n$.*

Proposition 14 *Supposto che l'equazione matriciale (7) ammetta una* soluzione particolare X_0*, allora tutte e sole le soluzioni di (7) si ottengono sommando alla soluzione particolare X_0 una soluzione X dell'equazione omogenea (8) associata alla (7). In altri termini, il vettore generico $\tilde{X}$ della soluzione generale di (7) è scrivibile nella forma*

$$\tilde{X} = X_0 + \bar{X},$$

dove X_0 è una soluzione particolare di (7) ed $\bar{X}$ è il vettore generico della soluzione generale di (8).

Proof. Se X_0 è una soluzione di (7), allora per ogni soluzione $\bar{X}$ di (8) si ha chiaramente

$$A(X_0 + \bar{X}) = AX_0 + A\bar{X} = B,$$

e ciò prova che $X_0 + \bar{X}$ è ancora una soluzione di (7). Viceversa, se X_1 è un'altra soluzione di (7), allora abbiamo

$$A(X_0 - X_1) = AX_0 - AX_1 = 0.$$

Pertanto $X_0 - X_1 \equiv \bar{X}$ è soluzione di (8), e chiaramente

$$X_1 = X_0 + \bar{X},$$

ossia la soluzione X_1 è della forma cercata. ■

Corollary 15 *L'integrale generale del sistema lineare omogeneo (6) è un sottospazio lineare (eventualmente il sottospazio banale) di* $\mathbb{R}^n$*. Supposto che il sistema lineare (1) ammetta una soluzione* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$*, allora tutte e sole le sue soluzioni si ottengono sommando alla soluzione particolare* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *una soluzione* $(x_1, \ldots, x_n)$ *del sistema lineare omogeneo (6) associato ad (1). In altri termini, la n-pla generica* $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ *della soluzione generale di (7) è scrivibile nella forma*

$$(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = (x_1^0 + \bar{x}_1, \ldots, x_n^0 + \bar{x}_n),$$

dove $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *è una soluzione particolare di (7) ed* $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ *è la n-pla generica della soluzione generale di (8).*

Corollary 16 *Supposto che il sistema lineare (1) ammetta una soluzione, allora o ne ammette una sola, nel caso in cui il sottospazio lineare delle soluzioni del sistema lineare omogeneo (6) è il sottospazio banale, o ne ammette infinite.*

Remark 17 *Risolvere il sistema lineare (1) equivale a determinare se il vettore dei termini noti del sistema appartiene al sottospazio di* $\mathbb{R}^m$ *generato dai vettori colonna della matrice dei coefficienti del sistema. In altri termini,* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *è una soluzione del sistema lineare (1) se e solo se*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^0 A^j = B.$$

0.1.2 Sistemi lineari quadrati di ordine n

Consideriamo adesso il caso particolare, ma fondamentale, di un sistema lineare non omogeneo il cui numero di equazioni uguagli il numero di incognite, ossia un sistema del tipo

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & +\ldots+ & a_{1,j}x_j & +\ldots+ & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{i,1}x_1 & +\ldots+ & a_{i,j}x_j & +\ldots+ & a_{i,n}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 & +\ldots+ & a_{n,j}x_j & +\ldots+ & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \right. , \qquad (9)$$

noto anche come *sistema lineare quadrato di ordine* n.

Abbiamo:

Proposition 18 *Il sistema (9) ammette un'unica soluzione* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *se e solo se i vettori colonna della matrice dei coefficienti di (9) sono linearmente indipendenti, ossia se e solo se il sistema omogeneo associato (9) dato da*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & +\ldots+ & a_{1,j}x_j & +\ldots+ & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{i,1}x_1 & +\ldots+ & a_{i,j}x_j & +\ldots+ & a_{i,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 & +\ldots+ & a_{n,j}x_j & +\ldots+ & a_{n,n}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

ammette la sola soluzione banale $(0, \ldots, 0)$.

