Note di Matematica Generale:

Elementi di Teoria Elementare delle

Funzioni Reali di Più Variabili Reali

Roberto Monte

December 6, 2006

ABSTRACT These notes are still a work in progress and are intended to be for internal use. Please, don't cite or quote.

Contents

1

Elementi di Teoria Elementare delle Funzioni Reali di Due Variabili Reali

1.1 Generalità

Assumeremo note le nozioni topologiche elementari caratteristiche dello spazio reale euclideo $\mathbb{R}^3$, che doteremo di un sistema monometrico ortogonale di assi coordinati X_1, X_2, X_3. Di conseguenza un punto Q di $\mathbb{R}^3$ verrà identificato con una terna di numeri reali (x_1, x_2, x_3), che costituiscono le sue coordinate rispetto al sistema di assi introdotto in $\mathbb{R}^3$. Inoltre identificheremo il piano reale euclideo $\mathbb{R}^2$ con il piano X_1X_2 di $\mathbb{R}^3$ dotato dalla topologia indotta dalla topologia di $\mathbb{R}^3$ e del sistema monometrico ortogonale di assi coordinati X_1, X_2 indotto dal sistema di assi X_1, X_2, X_3. Un punto P di $\mathbb{R}^2$ verrà allora univocamente individuato da una coppia di numeri reali (x_1, x_2) che costituiscono le sue coordinate rispetto alla proiezione ortogonale sul piano X_1X_2 del sistema di assi introdotto in $\mathbb{R}^3$ e verrà identificato con il punto Q di $\mathbb{R}^3$ corrispondente alla terna $(x_1, x_2, 0)$.

1.1.1 Luoghi Geometrici del Piano

Preliminarmente all'introduzione di elementi della teoria elementare delle funzioni reali di due variabili reali è opportuno descrivere alcuni luoghi geometrici del piano che svolgeranno un ruolo importante nella caratterizzazione dei domini, nello studio del segno delle funzioni, nonchè nello studio dei problemi di ottimizzazione vincolata.

Definizione Chiamiamo *retta* del piano euclideo l'inseme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo

$$ax_1 + bx_2 + c = 0, \tag{1.1}$$

essendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ con a e b non entrambi nulli. La stessa Equazione (1.1) è chiamata *equazione caratteristica della retta*.

Definizione Chiamiamo *semipiano positivo* [risp. *semipiano negativo*] del piano euclideo rispetto alla retta di equazione (1.1) l'insieme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ le cui coordinate soddisfano una disequazione del tipo

$$ax_1 + bx_2 + c \geq 0 \qquad [ax_1 + bx_2 + c \leq 0],$$

essendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ con a e b non entrambi nulli.

Definizione Chiamiamo *parabola* con asse parallelo all'asse delle ordinate del piano euclideo l'inseme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo

$$x_2 = ax_1^2 + bx_1 + c, \tag{1.2}$$

essendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ con a non nullo. Posto $\Delta \equiv b^2 - 4ac$, il punto $V \equiv (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ è chiamato *vertice* della parabola. La retta di equazione $x_1 = -\frac{b}{2a}$ è chiamata *asse* della parabola. Il punto $F \equiv (-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a})$ è chiamato *fuoco* della parabola.

Osservazione Se $\Delta > 0$ la parabola interseca l'asse delle ascisse nei punti $P_1 \equiv (\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, 0)$ e $P_2 \equiv (\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0)$. Se $\Delta = 0$ la parabola interseca l'asse delle ascisse nel suo vertice $V \equiv (-\frac{b}{2a}, 0)$. Infine, se $\Delta < 0$ la parabola non interseca l'asse delle ascisse in alcun punto.

Definizione Chiamiamo *regione convessa* del piano euclideo individuata dalla parabola di equazione (1.2) l'insieme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ che possono essere congiunti al fuoco $F \equiv (-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a})$ mediante un segmento che non intersechi la parabola stessa. L'insieme complementare della regione convessa è chiamato regione *concava*.

Definizione Chiamiamo *regione positiva* [risp. *regione negativa*] del piano euclideo rispetto alla parabola di equazione (1.2) l'insieme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ le cui coordinate soddisfano una disequazione del tipo

$$x_2 - (ax_1^2 + bx_1 + c) \geq 0 \qquad [x_2 - (ax_1^2 + bx_1 + c) \leq 0],$$

essendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ con a non nullo.

Teorema La regione convessa individuata dalla parabola di equazione (1.2) coincide con la regione positiva [risp. negativa] rispetto alla stessa parabola se e solo se un qualsiasi punto $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0)$ in essa contenuto soddisfa la disequazione $x_2^0 - (a(x_1^0)^2 + bx_1^0 + c) \geq 0$ [risp. $x_2^0 - (a(x_1^0)^2 + bx_1^0 + c) \leq 0$].

Osservazione La regione convessa individuata dalla parabola di equazione (1.2) coincide con la regione positiva [risp. negativa] rispetto alla stessa parabola se e solo la regione concava da essa individuata coincide con la regione negativa [risp. positiva].

Definizione Chiamiamo *parabola* con asse parallelo all'asse delle ascisse del piano euclideo l'inseme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo

$$x_1 = ax_2^2 + bx_2 + c, \tag{1.3}$$

essendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ con a non nullo. Posto $\Delta \equiv b^2 - 4ac$, il punto $V \equiv (-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a})$ è chiamato *vertice* della parabola. La retta di equazione $x_2 = -\frac{b}{2a}$ è chiamata *asse* della parabola. Il punto $F \equiv (\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a})$ è chiamato *fuoco* della parabola.

Osservazione Se $\Delta > 0$ la parabola interseca l'asse delle ordinate nei punti $P_1 \equiv (0, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})$ e $P_2 \equiv (0, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})$. Se $\Delta = 0$ la parabola interseca l'asse delle ordinate nel suo vertice $V \equiv (0, -\frac{b}{2a})$. Infine, se $\Delta < 0$ la parabola non interseca l'asse delle ordinate in alcun punto.

Definizione Chiamiamo *regione convessa* del piano euclideo individuata dalla parabola di equazione (1.3) l'insieme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ che possono essere congiunti al fuoco $F \equiv (\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a})$ mediante un segmento che non intersechi la parabola stessa. L'insieme complementare della regione convessa è chiamato regione *concava*.

Definizione Chiamiamo *regione positiva* [risp. *regione negativa*] del piano euclideo rispetto alla parabola di equazione (1.2) l'insieme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ le cui coordinate soddisfano una disequazione del tipo

$$x_1 - (ax_2^2 + bx_2 + c) \geq 0 \qquad [x_1 - (ax_2^2 + bx_2 + c) \leq 0],$$

essendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ con a non nullo.

Teorema La regione convessa individuata dalla parabola di equazione (1.3) coincide con la regione positiva [risp. negativa] rispetto alla stessa parabola se e solo se un qualsiasi punto $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0)$ in essa contenuto soddisfa la disequazione $x_1^0 - (a(x_2^0)^2 + bx_2^0 + c) \geq 0$ [risp. $x_1^0 - (a(x_2^0)^2 + bx_2^0 + c) \leq 0$].

Osservazione La regione convessa individuata dalla parabola di equazione (1.3) coincide con la regione positiva [risp. negativa] rispetto alla stessa parabola se e solo la regione concava da essa individuata coincide con la regione negativa [risp. positiva].

Definizione Chiamiamo *ellisse* di centro l'origine del piano euclideo l'inseme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \tag{1.4}$$

essendo $a, b \in \mathbb{R}$ entrambi non nulli.

Definizione Chiamiamo *regione convessa* del piano euclideo individuata dall'ellisse di equazione (1.4) l'insieme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ che possono essere congiunti al centro $O \equiv (0, 0)$ mediante un segmento che non intersechi l'ellisse stessa. L'insieme complementare della regione convessa è chiamato regione *concava*.

Definizione Chiamiamo *regione positiva* [risp. *regione negativa*] del piano euclideo rispetto all'ellisse di equazione (1.4) l'insieme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ le cui coordinate soddisfano una disequazione del tipo

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 \geq 0,$$

essendo $a, b \in \mathbb{R}$ entrambi non nulli.

Osservazione La regione convessa del piano euclideo individuata dall'ellisse di equazione (1.4) coincide con la regione negativa del piano euclideo rispetto alla stessa ellisse e la regione concava coincide con la regione positiva.

Definizione Chiamiamo *iperbole* di centro l'origine ed asse trasverso l'asse delle ascisse del piano euclideo l'inseme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \tag{1.5}$$

essendo $a, b \in \mathbb{R}$ entrambi non nulli.

Definizione Chiamiamo *regione concava* del piano euclideo individuata dall'iperbole di equazione (1.5) l'insieme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ che possono essere congiunti al centro $O \equiv (0, 0)$ mediante un segmento che non intersechi l'iperbole stessa. L'insieme complementare della regione convessa è chiamato regione *convessa*.

Definizione Chiamiamo *regione positiva* [risp. *regione negativa*] del piano euclideo rispetto all'iperbole di equazione (1.5) l'insieme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ le cui coordinate soddisfano una disequazione del tipo

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - 1 \geq 0,$$

essendo $a, b \in \mathbb{R}$ entrambi non nulli.

Definizione Le rette del piano euclideo di equazione complessiva

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0$$

sono chiamate asintoti dell'iperbole di equazione (1.5).

Osservazione La regione concava del piano euclideo individuata dall'iperbole di equazione (1.5) coincide con la regione negativa del piano euclideo rispetto alla stessa iperbole e la regione convessa coincide con la regione positiva.

Definizione Chiamiamo *iperbole* di centro l'origine ed asse trasverso l'asse delle ordinate del piano euclideo l'inseme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo

$$\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2} = 1, \tag{1.6}$$

essendo $a, b \in \mathbb{R}$ entrambi non nulli.

Definizione Le rette del piano euclideo di equazione complessiva

$$\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2} = 0$$

sono chiamate asintoti dell'iperbole di equazione (1.6).