Proof. E' sufficiente osservare che, nell'ipotesi considerata, i vettori colonna $A^1, \ldots, A^n$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$ (in quanto insieme di n vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$). Pertanto ogni vettore B di $\mathbb{R}^n$ è esprimibile in modo unico come combinazione lineare di $A^1, \ldots, A^n$,

$$B = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 A^j,$$

i cui coefficienti $x_1^0, \ldots, x_n^0$ costituiscono proprio la soluzione del sistema (9) secomdo quanto osservato in 17. ■

Example 19 *Risolvere il sistema lineare*

$$\left\{\begin{array}{l} -2x + 2y = 0 \\ x + 5y + 5z = 1 \\ x + z = 1 \end{array}\right. , \tag{10}$$

significa determinare se il vettore colonna dei termini noti

$$B \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è esprimibile come combinazione lineare dei vettori colonna della matrice dei coefficienti del sistema

$$A^1 \equiv \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per opportuni coefficienti costituiti dalle incognite x, y, z *del sistema stesso. Ossia determinare se esistono* $x, y, z \in \mathbf{R}$ *tali che*

$$xA^1 + yA^2 + zA^3 = B.$$

Tali x, y, z esisteranno certamente se i vettori A^1, A^2, A^3 sono linearmente indipendenti, cioè se la sola soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ x + 5y + 5z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \tag{11}$$

associato al sistema considerato è la soluzione banale. Procedendo per sostitzione, dalla prima e terza equazione otteniamo rispettivamente

$$y = x \qquad e \qquad z = -x.$$

Queste, sostituite nella seconda, danno

$$x = 0$$

e conseguentemente

$$y = z = 0.$$

In definitiva, la sola soluzione del sistema (11) è la soluzione banale e di conseguenza il sistema (10) ammette una ed una sola soluzione.

Example 20 *Risolvere al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ il sistema lineare*

$$\begin{cases} (\alpha - 1)\, x - 2y + \alpha z = 0 \\ x + \alpha y + \alpha z = 1 \\ x - 2y + \alpha z = 0 \end{cases} \tag{12}$$

significa determinare se, e per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, il vettore colonna dei termini noti

$$B \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è esprimibile come combinazione lineare dei vettori colonna della matrice dei coefficienti del sistema

$$A^1 \equiv \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 \equiv \begin{pmatrix} -2 \\ \alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A^3 \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

per opportuni coefficienti costituiti dalle incognite x, y, z del sistema stesso. Ossia determinare se, e per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, esistono $x, y, z \in \mathbf{R}$ tali che

$$xA^1 + yA^2 + zA^3 = B.$$

Tali x, y, z esisteranno certamente per quei valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali i vettori A^1, A^2, A^3 sono linearmente indipendenti, cioè la sola soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} (\alpha - 1)\, x - 2y + \alpha z = 0 \\ x + \alpha y + \alpha z = 0 \\ x - 2y + \alpha z = 0 \end{cases} \tag{13}$$

associato al sistema considerato è la soluzione banale. Procedendo per sostituzione, dalla terza equazione ricaviamo

$$x = 2y - \alpha z$$

e sostituendo nella prima otteniamo

$$(\alpha - 2)\, x = 0.$$

Nell'ipotesi $\alpha \neq 2$, *quest'ultima comporta*

$$x = 0$$

ed il sistema si riduce a

$$\begin{cases} \alpha y + \alpha z = 0 \\ -2y + \alpha z = 0 \end{cases}. \tag{14}$$

Dalla seconda equazione del sistema ridotto (14) otteniamo

$$\alpha z = 2y$$

e sostituendo nella prima

$$(\alpha + 2)\, y = 0.$$

Nell'ipotesi $\alpha \neq -2$ *segue allora*

$$y = 0$$

ed in conseguenza il sistema (14) si riduce ulteriormente a

$$\alpha z = 0.$$

Infine nell'ipotesi $\alpha \neq 0$ *otteniamo*

$$z = 0.$$

In definitiva, se $\alpha \neq 2$, $\alpha \neq -2$, $\alpha \neq 0$, *l'unica soluzione del sistema (13) è la soluzione banale, e pertanto il sistema (12) ammette un'unica soluzione. Restano da esaminare ancora i casi particolari* $\alpha = 2$, $\alpha = -2$, $\alpha = 0$.

Nel caso $\alpha = 2$ *il sistema (12) diviene*

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases},$$

ed essendo la sua prima e terza equazione ridondanti, si riduce a

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}.$$

dalla prima equazione di quest'ultimo otteniamo allora

$$2y = x + 2z$$

e sostituendo nella seconda segue

$$2x + 4z = 1$$

da cui la generica soluzione

$$x = 1/2 - 2k, \qquad y = 1/4, \qquad , z \equiv k,$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$. *In definitiva, il sistema (12) ha la soluzione generale*

$$\{(1/2 - 2k, 1/4, k)\,, \quad k \in \mathbf{R}\}.$$

Ciò significa che, nonostante i vettori A^1, A^2, A^3 *siano linearmente dipendenti, il vettore* B *è ancora esprimibile come loro combinazione lineare. In effetti, in questo caso risulta*

$$A^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 \equiv \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A^3 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e si vede chiaramente che i vettori A^1 *ed* A^3 *sono dipendenti, d'altra parte si ha anche*

$$\frac{1}{2}A^1 + \frac{1}{4}A^2 + 0A^3 = B$$

per cui B *è combinazione lineare di* A^1, A^2 *ed* A^3.

Nel caso $\alpha = -2$ *il sistema (12) diviene*

$$\begin{cases} -3x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 2z = 1 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases},$$

ed essendo le sue due ultime equazioni chiaramente incompatibili, non ammette alcuna soluzione.

Infine, nel caso $\alpha = 0$ *il sistema (12) diviene*

$$\begin{cases} -x - 2y = 0 \\ x = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases},$$

ed è ancora chiaramente incompatibile.

Teorema di Cramer

Per i sistemi lineari quadrati di ordine n sussiste il notevole teorema di Cramer che assume la conoscenza della funzione determinante.

Theorem 21 *Il sistema (9) ammette una ed una sola soluzione* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *se e solo se il determinante della matrice dei coefficenti è non nullo. In tal caso, la soluzione è data dalla formula*

$$x_j = \frac{\det(A^1, \ldots, \overset{j}{B}, \ldots, A^n)}{\det A}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

dove $(A^1, \dots, \overset{j}{B}, \dots, A^n)$ *denota una matrice avente gli stessi vettori colonna di* A *tranne il* j*-esimo, rimpiazzato dal vettore* B *dei termini noti del sistema.*

Illostriamo l'applicazione del teorema di Cramer con alcuni esempi.

Example 22 *Il determinante della matrice dei coefficienti del sistema lineare*

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \tag{15}$$

è dato da

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6.$$

Pertanto il sistema (15) ammette un'unica soluzione data da

$$x_0 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{6}, \quad y_0 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{6}, \quad z_0 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{6}.$$

Example 23 *Il determinante della matrice dei coefficienti del sistema lineare*

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 0 \end{cases}, \tag{16}$$

dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$*, è dato da*

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)^2 (\alpha + 2).$$

Pertanto, se $\alpha \neq 1$ *e* $\alpha \neq -2$ *il sistema (16) ammette un'unica soluzione data da*

$$x_0 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)}, \quad y_0 = \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)}, \quad z_0 = \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{(\alpha - 1)^2 (\alpha + 2)}.$$

Nei casi in cui $\alpha = 1$*, o* $\alpha = -2$*, non sussiste l'ipotesi che permette di applicare il teorema di Cramer. D'altra parte, se* $\alpha = 1$ *il sistema (16) si riscrive come*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

e si riduce evidentemente alla singola equazione

$$x + y + z = 1,$$

la quale ha la soluzione generale

$$\{(1 - k - \ell, k, \ell)\,, \quad k, \ell \in \mathbb{R}\}.$$

Invece, se $\alpha = -2$ il sistema (16) diviene

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

e sommando la sua seconda e terza equazione si ottiene

$$2x - y - z = 2,$$

che è chiaramente incompatibile con la prima.

0.1.3 Risoluzione dei sistemi lineari di m equazioni in n incognite

Come precedentemente osservato, un sistema lineare del tipo (1) ammette soluzione se e solo se il vettore colonna B dei termini noti è combinazione lineare dei vettori colonna $A^1, \ldots, A^n$ della matrice dei coefficienti. Cio' suggerisce una procedura per la determinazione delle eventuali soluzioni di (1).