Definizione Chiamiamo *regione positiva* [risp. *regione negativa*] del piano euclideo rispetto all'iperbole di equazione (1.6) l'insieme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ le cui coordinate soddisfano una disequazione del tipo

$$\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2} - 1 \geq 0,$$

essendo $a, b \in \mathbb{R}$ entrambi non nulli.

Osservazione La regione concava del piano euclideo individuata dall'iperbole di equazione (1.6) coincide con la regione negativa del piano euclideo rispetto alla stessa iperbole e la regione convessa coincide con la regione positiva.

1.1.2 Dominio

Sia f una regola che consente di associare numeri reali a punti del piano reale euclideo $\mathbb{R}^2$.

Definizione 1 *Chiamiamo* dominio *della funzione reale definita dalla regola f, e lo denotiamo con il simbolo $\mathbb{D}_f$, il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ per ogni punto $P \equiv (x_1, x_2)$ del quale è univocamente definito il numero reale $f(P) \equiv f(x_1, x_2)$ associato a P dalla regola f, noto come* valore *di f in P.*

Sia $\mathbb{D}_f$ il dominio della funzione reale definita dalla regola f.

Notazione 2 *Denotiamo tale funzione con il simbolo $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$, o anche, per brevità, con il solo simbolo f, qualora ciò non dia adito ad equivoci.*

Exercise 3 *Determinare il sottoinsieme $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$ dove la regola*

$$f(x_1, x_2) = \ln(1 - (x_1^2 + x_2^2))$$

definisce una funzione reale.

Exercise 4 *Determinare il sottoinsieme $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$ dove la regola*

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}$$

definisce una funzione reale.

Exercise 5 *Determinare il sottoinsieme $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$ dove la regola*

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{4 - (x_1^2 + x_2^2)}{x_1 - x_2}}$$

definisce una funzione reale.

Exercise 6 *Determinare il sottoinsieme $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$ dove la regola*

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{2x - (x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2 - x_1}}$$

definisce una funzione reale.

Exercise 7 *Determinare i sottoinsiemi $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$ dove ciascuna delle regole*

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= \ln(1 - x_1^2) + \ln(1 - x_2^2) \\
f(x_1, x_2) &= \ln(1 - x_1^2) - \ln(1 - x_2^2) \\
f(x_1, x_2) &= \ln(x_1^2 - 1) + \ln(1 - x_2^2) \\
f(x_1, x_2) &= \ln(x_1^2 - 1) - \ln(1 - x_2^2)
\end{aligned}$$

definisce una funzione reale.

Exercise 8 *Determinare il sottoinsieme* $\mathbb{D}_f$ *di* $\mathbb{R}^2$ *dove la regola*

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{(|x_1| - 1)(|x_2| - 1)}{|x_1| + |x_2| - 1}}$$

definisce una funzione reale.

Exercise 9 *Determinare il sottoinsieme* $\mathbb{D}_f$ *di* $\mathbb{R}^2$ *dove la regola*

$$f(x_1, x_2) = \ln\left(x \ln\left(\frac{1}{x_1 + x_2}\right)\right)$$

definisce una funzione reale.

Exercise 10 *Determinare il sottoinsieme* $\mathbb{D}_f$ *di* $\mathbb{R}^2$ *dove la regola*

$$f(x_1, x_2) = \ln\left(\ln\left(\frac{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}\right)\right)$$

definisce una funzione reale.

1.1.3 Grafico

Sia $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 11 (Grafico) *Chiamiamo* grafico *di* f *il sottoinsieme di* $\mathbb{R}^3$

$$\Gamma_f \equiv \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{D}_f \times \mathbb{R} \mid x_3 = f(x_1, x_2)\}.$$

Da notare che, mentre si è soliti pensare ai grafici di funzioni reali di una variabile reale come a curve del piano, può essere opportuno immaginare i grafici di funzioni reali di due varabili reali come superfici dello spazio.

Esempio 12 *La funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) = x_1^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ha per grafico l'insieme

$$\Gamma_f \equiv \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid x_3 = x_1^2\}.$$

Tale insieme è una superfice in $\mathbb{R}^3$ *generata per trasporto parallelo della parabola di equazione*

$$x_3 = x_1^2$$

lungo la direzione dell'asse X_2.

Osservazione 13 *Data una funzione reale di variabile reale $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il cui grafico*

$$\Gamma_\phi \equiv \{(x_1, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x_3 = \phi(x_1)\}$$

sia una curva di $\mathbb{R}^2$, possiamo definire una funzione reale di due variabili reali $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante la regola

$$f(x_1, x_2) = \phi(x_1), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Tale funzione ha la caratteristica che il suo grafico Γ_f è una superficie di $\mathbb{R}^3$ generata per trasporto parallelo di Γ_ϕ lungo la direzione dell'asse X_2.

Exercise 14 *Intuire il grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_1^3, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Esempio 15 *La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ha per grafico la superficie

$$\Gamma_f \equiv \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{D}_f \times \mathbb{R} \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2\}.$$

Tale superficie è un paraboloide generato dalla rotazione della parabola di equazione

$$x_3 = x_1^2$$

intorno all'asse X_3.

Osservazione 16 *Data una funzione reale di variabile reale $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, il cui grafico*

$$\Gamma_\phi \equiv \{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid x_3 = \phi(x_1)\}$$

sia una curva di $\mathbb{R}^2$, possiamo definire una funzione reale di due variabili reali $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante la regola

$$f(x_1, x_2) = \phi(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Tale funzione ha la caratteristica che il suo grafico Γ_f è una superficie di $\mathbb{R}^3$ generata dalla rotazione di Γ_ϕ intorno all'asse X_3.

Exercise 17 *Intuire il grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercise 18 *Intuire il grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) = \exp(-(x_1^2 + x_2^2)), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercise 19 *Intuire il grafico della funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) = \ln(1 + x_1^2 + x_2^2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercise 20 *Intuire il grafico della funzione* $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

Esempio 21 *La funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ha per grafico la superficie

$$\Gamma_f \equiv \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid x_3 = x_2^2 - x_1^2\}.$$

Tale superficie ricorda la sella di un cavallo disposta con centro nel punto $(0,0)$*, asse longitudinale l'asse* X_2 *ed asse trasverso l'asse* X_1*. Per rendersi conto di ciò basta osservare che intersecando* Γ_f *con il piano* X_2X_3*, di equazione* $x_1 = 0$*, si ottiene la sezione di equazione*

$$x_3 = x_2^2,$$

parabola del piano X_2X_3 *con vertice in* $(0,0)$*, asse* X_3 *e concavità rivolta verso l'alto, mentre intersecando* Γ_f *con il piano* X_1X_3*, di equazione* $x_2 = 0$*, si ottiene la sezione di equazione*

$$x_3 = -x_1^2,$$

parabola del piano X_1X_3 *con vertice in* $(0,0)$*, asse* X_3 *e concavità rivolta verso il basso.*

1.1.4 Curve di Livello

Sia $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 22 (Curva di Livello) *Dato* $c \in \mathbb{R}$ *chiamiamo* curva di livello c *di* f *il sottoinsieme di* $\mathbb{R}^2$

$$S_c \equiv \{P \in \mathbb{R}^2 \mid f(P) = c\}.$$

La curva di livello c di f non è altro che la controimmagine del singoletto $\{c\}$ mediante la funzione f,

$$S_c = f^{-1}(\{c\}),$$

ossia, l'insieme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{D}_f$ le cui coordinate sono soluzione dell'equazione

$$f(x_1, x_2) = c.$$

In particolare la curva di livello 0 è il luogo di zeri di f, ossia l'insieme dei punti $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{D}_f$ le cui coordinate sono soluzione dell'equazione

$$f(x_1, x_2) = 0.$$

Con riferimento ad una mappa altimetrica le curve di livello sono le cosiddette *isoipse*, che rappresentano gli insiemi di punti sulla carta in questione in cui la quota è costante ed uguale ad un valore caratteristico dell'isoipsa stessa. Con riferimento ad una mappa barometrica le curve di livello sono le *isobare*, che rappresentano gli insiemi di punti sulla carta in questione in cui la pressione è costante ed uguale ad un valore caratteristico dell'isobara stessa. Con riferimento ad una mappa termometrica, le curve di livello sono le *isoterme*, che rappresentano gli insiemi di punti sulla carta in questione in cui la temperatura è costante ed uguale ad un valore caratteristico dell'isoterma stessa.

Esempio 23 *La funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ha per curva di livello c *l'insieme*

$$S_c = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = c\}.$$

Tale insieme è vuoto se $c < 0$ *ed è una circonferenza di centro il punto* $(0, 0)$ *e raggio* $\sqrt{c}$ *se* $c > 0$. *Nel caso particolare in cui* $c = 0$ *la curva di livello è costituita dal solo punto* $(0, 0)$.

Esempio 24 *La funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ha per curva di livello c *l'insieme*

$$S_c = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^2 - x_1^2 = c\}.$$

Tale insieme è un'iperbole di centro il punto $(0, 0)$, *vertice* $(0, \sqrt{c})$ *ed asse principale* X_2, *se* $c > 0$, *è un'iperbole di centro il punto* $(0, 0)$, *vertice* $(\sqrt{-c}, 0)$ *ed asse principale* X_1, *se* $c < 0$ *ed è costituita dalle bisettrici degli assi se* $c = 0$.

Exercise 25 *Determinare il sottoinsieme* $\mathbb{D}_f$ *di* $\mathbb{R}^2$ *dove la regola*

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

definisce una funzione reale. Quindi determinare le curve di livello c *di tale funzione al variare di* $c \in \mathbb{R}$.

Exercise 26 *Determinare il sottoinsieme* $\mathbb{D}_f$ *di* $\mathbb{R}^2$ *dove la regola*

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^4 - x_2^2}$$

definisce una funzione reale. Quindi determinare le curve di livello c di tale funzione al variare di $c \in \mathbb{R}$.

1.2 Limiti

Sia $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$e sia $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0) \in \partial\mathbb{D}_f$.

Definizione 27 (Limite Finito) *Diciamo che* f *ha* limite $\ell \in \mathbb{R}$ *per*$P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{D}_f$ *che tende a* P_0 *e scriviamo*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \ell,$$

o anche

$$\lim_{(x_1,x_2) \to (x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = \ell,$$

se per ogni intorno I_ℓ *di* ℓ *in* $\mathbb{R}$ *e' possibile trovare un intorno* I_{P_0} *di* P_0 *in* $\mathbb{R}^2$ *tale che per ogni* $P \in \mathbb{D}_f \cap I_{P_0} - \{P_0\}$ *si abbia* $f(P) \in I_\ell$.

Osservazione 28 *La funzione* f *ha* limite $\ell \in \mathbb{R}$ *per*P *che tende a* P_0 *se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $r > 0$ *tale che per ogni* $P \in \mathbb{D}_f \cap \mathbb{B}(P_0; r) - \{P_0\}$ *si abbia* $|f(P) - \ell| < \varepsilon$.

Con riferimento all'Osservazione 28, è importante notare che la nozione di "tendenza" di P a P_0 viene espressa dal progressivo restringersi del raggio del disco aperto $\mathbb{B}(P_0; r)$, al restringersi dell'intervallo $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, e non dal progressivo avvicinamento del punto P a P_0 lungo una qualche traiettoria. Infatti é possibile dare esempi in cui al progressivo avvicinamento del P a P_0 lungo diverse traiettorie la funzione f tenda a limiti diversi oppure non tenda ad alcun limite.

Osservazione 29 *La funzione* f *ha* limite $\ell \in \mathbb{R}$ *per*P *che tende a* P_0 *se e solo se risulta*

$$\lim_{r \to 0} f(P) = \ell$$

essendo $r \equiv d(P, P_0) \equiv \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$.

Esempio 30 *Risulta*

$$\lim_{(x_1,x_2) \to (0,0)} \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2 + x_2^2} = 0. \tag{1.7}$$

Discussione. Osserviamo che per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ si ha chiaramente

$$0 < \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{x_1^2 + x_2^2} = x_1^2 + x_2^2. \tag{1.8}$$

Inoltre

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} x_1^2 + x_2^2 = \lim_{r\to 0} r^2 = 0. \tag{1.9}$$

Dalle (1.8) e (1.9) si ottiene immediatamente la (1.7).□

Esempio 31 *Non esiste il*

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}.$$

Discussione. Osserviamo che per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tale che $x_2 = x_1$ si ha

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{2x_1^2}{x_1^2} = 2.$$

Mentre per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tale che $x_2 = -x_1$ si ha

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{2x_1^2}{-x_1^2} = -2.$$

In conseguenza risulta

$$\lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(0,0)\\ x_2=x_1}} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(0,0)\\ x_2=-x_1}} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = -2.$$

e da ciò segue l'asserto.□

Exercise 32 *Verificare che*

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = 0.$$

Exercise 33 *Verificare che non esiste il*

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Exercise 34 *Verificare che non esiste il*

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^4 + x_2^4}.$$

Exercise 35 *Verificare che non esiste il*

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^4}.$$

Exercise 36 *Verificare che non esiste il*

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^2 + 1}{x_2 + 1}.$$

1.2.1 Funzioni continue

Sia $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$e sia $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{D}_f \cap \partial\mathbb{D}_f$.

Definizione 37 (Funzione Continua in un Punto) *Diciamo che f è continua in P_0 se risulta*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Esempio 38 *La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \not R$ definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) \overset{def}{=} \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2)\ln(x_1^2 + x_2^2) & se\ (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & se\ (x_1, x_2) \neq (0,0), \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$*.*

Esempio 39 *La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) \overset{def}{=} \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & se\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, \\ 0 & se\ (x_1, x_2) = (0,0), \end{cases}$$

non è continua in $(0,0)$*.*

Exercise 40 *La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \not R$ definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) \overset{def}{=} \begin{cases} x_1 x_2 \ln(x_1^2 + x_2^2) & se\ (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & se\ (x_1, x_2) \neq (0,0), \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$*.*

Definizione 41 (Funzione Continua nel Dominio) *Diciamo che f è continua in $\mathbb{D}_f$ se f è continua in ogni punto di $\mathbb{D}_f \cap \partial\mathbb{D}_f$.*

Da notare che ai fini della definizione di continuità di una funzione nel suo dominio, non giocano alcun ruolo gli eventuali punti isolati del dominio stesso.

1.3 Derivate Parziali

Sia $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme aperto $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$e sia $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{D}_f$.

Definizione 42 *Diciamo che f è* derivabile parzialmente *rispetto alla variabile x_1 se esiste finito il*

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0)}{\Delta x_1}.$$

In tal caso chiamiamo tale limite derivata parziale rispetto alla variabile x_1 *di* f *in* P_0 *e la denotiamo con uno dei seguenti simboli*

$$f_{x_1}(P_0), \quad f'_{x_1}(P_0), \quad \partial_{x_1} f(P_0), \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{P_0}.$$

Diciamo che f *è* derivabile parzialmente *rispetto alla variabile* x_2 *se esiste finito il*

$$\lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0)}{\Delta x_2}.$$

In tal caso chiamiamo tale limite derivata parziale rispetto alla variabile x_1 *di* f *in* P_0 *e la denotiamo con uno dei seguenti simboli*

$$f_{x_2}(x_1^0, x_2^0), \quad f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0), \quad \partial_{x_2} f(x_1^0, x_2^0), \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{(x_1^0, x_2^0)}.$$

Da notare che l'eventuale esistenza delle derivate parziali di f in P_0 non implica la continuità della f stessa in P_0.

Esempio 43 *La funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & se\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, \\ 0 & se\ (x_1, x_2) = (0,0), \end{cases}$$

ammette derivate parziali

$$f_{x_1}(0,0) = f_{x_2}(0,0) = 0.$$

Tuttavia la funzione non è continua in $(0,0)$.

1.3.1 Derivate Direzionali

Sia $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme aperto $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$e sia $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{D}_f$. Sia quindi $\hat{v} \equiv (v_1, v_2)$ un vettore unitario di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 44 *Se esiste finito il*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\hat{v}) - f(P_0)}{t},$$

allora chiamiamo tale limite derivata direzionale *secondo* $\hat{v}$ *di* f *in* P_0. *Tale derivata direzionale è solitamente indicata con una delle sequenti notazioni*

$$f_{\hat{v}}(P_0), \quad \partial_{\hat{v}} f(P_0), \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}\right)_{P_0}.$$

Osservazione 45 *Le derivate parziali di f in P_0 esistono se e solo se esistono le derivate direzionali secondo $\hat{e}_1 \equiv (1,0)$ ed $\hat{e}_2 \equiv (0,1)$. Nel qual caso risulta*

$$f_{\hat{e}_1}(P_0) = f_{x_1}(P_0), \quad e \quad f_{\hat{e}_2}(P_0) = f_{x_2}(P_0).$$

Dimostrazione. È sufficiente osservare che per definizione si ha

$$\begin{aligned} f_{\hat{e}_1}(P_0) &\equiv \lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\hat{e}_1) - f(P_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0 + t, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0)}{t} \\ &= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0)}{\Delta x_1} \equiv f_{x_1}(P_0), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_{\hat{e}_2}(P_0) &\equiv \lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\hat{e}_2) - f(P_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0 + t) - f(x_1^0, x_2^0)}{t} \\ &= \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0)}{\Delta x_2} \equiv f_{x_2}(P_0). \end{aligned}$$

□

1.3.2 Differenziabilità

Sia $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme aperto $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$e sia $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{D}_f$.

Definizione 46 (Differenziabilità) *Diciamo la funzione f è differenziabile in P_0 se esistono $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(x_1^0,x_2^0)} \frac{f(x_1,x_2) - (f(x_1^0,x_2^0) + d_1(x_1 - x_1^0) + d_2(x_2 - x_2^0))}{\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}} = 0.$$

Theorem 47 *Se f è differenziabile in P_0, allora è continua in P_0.inoltre per ogni vettore unitario $\hat{v} \equiv (v_1, v_2)$ esiste la derivata direzionale secondo $\hat{v}$ di f in P_0 e risulta*

$$f_{\hat{v}}(P_0) = v_1 d_1 + v_2 d_2.$$

In particolare esistono le derivate parziali di f in P_0 e risulta

$$f_{x_1}(x_1^0, x_2^0) = d_1 \quad ed \quad f_{x_2}(x_1^0, x_2^0) = d_2.$$

Definizione 48 (Gradiente) *Se f è differenziabile in P_0, chiamiamo il vettore*

$$(\nabla f)_{P_0} \equiv (f_{x_1}(P_0), f_{x_2}(P_0))$$

gradiente *di f in P_0.*

Definizione 49 (Piano Tangente al Grafico) *Se la funzione f è differenziabile in P_0, diciamo che il piano di equazione*

$$y = f(x_1^0, x_2^0) + f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0)$$

è tangente *al grafico di f nel punto $Q_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0))$.*

Theorem 50 *Se f ammette derivate parziali f_{x_2} ed f_{x_2} in $\mathbb{D}_f$ continue in P_0 allora f è differenziabile in P_0.*

Exercise 51 *La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to R\!\!\!/$ definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \exp(x_1 x_2)$$

è differenziabile in $(0,0)$. Determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $Q_0 \equiv (0,0,1)$.

Exercise 52 *La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to R\!\!\!/$ definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \exp(x_1^2 + x_2^2)$$

è differenziabile in $(0,0)$. Determinare l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $Q_0 \equiv (0,0,1)$.

1.3.3 Derivate Parziali Seconde

Sia $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme aperto $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$ tale che esistano le sue derivate parziali $f_{x_1} : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ ed $f_{x_2} : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$. Sia quindi $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{D}_f$.