Come primo passo possiamo estrarre dall'insieme costituito dai vettori $A^1, \ldots, A^n$ un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti. Quindi, supposto per semplicita' di scrittura, che questo insieme sia costituito dai vettori $A^1, \ldots, A^k$, bisogna verificare se il vettore B è esprimibile come combinazione lineare dei vettori colonna $A^1, \ldots, A^k$ mediante opportuni coefficienti $x_1^0, \ldots, x_k^0$. In caso negativo il sistema (1) non ha soluzione, mentre in caso positivo il sistema (1) ha per soluzione generica la somma della n-pla $(x_1^0, \ldots, x_k^0, 0, \ldots, 0)$ con la n-pla $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n)$ soluzione generica del sistema omogeneo (6) associato a (1).

Illustreremo desso in maggior dettaglio, servendoci di alcuni semplici esempi, i singoli passi della procedura.

Example 24 *Il sistema lineare*

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ -x - y = 0 \end{cases} . \tag{17}$$

ha per vettori colonna della matrice dei coefficienti i vettori

$$A^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risultando

$$A^3 = A^1 - A^2,$$

ed essendo A^1 *ed* A^2 *indipendenti, essi costituiscono un sottoinsieme massimale linearmente indipendente estratto dall'insieme* $\{A^1, A^2, A^3\}$. *D'altra parte, il sistema*

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + y = 2 \\ 3x + y = 1 \\ -x - y = 0 \end{cases},$$

corrispondente alla combinazione lineare

$$xA^1 + yA^2 = B,$$

è chiaramente incompatibile. Pertanto il sistema (17) non ammette soluzione.

Example 25 *Il sistema lineare*

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 5 \\ -x - y = -1 \end{cases} \tag{18}$$

ha ancora quale sottoinsieme massimale linearmente indipendente estratto dall'insieme dei vettori colonna della matrice dei coefficienti i vettori

$$A^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, il sistema

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = 3 \\ 3x + y = 5 \\ -x - y = -1 \end{cases},$$

corrispondente alla combinazione lineare

$$xA^1 + yA^2 = B,$$

ha chiaramente la soluzione

$$x_0 = 2, \qquad y_0 = -1.$$

Consideriamo allora il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}, \tag{19}$$

associato a (18). Procedendo per sostituzione, non è difficile determinare che la sua generica soluzione puo' essere scritta nella forma

$$x \equiv k, \qquad y = -k, \qquad z = -k,$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Pertanto, la soluzione generale del sistema (18) è

$$\{(2 + k, -1 - k, -k), \quad k \in \mathbb{R}\}.$$

Complementi per la risoluzione dei sistemi lineari di m equazioni in n incognite

I seguenti complementi presentano alcune tecniche alternative al metodo di sostituzione per la risoluzione di un sistema lineare del tipo (9). Per la loro comprensione, come gia' nel caso del teorema di Cramer, è tuttavia necessario possedere la conoscenza di alcuni elementi della teoria dei determinanti. Infatti, tali tecniche consentono di ridurre il fondamentale problema della individuazione di sottoinsiemi massimali linearmente indipendenti di vettori colonna della matrice dei coefficienti (5) del sistema lineare (9) al problema di calcolo dei determinanti di opportune matrici estratte da (5).

In quanto segue sia

$$A \equiv (a_{i,j}) \equiv \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{20}$$

una generica matrice di m righe ed n colonne e sia $k \leq \min\{m, n\}$ un intero positivo.

Definition 26 *Chiamiano* minore *di ordine k estratto da A ogni matrice costruita selezionando k righe e k colonne di A, siano esse $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ ed $A^{j_1}, \ldots, A^{j_k}$, e scegliendo ordinatamente le componenti di A appartenenti sia alle righe che alle colonne selezionate.*

Example 27 *Sia*

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Selezionate le righe A_1, A_2, A_3, A_4 e le colonne A^1, A^2, A^3, A^5, si estrae il minore di ordine 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Selezionate le righe A_1, A_3, A_4 e le colonne A^2, A^3, A^5, si estrae il minore di ordine 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Selezionate le righe A_2, A_3 e le colonne A^2, A^5, si estrae il minore di ordine 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definition 28 *Chiamiano* caratteristica *della matrice A, in simboli $car(A)$, l'ordine del minore di ordine massimo avente determinante non nullo.*

Example 29 *Sia la matrice A come nel precedente esempio. Allora, i minori di ordine* 4 *estraibili da A sono*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che ciascuno di essi ha determinante nullo e pertanto deve aversi

$$car(A) \leq 3.$$

D'altra parte il minore di ordine 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

estratto da A selezionandone le righe A_2, A_3, A_4 e le colonne A^2, A^3, A^4 ha determinante non nullo e cio' ci consente di affermare che

$$car(A) = 3.$$

Il calcolo della caratteristica di una matrice puo' essere parecchio semplificata grazie al seguente teorema.

Theorem 30 *Si supponga l'esistenza di un minore di ordine k della matrice A con determinante non nullo e si supponga inoltre che ogni altro minore di ordine $k+1$ ottenuto orlando il minore di ordine k in questione con una delle restanti colonne e righe di A abbia determinante nullo. Allora risulta $car(A) = k$.*

Per comprendere l'importanza del suddetto teorema, osserviamo che, applicandolo all'esempio precedentemente illustrato, ci consente di affermare che $\mathrm{car}(A) = 3$ solo sulla base del fatto che

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

e che i minori di ordine 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ottenuti orlando il minore di ordine 3 considerato nei due soli modi possibili, cioè mediante la riga A_1 e le colonne A^1 ed A^5, rispettivamente, hanno determinante nullo.

Un ruolo centrale ha il seguente risultato.

Theorem 31 *La caratteristica di A coincide con il numero massimo di vettori colonna linearmente indipendenti estraibili da A. Inoltre, un insieme massimale di vettori colonna linearmente indipendenti estratto dall'insieme dei vettori colonna costituenti la matrice A è individuato proprio dai vettori colonna che formano il minore il cui ordine fornisce il valore di $\mathrm{car}(A)$.*

Example 32 *Un sottoinsieme massimale di vettori colonna linearmente indipendenti estratto dall'insieme dei vettori colonna della matrice A è individuato da A^2, A^3, A^4 che costituiscono i vettori colonna del minore di ordine 3 estratto da A a determinante non nullo.*

Illustriamo infine l'applicazione dei risultati sin qui enunciati alla risoluzione dei sistemi lineari.

Example 33 *Considerato il sistema lineare*

$$\begin{cases} v + w + 2x + 2y = 2 \\ v + y + z = 0 \\ v - w = 0 \\ -v - x - y = 1 \end{cases}, \tag{21}$$

la cui matrice dei coefficienti è proprio la matrice

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

da quanto precedentemente discusso sappiamo che un sottoinsieme massimale di vettori colonna linearmente indipendenti estratto dall'insieme dei vettori colonna *di A è individuato da A^2, A^3, A^4. Cio' comporta che il sistema (21) si puo' ridurre a*

$$\begin{cases} w + 2x + 2y = 2 \\ y = 0 \\ w = 0 \\ x - y = 1 \end{cases},$$

la cui unica soluzione è data da

$$w_0 = 0, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0.$$

Una soluzione particolare del sistema (21) è allora

$$v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0.$$

Inoltre, procedendo per sostituzione, si vede facilmente che il sistema omogeneo associato a (21), dato da

$$\begin{cases} v + w + 2x + 2y = 0 \\ v + y + z = 0 \\ v - w = 0 \\ -v - x - y = 0 \end{cases},$$

ha per generica soluzione

$$\bar{v} \equiv k, \quad \bar{w} = k, \quad \bar{x} = -(k + \ell), \quad \bar{y} = \ell, \quad \bar{z} = -(k + \ell)$$

al variare dei parametri $k, \ell \in R$. In definitiva, la soluzione generale di (21) è

$$\{(k, k, 1 - (k + \ell), \ell, -(k + \ell)), \quad k, \ell \in R\}.$$

Le stesse considerazioni si applicano al sistema lineare

$$\begin{cases} v + w + 2x + 2y = 1 \\ v + y + z = 0 \\ v - w = 0 \\ -v - x - y = 1 \end{cases}, \tag{22}$$

che pero' puo' essere ridotto a

$$\begin{cases} w + 2x + 2y = 1 \\ y = 0 \\ w = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

Quest'ultimo è chiaramente incompatibile e pertanto il sistema (22) non ammette alcuna soluzione.