Definizione 53 *Se f_{x_1} è derivabile parzialmente in P_0 rispetto ad x_1 [risp. ad x_2], ossia se esiste finito il limite*

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f_{x_1}(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)}{\Delta x_1}, \quad [\text{risp.} \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f_{x_1}(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) - f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)}{\Delta x_2},]$$

allora diciamo che f ammette derivata parziale seconda in P_0 rispetto ad x_1 due volte [risp. rispetto ad x_1 ed x_2] e denotiamo tale derivata limite con uno dei simboli

$$f_{x_1,x_1}(P_0), \quad f''_{x_1,x_1}(P_0) \quad \partial_{x_1,x_1} f(P_0), \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_{P_0}$$

$$[\text{risp. } f_{x_1,x_2}(P_0), \quad f''_{x_1,x_2}(P_0) \quad \partial_{x_1,x_2} f(P_0), \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_{P_0}].$$

Analogamente, se f_{x_2} è derivabile parzialmente in P_0 rispetto ad x_1 [risp. ad x_2], ossia se esiste finito il limite

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f_{x_2}(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)}{\Delta x_1}, \quad [\text{risp.} \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) - f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)}{\Delta x_2},]$$

allora diciamo che f ammette derivata parziale seconda in P_0 rispetto ad x_2 ed x_1 [risp. rispetto ad x_2 due volte] e denotiamo tale derivata con uno dei simboli

$$f_{x_2,x_1}(P_0), \quad f''_{x_2,x_1}(P_0) \quad \partial_{x_2,x_1}f(P_0), \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right)_{P_0}$$

$$\text{[}\textit{risp. } f_{x_2,x_2}(P_0), \quad f''_{x_2,x_2}(P_0) \quad \partial_{x_2,x_2}f(P_0), \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)_{P_0} \text{]}.$$

Sia $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme aperto $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$ tale che esistano le sue derivate parziali $f_{x_1} : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ ed $f_{x_2} : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ e le sue derivate parziali seconde $f_{x_1,x_2} : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ ed $f_{x_2,x_1} : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$. Sia quindi $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{D}_f$.

Theorem 54 *Se le funzioni f_{x_1,x_2} ed f_{x_2,x_1} sono continue in P_0, allora*

$$f_{x_1,x_2}(P_0) = f_{x_2,x_1}(P_0).$$

Esempio 55 *La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} & \textit{se } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, \\ 0 & \textit{se } (x_1, x_2) = (0,0), \end{cases}$$

ammette derivate parziali seconde f_{x_1,x_2} ed f_{x_2,x_1} in $(0,0)$. Tuttavia

$$f_{x_1,x_2}(0,0) \neq f_{x_2,x_1}(0,0).$$

1.4 Massimi e Minimi

Sia $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 56 *Diciamo che un punto $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0)$ è un* punto di minimo *[risp.* punto di massimo*] per la funzione f se per ogni punto $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{D}_f$ risulta*

$$f(x_1^0, x_2^0) \leq f(x_1, x_2) \qquad \text{[}\textit{risp. } f(x_1^0, x_2^0) \geq f(x_1, x_2)\text{]}.$$

Se $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0)$ è un punto di minimo [risp. punto di massimo] per f allora il valore $f(x_1^0, x_2^0)$ si chiama valore minimo *[risp.* valore massimo*] della funzione f.*

Esempio 57 *La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} x_1^2 + x_2^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

ha un punto di minimo in $P_0 \equiv (0,0)$. Di conseguenza $f(0,0) = 0$ è il suo valore minimo.

Esempio 58 *La funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *data da*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} 1 - (x_1^2 + x_2^2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

ha un punto di massimo in $P_0 \equiv (0,0)$. *Di conseguenza* $f(0,0) = 0$ *è il suo valore massimo.*

Definizione 59 *Diciamo che* $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0)$ *è un* punto di minimo locale *[risp.* punto di massimo locale*] per* f *se esiste un intorno* I_{P_0} *tale che che per ogni punto* $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{D}_f \cap I_{P_0}$ *risulta*

$$f(x_1^0, x_2^0) \leq f(x_1, x_2) \qquad [\textit{risp. } f(x_1^0, x_2^0) \geq f(x_1, x_2)].$$

Se $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0)$ *è un punto di minimo [risp. punto di massimo] locale per* f, *allora il valore* $f(x_1^0, x_2^0)$ *si chiama* valore minimo *[risp.* valore massimo*]* locale *della funzione* f.

Osservazione 60 *Il punto* $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0)$ *è un punto di minimo locale [risp. punto di massimo locale] per* f *se e solo se esiste* $r > 0$ *tale che per ogni punto* $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{D}_f \cap \mathbb{B}(P_0; r)$ *risulta*

$$f(x_1^0, x_2^0) \leq f(x_1, x_2) \qquad [\textit{risp. } f(x_1^0, x_2^0) \geq f(x_1, x_2)].$$

Chiaramente un punto di minimo o di massimo per la funzione f è un punto di minimo o di massimo locale. Il viceversa è in generale falso.

Esempio 61 *La funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *data da*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} ((x_1^2 + x_2^2)^2 - 1)^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

non amette evidentemente alcun punto di massimo in $\mathbb{R}^2$. *Tuttavia il punto* $P_0 \equiv (0,0)$ *è un punto di massimo locale, in quanto per ogni punto* $P \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{B}(P_0; \sqrt{2}/2)$ *si ha*

$$0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 1/2$$

e di conseguenza

$$-1 \leq (x_1^2 + x_2^2)^2 - 1 \leq -3/4 < 0.$$

Ma allora, passando ai quadrati, risulta

$$f(x_1, x_2) = ((x_1^2 + x_2^2)^2 - 1)^2 \leq 1 = f(0,0)$$

e ciò prova che $P_0 \equiv (0,0)$ *è un punto di massimo locale.*

1.4.1 Massimi e Minimi Liberi

Sia $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme aperto $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$. Sia inoltre $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{D}_f$ tale che la funzione f ammetta in P_0 derivate parziali $f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ e $f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$.

Definizione 62 *Diciamo che P_0 è un* punto estremale *per f se risulta*

$$f_{x_1}(x_1^0, x_2^0) = f_{x_2}(x_1^0, x_2^0) = 0.$$

Theorem 63 *Nelle ipotesi considerate, se un punto $P_0 \in \mathbb{D}$ è un punto di minimo o di massimo locale per la funzione f, allora P_0 è un punto estremale.*

Il teorema implica che una strategia per determinare i punti di minimo e di massimo per una funzione $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ definita in un sottoinsime aperto $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2$ e che ammette derivate parziali prime in $\mathbb{D}_f$ consiste nel determinare gli zeri del sistema delle derivate parziali, ossia nel ricercare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_{x_1}(x_1, x_2) = 0, \\ f_{x_2}(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni così determinate, punti estremali per la funzione f, sono i soli candidati ad essere punti di minimo o di massimo per la funzione. Tuttavia, non si dimentichi che non tutti i punti estremali sono punti di minimo o di massimo. Al proposito si consideri il seguente esempio.

Esempio 64 *La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} x_1^2 - x_2^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

ha un punto estremale in $P_0 \equiv (0, 0)$ ma lo stesso punto non è nè punto di massimo nè punto di minimo.

Discussione. Considerate le derivate parziali prime della funzione, si ha

$$\begin{cases} f_{x_1}(x_1, x_2) = 2x_1, \\ f_{x_2}(x_1, x_2) = -2x_2. \end{cases}$$

Pertanto è immediato rendersi conto che il punto P_0 è il solo punto estremale della funzione, e quindi il solo candidato ad essere un punto di minimo o di massimo. Tuttavia, si osservi che

$$f(0, 0) = 0$$

e che valutando la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sulle rette di equazione $x_1 - 2x_2 = 0$ e $x_2 + 2x_1 = 0$, entrambe passanti per il punto P_0 si ha

$$f(x_1, x_2)_{|x_1 - 2x_2 = 0} = 3x_2^2 \geq 0$$

e
$$f(x_1, x_2)_{|x_2+2x_1=0} = -3x_1^2 \leq 0.$$
Pertanto è semplice rendersi conto che non è possibile determinare alcun disco centrato in P_0 in cui la funzione soddisfi una delle condizioni
$$f(x_1, x_2) \geq f(0, 0),$$
o
$$f(x_1, x_2) \leq f(0, 0).$$
e ciò esclude che P_0 sia un punto di minimo o di massimo. □

Introducendo delle ulteriori ipotesi sulla funzione $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ è possibile provare un criterio aggiuntivo finalizzato alla determinazione di punti di minimo e di massimo. Supponiamo allora che la funzione $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ ammetta in $\mathbb{D}_f$ derivate parziali seconde $f_{x_1,x_1} : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$, $f_{x_1,x_2} : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$, $f_{x_2,x_2} : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ continue.

Theorem 65 *Nelle ipotesi considerate, introduciamo la funzione hessiana $h : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ data da*
$$h(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} f_{x_1,x_1}(x_1, x_2) f_{x_2,x_2}(x_1, x_2) - f^2_{x_1,x_2}(x_1, x_2), , \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{D}$$
e sia $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{D}_f$ un punto estremale per f. Allora, se risulta
$$h(x_1^0, x_2^0) > 0,$$
la funzione f ha un punto di minimo o di massimo in (x_1^0, x_2^0) secondoche si abbia $f_{x_1,x_1}(x_1^0, x_2^0) > 0$ o $f_{x_1,x_1}(x_1^0, x_2^0) < 0$. Se invece risulta
$$h(x_1^0, x_2^0) < 0,$$
la funzione f ha un punto di sella in (x_1^0, x_2^0) Infine se risulta
$$h(x_1^0, x_2^0) = 0$$
non si può concludere nulla sulla natura del punto (x_1^0, x_2^0).

Esempio 66 *La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da*
$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$
ha un punto di minimo in $P_0 \equiv (0, 0)$.

Discussione. Considerate le derivate parziali prime della funzione, si ha
$$\begin{cases} f_{x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2, \\ f_{x_2}(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Pertanto è semplice rendersi conto che il punto P_0 è il solo punto estremale della funzione. La funzione ammette inoltre derivate parziali seconde continue in $\mathbb{R}^2$ per le quali si ha

$$\begin{cases} f_{x_1,x_1}(x_1,x_2) = 2, \\ f_{x_2,x_2}(x_1,x_2) = 2, \\ f_{x_1,x_2}(x_1,x_2) = -1. \end{cases}$$

Risulta allora

$$h(x_1,x_2) = 3$$

e quindi applicando il criterio della funzione hessiana si deduce che P_0 è punto di minimo per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.$\square$

Esempio 67 *La funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita ponendo*

$$f(x_1,x_2) \overset{def}{=} 1 - (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2), \quad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$$

ha un punto di minimo in $P_0 \equiv (0,0)$.

Esempio 68 *La funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita ponendo*

$$f(x_1,x_2) \overset{def}{=} x_1^4 + x_2^4, \quad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$$

ha un punto di minimo in $P_0 \equiv (0,0)$ *che non è individuato dal criterio della funzione hessiana.*

Exercise 69 *Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locale e di sella per le funzioni* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1,x_2) \overset{def}{=} x_1^3 + (x_1 - x_2)^2, \quad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;$$

$$f(x_1,x_2) \overset{def}{=} x_1^4 + (x_1 - x_2)^2, \quad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;$$

$$f(x_1,x_2) \overset{def}{=} x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1, \quad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

1.4.2 Massimi e Minimi Vincolati

Sia $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme aperto $\mathbb{D}_f$ di $\mathbb{R}^2$ e sia $\mathbb{S}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ contenuto in $\mathbb{D}_f$. Supponiamo che la funzione f ammetta in $\mathbb{D}_f$ derivate parziali prime $f_{x_1} : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ ed $f_{x_2} : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ continue e che l'insieme $\mathbb{S}$ sia individuato quale luogo di zeri di una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, ossia

$$\mathbb{S} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x_1,x_2) = 0\}$$

Theorem 70 *Nelle ipotesi considerate la funzione f è continua in $\mathbb{D}_f$, in particolare in $\mathbb{S}$, e l'insieme $\mathbb{S}$ è chiuso. Pertanto se l'insieme $\mathbb{S}$ è anche limitato $\mathbb{S}$ è compatto ed f ammette in $\mathbb{S}$ punti di minimo e massimo assoluti.*

Supponiamo ulteriormente che la funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ammetta derivate parziali prime $g_{x_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g_{x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue ed introduciamo la funzione lagrangiana $F : \mathbb{D}_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$F(x_1, x_2, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2), \quad \forall (x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{D}_f \times \mathbb{R}.$$

Theorem 71 (Moltiplicatore di Lagrange) *Un punto $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{S}$ è un candidato minimo o massimo per f in $\mathbb{S}$ solo se per un opportuno $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ il punto $Q_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \lambda_0)$ è un punto estremale per F, ossia se risulta*

$$\begin{cases} F_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \lambda_0) = 0, \\ F_{x_2}(x_1^0, x_2^0, \lambda_0) = 0, \\ F_{\lambda}(x_1^0, x_2^0, \lambda_0) = 0. \end{cases}$$

Il teorema indica una strategia per determinare i punti di minimo e di massimo per una funzione $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ definita in un sottoinsime aperto $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2$ che ammette derivate parziali prime continue in $\mathbb{D}_f$, qualora tali punti di minimo e di massimo siano soggetti all'appartenere ad un insieme $\mathbb{S}$ luogo di zeri di una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che ammette derivate parziali prime. Tale strategia consiste nel determinare gli zeri del sistema delle derivate parziali dell'associata funzione lagrangiana $F : \mathbb{D}_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ossia nel ricercare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} F_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 0, \\ F_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 0, \\ F_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni così determinate del tipo $(x_1^0, x_2^0, \lambda_0)$, hanno la proprietà che i corrispondenti punti $(x_1^0, x_2^0,)$ sono i soli candidati ad essere punti di minimo o di massimo per f soggetti al vincolo di appartenenza ad $\mathbb{S}$.

Esempio 72 *Si vogliano determinare i punti di minimo e di massimo per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

soggetti al vincolo di appartenenza all'insieme

$$\mathbb{S} \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Discussione. Osserviamo dapprima che l'insieme $\mathbb{S}$, circonferenza di $\mathbb{R}^2$ di centro l'origine $O \equiv (0, 0)$ e raggio unitario, può caratterizzarsi come luogo di zeri della funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 + x_2^2 - 1, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

La funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ammette chiaramente derivate parziali prime $g_{x_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g_{x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. Pertanto $\mathbb{S}$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^2$ e poichè è evidente limitato, risulta essere un compatto. Di conseguenza possiamo affermare a priori che f ammette in $\mathbb{S}$ punti di massimo e di minimo. Per poterli individuare, costruiamo la funzione lagrangiana $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$F(x_1, x_2, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} &F_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 + 2x_2 + 2\lambda x_1 = 2((1+\lambda)x_1 + x_2), \\ &F_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + 2x_2 + 2\lambda x_2 = 2(2x_1 + (1+\lambda)x_2), \\ &F_\lambda(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Pertanto il sistema per la ricerca dei punti estremali assume la forma

$$(1+\lambda)x_1 + x_2 = 0, \tag{1.11}$$
$$2x_1 + (1+\lambda)x_2 = 0, \tag{1.12}$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0. \tag{1.13}$$

Dalla Equazione (1.11) otteniamo

$$x_2 = -(1+\lambda)x_1 \tag{1.14}$$

e sostituendo la (1.14) nell'Equazione (1.12) ricaviamo

$$2x_1 - (1+\lambda)^2 x_1 = 0.$$

Quest'ultima può essere riscritta come

$$x_1(2 - (1+\lambda)^2) = 0$$

ovvero come

$$x_1(\lambda^2 + 2\lambda - 1) = 0$$

e quindi comporta

$$x_1 = 0 \tag{1.15}$$

o

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{2}. \tag{1.16}$$

Sostituendo (1.15) nell'Equazione (1.13), abbiamo

$$x_2^2 - 1 = 0,$$

ossia

$$x_2 = \pm 1. \tag{1.17}$$

Tenuto poi conto di (1.15) e (1.17) dall'Equazione (1.12) ricaviamo

$$\lambda = -1.$$

Una prima coppia di punti estremali per il sistema (1.10) é allora

$$Q_1 \equiv (0, -1, -1) \qquad \text{e} \qquad Q_2 \equiv (0, 1, -1).$$

Sostituendo (1.16) nell'Equazione (1.14) ricaviamo inoltre

$$x_2 = \pm\sqrt{2}x_1 \tag{1.18}$$

e sostituendo quest'ultima nell'Equazione (1.13) otteniamo

$$x_1^2 + 2x_1^2 - 1 = 0,$$

da cui

$$x_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Una seconda coppia di punti estremali per il sistema (1.10) è allora

$$Q_3 \equiv (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -1 + \sqrt{2}) \qquad \text{e} \qquad Q_4 \equiv (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -1 - \sqrt{2}).$$

Si ottengono pertanto i candidati punti di minimo e di massimo soggetti all'appartenere all'insieme $\mathbb{S}$, ossia i punti

$$P_1 \equiv (0, -1), \qquad P_2 \equiv (0, 1), \qquad P_3 \equiv (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}) \qquad \text{e} \qquad P_4 \equiv (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}).$$

Osservato infine che si ha

$$f(0, -1) = f(0, -1) = 2$$

e

$$f(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}) = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}) = \frac{5 - 4\sqrt{2}}{3}$$

è immediato rendersi conto che i punti P_1 e P_2 non possono essere che punti di massimo mentre i punti P_3 e P_4 non possono che essere punti di minino per f soggetti al vincolo di appartenenza ad $\mathbb{S}$. ■

Esempio 73 *Si vogliano determinare i punti di minimo e di massimo per la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *data da*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} x_1^2 + 5x_2^2 + x_2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

soggetti al vincolo di appartenenza all'insieme

$$\mathbb{S} \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_2^2 = 1\}.$$

Discussione. Osserviamo dapprima che l'insieme $\mathbb{S}$, ellisse di $\mathbb{R}^2$ di centro l'origine $O \equiv (0,0)$ che interseca l'asse delle ascisse nei punti $P_1 \equiv (1,0)$ e $P_2 \equiv (-1,0)$ e l'asse delle ordinate in $Q_1 \equiv (0, \sqrt{2}/2)$ e $Q_2 \equiv (0, -\sqrt{2}/2)$, può caratterizzarsi come luogo di zeri della funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 + 2x_2^2 - 1, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ha derivate parziali prime $g_{x_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g_{x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. Pertanto $\mathbb{S}$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^2$ che essendo anche limitato, risulta essere un compatto. Di conseguenza f ammette in $\mathbb{S}$ punti di massimo e di minimo. Per poterli individuare, costruiamo la funzione lagrangiana $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$F(x_1, x_2, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 + 5x_2^2 + x_2 + \lambda(x_1^2 + 2x_2^2 - 1), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$

Abbiamo

$$\begin{array}{l} F_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 + 2\lambda x_1 = 2x_1(1+\lambda), \\ F_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 10x_2 + 1 + 4\lambda x_2 = 2x_2(5 + 2\lambda) + 1, \\ F_\lambda(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + 2x_2^2 - 1. \end{array} \tag{1.19}$$

Pertanto il sistema per la ricerca dei punti estremali assume la forma

$$x_1(1+\lambda) = 0, \tag{1.20}$$

$$2x_2(5 + 2\lambda) + 1 = 0, \tag{1.21}$$

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0. \tag{1.22}$$

Dalla Equazione (1.20) otteniamo

$$x_1 = 0 \qquad 0 \qquad \lambda = -1. \tag{1.23}$$

Sostituendo la prima delle (1.23) nella (1.22) otteniamo

$$2x_2^2 - 1 = 0,$$

e quindi

$$x_2 = \pm\sqrt{2}/2.$$

Pertanto i punti $Q_1 \equiv (0, \sqrt{2}/2)$ e $Q_2 \equiv (0, -\sqrt{2}/2)$ sono due candidati ad essere punti di massimo o minimo per f in $\mathbb{S}$. Sostituendo la seconda delle (1.23) nella (1.21) otteniamo

$$6x_2 + 1 = 0,$$

che comporta

$$x_2 = -1/6.$$

Quest'ultima, sostituita nella (1.22) comporta

$$x_1^2 - 17/18 = 0,$$

e quindi

$$x_1 = \pm\sqrt{17}/18.$$

Pertanto anche i punti $R_1 \equiv (\sqrt{17}/18, -1/6)$ ed $R_2 \equiv (-\sqrt{17}/18, -1/6)$ sono due candidati ad essere punti di massimo o minimo per f in $\mathbb{S}$. Ora, dal momento che risulta

$$f(0, \sqrt{2}/2) = 5/2 + \sqrt{2}/2, \quad f(0, \sqrt{2}/2) = 5/2 - \sqrt{2}/2,$$

e

$$f(\sqrt{17}/18, -1/6) = 11/12 = f(-\sqrt{17}/18, -1/6),$$

è immediato riconoscere che i punti R_1 ed R_2 sono punti di minimo ed il punto Q_1 è un punto di massimo per f in $\mathbb{S}$. Vale la pena notare che nel caso considerato si sarebbe anche potuto procedere riconducendosi ad un problema di ricerca dei massimi e minimi per una funzione di una variabile. Infatti, dall'equazione caratteristica dell'insieme $\mathbb{S}$ otteniamo

$$x_1^2 = 1 - 2x_2^2. \tag{1.24}$$

Quest'ultima comporta però una restrizione per la variabile x_2 al'interno dell'intervallo chiuso e limitato $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$, dovendo essere ambo i membri della (1.23) positivi. Ora, tenendo conto della stessa (1.23), il problema proposto si riconduce alla ricerca dei punti di massimo e di minimo per la funzione $\hat{f} : [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2] \to \mathbb{R}$ data da

$$\hat{f}(x_2) \stackrel{\text{def}}{=} 3x_2^2 + x_2 - 1, \quad \forall x_2 \in [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2].$$

Abbiamo ora

$$\hat{f}'(x_2) = 6x_2 + 1,$$

per cui

$$\hat{f}'(x_2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \geq -1/6.$$

Si deduce allora immediatamente che la $\hat{f}$ ammette un minimo nell'intervallo aperto $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ nel punto $x_2 = -1/6$, cui corrispondono i due punti di minimo R_1 ed R_2 per f in $\mathbb{S}$. ed ammette un massimo in quello tra gli estremi dell'intervallo chiuso $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ dove $\hat{f}$ assume il valore maggiore, ossia nel punto $x_2 = \sqrt{2}/2$, cui corrisponde il punto di massimo Q_1 per f in $\mathbb{S}$.

Esempio 74 *Si vogliano determinare i punti di minimo e di massimo per la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *data da*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} x_1^2 + 5x_2^2 + x_2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.25}$$

soggetti al vincolo di appartenenza all'insieme

$$\mathbb{S} \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2 + 2\}.$$

Discussione. Osserviamo dapprima che l'insieme $\mathbb{S}$, parabola di $\mathbb{R}^2$ avente per asse di simmetria l'asse delle ordinate, vertice nel punto $V \equiv (0,2)$ ed intersecante l'asse delle ascisse nei punti $P_1 \equiv (\sqrt{2},0)$ e $P_2 \equiv (-\sqrt{2},0)$, può caratterizzarsi come luogo di zeri della funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x_1,x_2) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 - x_2 + 2, \quad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ha derivate parziali prime $g_{x_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g_{x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. Pertanto $\mathbb{S}$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^2$, ma essendo $\mathbb{S}$ chiaramente non limitato, $\mathbb{S}$ non risulta essere un compatto. Di conseguenza non si può a priori concludere che f ammette in $\mathbb{S}$ punti di massimo e di minimo. Comunque la ricerca di eventuali punti di massimo e di minimo può essere sempre effettuata con l'ausilio della funzione lagrangiana $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$F(x_1,x_2,\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 + 5x_2^2 + x_2 + \lambda(x_1^2 - x_2 + 2), \quad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} &F_{x_1}(x_1,x_2,\lambda) = 2x_1 + 2\lambda x_1 = 2x_1(1+\lambda), \\ &F_{x_2}(x_1,x_2,\lambda) = 10x_2 + 1 - \lambda, \\ &F_{\lambda}(x_1,x_2,\lambda) = x_1^2 - x_2 + 2. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Pertanto il sistema per la ricerca dei punti estremali assume la forma

$$x_1(1+\lambda) = 0, \tag{1.27}$$
$$10x_2 + 1 - \lambda = 0, \tag{1.28}$$
$$x_1^2 - x_2 + 2 = 0. \tag{1.29}$$

Dalla Equazione (1.27) otteniamo

$$x_1 = 0 \qquad 0 \qquad \lambda = -1. \tag{1.30}$$

Sostituendo la prima delle (1.30) nella (1.29) otteniamo

$$x_2 = 2.$$

Pertanto il punto $Q \equiv (0,2)$ è un candidato ad essere punti di massimo o minimo per f in $\mathbb{S}$. Sostituendo la seconda delle (1.30) nella (1.28) otteniamo

$$x_2 = -1/5.$$

Quest'ultima, sostituita nella (1.29) comporta

$$x_1^2 + 11/5 = 0,$$

che non ammette soluzioni. Pertanto l'unico punto candidato è il punto $Q \equiv (0,2)$ per il quale risulta

$$f(0,2) = 22.$$

Per decidere se il punto Q sia un punto di massimo o di minimo, basta osservare che l'equazione caratteristica della parabola $\mathbb{S}$ può essere riscritta come

$$x_2 = x_1^2 + 2. \tag{1.31}$$

Ciò mostra che le ordinate dei punti della parabola tendono ad assumere valori positivi sempre più grandi al tendere dei valori delle ascisse sia verso $+\infty$ che verso $-\infty$. Ma allora l'espressione

$$x_1^2 + 5x_2^2 + x_2$$

tenderà ad assumere valori positivi sempre più grandi al tendere dei valori delle ascisse sia verso $+\infty$ che verso $-\infty$. In altri termini

$$\lim_{\substack{(x_1,x_2)\in\mathbb{S} \\ x_1\to+\infty}} f(x_1,x_2) = \lim_{\substack{(x_1,x_2)\in\mathbb{S} \\ x_1\to-\infty}} f(x_1,x_2) = +\infty.$$

Ciò consente di affermare che il punto Q non può che essere un punto di minimo per per f in $\mathbb{S}$. Anche in questo caso ci si sarebbe potuti ricondurre ad un problema di ricerca dei massimi e minimi per una funzione di una variabile. Infatti, dall'equazione caratteristica dell'insieme $\mathbb{S}$ scritta nella forma (1.31), che non comporta alcuna restrizione per la variabile x_2, sostituendo nella (1.25), il problema proposto si riconduce alla ricerca dei punti di massimo e di minimo per la funzione $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$\hat{f}(x_1) \overset{\text{def}}{=} 5x_1^4 + 22x_1^2 + 22, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo ora

$$\hat{f}'(x_1) = 20x_1^3 + 44x_1 = 4x_1(5x_1^2 + 11),$$

da cui, essendo $5x_1^2 + 11 \geq 0$ per ogni $x_1 \in \mathbb{R}$, otteniamo

$$\hat{f}'(x_1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \geq 0.$$

Si deduce allora immediatamente che la $\hat{f}$ ammette un solo punto di minimo nel punto $x_1 = 0$, cui corrisponde il punto di minimo Q per f in $\mathbb{S}$. Similarmente, se si fosse riscritta l'equazione caratteristica della parabola $\mathbb{S}$ nella forma

$$x_2 - 2 = x_1^2, \tag{1.32}$$

si sarebbe potuto sostituire la (1.31) nella (1.25). Tenuto allora conto che ciò avrebbe comportato una restrizione della variabile x_2 all'interno della semiretta sinistra chiusa $[2, +\infty)$, dovendo essere ambo i membri della (1.31) positivi, ci si sarebbe ricondotti alla ricerca dei punti di massimo e di minimo per la funzione $\hat{f} : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da

$$\hat{f}(x_2) \overset{\text{def}}{=} 5x_2^2 + 2x_2 - 2, \quad \forall x_2 \in [2, +\infty).$$

D'altra parte

$$\hat{f}'(x_2) = 2(5x_2 + 1),$$

per cui

$$\hat{f}'(x_2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \geq -1/5.$$

Quindi la $\hat{f}$ è sempre crescente in $[2, +\infty)$ e pertanto ammette un solo punto di minimo per $x_2 = 2$, cui corrisponde sempre il punto di minimo Q per f in $\mathbb{S}$.

Esempio 75 *Consideriamo la funzione di produzione di un bene da parte di una azienda che assumiamo dipendente da due variabili, $x_1 \geq 0$ che esprime la quantità di lavoro impegato nel processo produttivo, rispetto ad una unità di misura fissata, ed $x_2 \geq 0$ che esprime la quantità di materia prima impiegata. Assumiamo che una tale funzione sia del tipo Cobb-Douglas e più precisamente che si abbia*

$$g(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{1/2}.$$

Sia il lavoro che la materia prima impiegata nella produzione hanno un costo. Denotiamo rispettivamente con $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$ il costo unitario del lavoro e della materia prima. La funzione di costo della produzione è quindi data da

$$f(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

Il problema dell'azienda è allora di minimizzare il costo necessario per produrre q unità del bene in questione. In termini matematici ciò significa minimizzare la funzione f soggetta al vincolo $g(x_1, x_2) = q$.

Discussione. Per maggiore semplicità consideriamo il problema di minimizzare il costo per unità di prodotto, ossia ricerchiamo il

$$\min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{S}} \{f(x_1, x_2)\}$$

essendo

$$\mathbb{S} \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid g(x_1, x_2) = 1\}$$

Notiamo che tale minimo non può certamente aversi per $x_1 = 0$ né tantomeno per $x_2 = 0$ quantità queste che comportano una produzione nulla. Costruiamo quindi la lagrangiana $F : \mathbb{R}^2_{++} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$F(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda(x_1^{1/4} x_2^{1/2} - 1), \quad \forall (x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{R}^2_{++} \times \mathbb{R}..$$

Tale funzione ha derivate prime continue in $\mathbb{R}^2_{++} \times \mathbb{R}$, pertanto possiamo applicare il risultato del Teorema 71 e cercare il minimo di f soggetta al vincolo $\mathbb{S}$ tra i punti estemali di F. A tale scopo determiniamo

$$\begin{aligned}
&F_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = p_1 + \tfrac{1}{4}\lambda x_1^{-3/4} x_2^{1/2}, \\
&F_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = p_2 + 2\lambda x_1^{1/4} x_2^{-1/2}, \\
&F_\lambda(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{1/4} x_2^{1/2} - 1,
\end{aligned}$$

e consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{4}\lambda x_1^{-3/4} x_2^{1/2} &= 0, && (1.33)\\ p_2 + \frac{1}{2}\lambda x_1^{1/4} x_2^{-1/2} &= 0, && (1.34)\\ x_1^{1/4} x_2^{1/2} - 1 &= 0. && (1.35) \end{aligned}$$

La (1.33) e la (1.34) possono essere equivalentemente riscritte nella forma

$$p_1 x_1^{3/4} + \frac{1}{4}\lambda x_2^{1/2} = 0, \tag{1.36}$$

e

$$p_2 x_2^{1/2} + \frac{1}{2}\lambda x_1^{1/4} = 0. \tag{1.37}$$

Dalla (1.37) otteniamo

$$x_2^{1/2} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda}{p_2} x_1^{1/4}. \tag{1.38}$$

Ciò comporta che dovrà necessariamente aversi

$$\lambda < 0 \tag{1.39}$$

e sostituendo nella (1.36)

$$x_1^{1/4}\left(p_1 x_1^{1/2} - \frac{1}{8}\frac{\lambda^2}{p_2}\right) = 0. \tag{1.40}$$

Avendo osservato che necessariamente $x_1 > 0$, otteniamo allora

$$x_1^{1/2} = \frac{\lambda^2}{2^3 p_1 p_2} \tag{1.41}$$

e, tenendo presente la (1.39) dalla (1.41) segue

$$x_1^{1/4} = -\frac{\lambda}{2^{3/2} p_1^{1/2} p_2^{1/2}}. \tag{1.42}$$

Sostituendo quindi la (1.42) nella (1.38) risulta

$$x_2^{1/2} = \frac{\lambda^2}{2^{5/2} p_1^{1/2} p_2^{3/2}}. \tag{1.43}$$

La (1.42) e la (1.43) sostituite nella (1.35) comportano

$$\frac{\lambda^3}{2^4 p_1 p_2^2} + 1 = 0. \tag{1.44}$$

Da cui

$$\lambda = -2^{4/3} p_1^{1/3} p_2^{2/3}. \tag{1.45}$$

Infine, sostituendo la (1.45) nella (1.42) e nella (1.43), otteniamo

$$x_1^{1/4} = \frac{p_2^{1/6}}{2^{1/6} p_1^{1/6}}, \tag{1.46}$$

e

$$x_2^{1/2} = \frac{2^{1/6} p_1^{1/6}}{p_2^{1/6}}. \tag{1.47}$$

Ossia

$$x_1 = 2^{-2/3} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/3}, \qquad x_2 = 2^{1/3} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/3}.$$

Tale punto $P \equiv (x_1, x_2)$ è allora l'unico candidato ad essere un punto di massimo o di minimo per la funzione f soggetta al vincolo $\mathbb{S}$. D'altra parte non è difficile rendersi conto che la stessa f è positivamente illimitata su $\mathbb{S}$ quando $x_1 \to +\infty$ o anche quando $x_2 \to +\infty$. Pertanto il punto P in questione è necessariamente un punto di minimo per f in $\mathbb{S}$. ■

Esempio 76 *Consideriamo la funzione d'utilità di un consumatore rispetto all'acquisizione di un paniere di due beni di consumo* $x \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$, *rappresentando* x_k *la quantità del* k*-esimo bene contenuta nel paniere,* $k = 1, 2$*, rispetto ad una unità di misura stabilita. Assumiamo che tale funzione d'utilità* $u : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ *ammetta derivate parziali continue* $u_{x_1} : \mathbb{R}_{++}^2 \to \mathbb{R}$ *ed* $u_{x_2} : \mathbb{R}_{++}^2 \to \mathbb{R}$ *e supponiamo inoltre che i due beni abbiano rispettivamente prezzi unitari* $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{++}$ *e che il consumatore possa investire solo una quota fissa* r *del suo reddito nell'acquisto di un tale paniere di beni. Il vincolo di bilancio del consumatore è quindi dato da*

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = r$$

Il problema del consumatore è allora di determinare tra tutti i panieri di beni acquisibili stante il suo vincolo di bilancio quello da cui trarre il maggiore godimento. In termini matematici ciò significa massimizzare la funzione u *soggetta al vincolo di bilancio.*

Discussione. Ricerchiamo quindi il

$$\max_{(x_1,x_2) \in \mathbb{S}} \{ f(x_1, x_2) \}$$

essendo

$$\mathbb{S} \equiv \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid p_1 x_1 + p_2 x_2 = r \}$$

Assumendo che il massimo dell'utilità non si realizzi nel possesso di uno dei due panieri di beni $(r/p_1, 0)$ e $(0, r/p_2)$, costruiamo la lagrangiana $F : \mathbb{R}^2_{++} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$F(x_1, x_2, \lambda) \overset{\text{def}}{=} u(x_1, x_2) + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - r), \quad \forall (x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{R}^2_{++} \times \mathbb{R}..$$

Tale funzione ha derivate prime continue in $\mathbb{R}^2_{++} \times \mathbb{R}$, pertanto possiamo applicare il risultato del Teorema 71 e cercare il massimo di u soggetta al vincolo $\mathbb{S}$ tra i punti estemali di F. A tale scopo determinamo

$$\begin{aligned}
F_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) &= u_{x_1}(x_1, x_2) + \lambda p_1, \\
F_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) &= u_{x_2}(x_1, x_2) + \lambda p_2, \\
F_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) &= p_1 x_1 + p_2 x_2 - r,
\end{aligned}$$

e consideriamo il sistema

$$u_{x_1}(x_1, x_2) + \lambda p_1 = 0 \tag{1.48}$$

$$u_{x_2}(x_1, x_2) + \lambda p_2 = 0 \tag{1.49}$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 - r = 0 \tag{1.50}$$

Dalle (1.48) e (1.48) otteniamo

$$\frac{u_{x_1}(x_1, x_2)}{u_{x_2}(x_1, x_2)} = \frac{p_1}{p_2} \tag{1.51}$$

che esprime in formula una ben nota legge economica che asserisce che, indipendentemente dalla funzione di utilità di un consumatore, il rapporto tra le sue utilità marginali derivanti dal possesso di due beni di consumo è pari al rapporto dei prezzi dei beni stessi. Inoltre combinando la (1.51) con la (1.50) e risolvendo per x_1 ed x_2 si ottengono le funzioni

$$x_1(r, p_1, p_2) \quad \text{e} \quad x_2(r, p_1, p_2)$$

che esprimono la domanda ottimale del consumatore per i due beni, dati i loro prezzi ed il suo vincolo di bilancio. Una funzione d'utilità spesso usata nella teoria economica ha la forma

$$u(x_1, x_2) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{2} a_k \log(x_k - b_k)$$

sotto le condizioni

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = 1 \tag{1.52}$$

e

$$b_k > 0, \quad k = 1, 2, \quad \sum_{k=1}^{2} b_k p_k < r. \tag{1.53}$$

La seconda di queste condizioni esprime la circostanza che il consumatore non possa rinunciare ad una quantità minima b_k del k-esimo bene e che il suo vincolo di bilancio sia sufficentemente elevato per potersi assicurare tale quantità minima al prezzo di mercato del bene stesso. La funzione d'utilità considerata ha per dominio l'insieme

$$\mathbb{D}_u \equiv \{(x_1, x_2) \in\}\mathbb{R}^2_+ \mid x_k > b_k, \quad k = 1, 2\} \subset \mathbb{R}^2_{++}.$$

Comunque ha in $\mathbb{D}_u$ derivate parziali continue $u_{x_1} : \mathbb{D}_u \to \mathbb{R}$ ed $u_{x_2} : \mathbb{D}_u \to \mathbb{R}$ date da

$$u_{x_k}(x_1, x_2) = \frac{a_k}{x_k - b_k}, \quad k = 1, 2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{D}_u.$$

Applicando la (1.51) possiamo allora scrivere

$$\frac{\frac{a_1}{x_1 - b_1}}{\frac{a_2}{x_2 - b_2}} = \frac{p_1}{p_2},$$

ossia

$$\frac{a_1 p_2}{x_1 - b_1} = \frac{a_2 p_1}{x_2 - b_2},$$

o ancora

$$\frac{x_1 - b_1}{a_1 p_2} = \frac{x_2 - b_2}{a_2 p_1}.$$

Da questa, tenuto conto del vincolo di bilancio, otteniamo

$$\frac{x_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} = \frac{r}{a_2 p_1} - \frac{x_1}{a_2} - \frac{b_2 p_2}{a_2 p_1}$$

ovvero

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) x_1 = \frac{a_1 r + a_2 b_1 p_1 - a_1 b_2 p_2}{a_1 a_2 p_1}$$

o ancora, tenuto conto della (1.52),

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1 r + a_2 b_1 p_1 - a_1 b_2 p_2}{p_1} \\ &= \frac{a_1 r + a_2 b_1 p_1 + a_1 b_1 p_1 - a_1 b_1 p_1 - a_1 b_2 p_2}{p_1} \\ &= b_1 + \frac{a_1}{p_1}(r - (b_1 p_1 + b_2 p_2)). \end{aligned}$$

Allo stesso modo otteniamo

$$x_2 = b_2 + \frac{a_2}{p_2}(r - (b_1 p_1 + b_2 p_2)).$$

Le funzioni di domanda ottima

$$x_k^* = b_k + \frac{a_k}{p_k}(r - (b_1 p_1 + b_2 p_2)), \quad k = 1, 2$$

sono note come *sistema di domanda lineare*. Ad esse corrisponde l'utilità massima data da

$$u(x_1^*, x_2^*) = \sum_{k=1}^{2} a_k \log(\frac{a_k}{p_k}(r - (b_1 p_1 + b_2 p_2))).$$

■

Supponiamo adesso che la funzione $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ ammetta in $\mathbb{D}_f$ derivate parziali seconde $f_{x_1,x_1} : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$, $f_{x_1,x_2} : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ ed $f_{x_2,x_2} : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ continue e che anche la funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ammetta derivate parziali seconde $g_{x_1,x_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_{x_1,x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g_{x_2,x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. In questo caso anche la funzione lagrangiana $F : \mathbb{D}_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$F(x_1, x_2, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2), \quad \forall (x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{D}_f \times \mathbb{R}.$$

ammette derivate parziali seconde $F_{x_1,x_1} : \mathbb{D}_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_{x_1,x_2} : \mathbb{D}_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_{x_1,\lambda} : \mathbb{D}_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_{x_2,x_2} : \mathbb{D}_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_{x_2,\lambda} : \mathbb{D}_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_{\lambda,\lambda} : \mathbb{D}_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Pertanto è possibile definire la funzione hessiana della funzione lagrangiana $H : \mathbb{D}_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$H(x_1, x_2, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} F_{x_1,x_1}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_1,x_2}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_1,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) \\ F_{x_1,x_2}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_2,x_2}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_2,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) \\ F_{x_1,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_2,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) & F_{\lambda,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) \end{vmatrix}, \quad \forall (x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{D}_f \times \mathbb{R} \tag{1.54}$$

(cfr.[1]).

[1] La scrittura (1.54) sintetizza la seguente espressione

$$\begin{array}{l} F_{x_1,x_1}(x_1, x_2, \lambda) F_{x_2,x_2}(x_1, x_2, \lambda) F_{\lambda,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) \\ +F_{x_1,x_2}(x_1, x_2, \lambda) F_{x_2,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) F_{x_1,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) \\ +F_{x_1,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) F_{x_1,x_2}(x_1, x_2, \lambda) F_{x_2,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) \\ -F_{x_1,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) F_{x_2,x_2}(x_1, x_2, \lambda) F_{x_1,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) \\ -F_{x_2,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) F_{x_2,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) F_{x_1,x_1}(x_1, x_2, \lambda) \\ -F_{\lambda,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) F_{x_1,x_2}(x_1, x_2, \lambda) F_{x_1,x_2}(x_1, x_2, \lambda) \end{array} \tag{1.55}$$

Quest'ultima può essere più semplicemente ricordata mediante l'ausilio della cosiddetta "Formula di Sarrus": si scriva la seguente tabella

$$\begin{array}{ccccc} F_{x_1,x_1}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_1,x_2}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_1,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_1,x_1}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_1,x_2}(x_1, x_2, \lambda) \\ F_{x_1,x_2}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_2,x_2}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_2,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_1,x_2}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_2,x_2}(x_1, x_2, \lambda) \\ F_{x_1,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_2,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) & F_{\lambda,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_1,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_2,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) \end{array}$$

ottenuta dalla (1.54) giustapponendo come quarta e quinta colonna la prima e la seconda rispettivamente. Quindi si sommino i prodotti dei termini che figurano sulle diagonali della suddetta tabella contenenti esattamente tre termini che vanno da sinista verso destra (diagonali principali) e si sottraggano i prodotti dei termini che figurano sulle diagonali contenenti esattamente tre termini che vanno da destra verso sinistra. Il risultato sarà appunto la Formula (1.55).

Theorem 77 *Se* $Q_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \lambda_0)$ *è un punto estremale per la funzione* F *per il quale risulta*

$$H(x_1^0, x_2^0, \lambda_0) > 0 \qquad \text{[resp. } H(x_1^0, x_2^0, \lambda_0) < 0\text{]},$$

allora $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0)$ *è un punto di massimo [resp. un punto di minimo] per* f *soggetto al vincolo di appartenenza ad* $\mathbb{S}$. *Se invece risulta*

$$H(x_1^0, x_2^0, \lambda_0) = 0,$$

non si può concludere nulla sulla natura del punto (x_1^0, x_2^0).

Esempio 78 *Si vogliono determinare i punti di minimo e di massimo per la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *data da*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} x_1^2 + x_2^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

soggetti al vincolo di appartenenza all'insieme

$$\mathbb{S} \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1^2 + 9x_2^2 = 1\}.$$

Discussione. Osserviamo dapprima che l'insieme $\mathbb{S}$, ellisse di centro l'origine $O \equiv (0,0)$ e semiassi $1/2$ ed $1/3$ rispettivamente, può caratterizzarsi come luogo di zeri della funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} 4x_1^2 + 9x_2^2 - 1, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ammette chiaramente derivate parziali seconde $g_{x_1,x_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_{x_1,x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g_{x_2,x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. Pertanto $\mathbb{S}$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^2$ e poichè è evidente limitato, risulta essere un compatto. Di conseguenza la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ammette in $\mathbb{S}$ punti di massimo e di minimo. Per poterli individuare, costruiamo la funzione lagrangiana $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$F(x_1, x_2, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 + x_2^2 + \lambda(4x_1^2 + 9x_2^2 - 1), \quad \forall (x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}..$$

Abbiamo

$$\begin{cases} F_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 + 8\lambda x_1 = 2(1 + 4\lambda)x_1, \\ F_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_2 + 18\lambda x_2 = 2(1 + 9\lambda)x_2, \\ F_\lambda(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1^2 + 9x_2^2 - 1. \end{cases} \tag{1.56}$$

Pertanto il sistema per la ricerca dei punti estremali assume la forma

$$(1 + 4\lambda)x_1 = 0 \tag{1.57}$$
$$(1 + 9\lambda)x_2 = 0 \tag{1.58}$$
$$4x_1^2 + 9x_2^2 - 1 = 0 \tag{1.59}$$

Dalla Equazione (1.57) otteniamo

$$x_1 = 0 \tag{1.60}$$

o

$$\lambda = -\frac{1}{4}. \tag{1.61}$$

Sostituendo la (1.60) nell'Equazione (1.59) ricaviamo

$$9x_2^2 = 1.$$

che comporta

$$x_2 = \pm\frac{1}{3}. \tag{1.62}$$

e conseguentemente, per l'Equazione (1.58),

$$\lambda = -\frac{1}{9}. \tag{1.63}$$

Sostituendo invece (1.61) nell'Equazione (1.58), otteniamo

$$x_2 = 0, \tag{1.64}$$

e conseguentemente, per l'Equazione (1.59),

$$4x_1^2 = 1,$$

ossia

$$x_2 = \pm\frac{1}{2}.$$

Pertanto, i punti estremali per il sistema (1.56) risultano essere

$$Q_1 \equiv (0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}), \quad Q_2 \equiv (0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}), \quad Q_3 \equiv (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}), \quad Q_4 \equiv (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}),$$

ed i corrispondenti candidati quali punti di minimo e di massimo per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soggetti al vincolo di appartenenza all'insieme $\mathbb{S}$ sono

$$P_1 \equiv (0, -\frac{1}{3}), \quad P_2 \equiv (0, \frac{1}{3}), \quad P_3 \equiv (-\frac{1}{2}, 0), \quad P_4 \equiv (\frac{1}{2}, 0).$$

Consideriamo adesso la funzione hessiana della funzione lagrangiana $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$H(x_1, x_2, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} F_{x_1,x_1}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_1,x_2}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_1,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) \\ F_{x_1,x_2}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_2,x_2}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_2,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) \\ F_{x_1,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) & F_{x_2,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) & F_{\lambda,\lambda}(x_1, x_2, \lambda) \end{vmatrix}, \quad \forall (x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R},$$

dove

$$\begin{aligned}
F_{x_1,x_1}(x_1,x_2,\lambda) &= 2(1+4\lambda),\\
F_{x_1,x_2}(x_1,x_2,\lambda) &= 0,\\
F_{x_1,\lambda}(x_1,x_2,\lambda) &= 8x_1,\\
F_{x_2,x_2}(x_1,x_2,\lambda) &= 2(1+9\lambda),\\
F_{x_2,\lambda}(x_1,x_2,\lambda) &= 18x_2,\\
F_{\lambda,\lambda}(x_1,x_2,\lambda) &= 0.
\end{aligned}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
H(x_1,x_2,\lambda) &= \begin{vmatrix} 2(1+4\lambda) & 0 & 8x_1 \\ 0 & 2(1+9\lambda) & 18x_2 \\ 8x_1 & 18x_2 & 0 \end{vmatrix}\\
&= -(2\cdot 8^2 x_1^2(1+9\lambda) + 2\cdot 18^2 x_2^2(1+4\lambda))\\
&= -2^3(2^4 x_1^2(1+9\lambda) + 3^4 x_2^2(1+4\lambda))
\end{aligned}$$

e pertanto

$$H(0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{9}) = H(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{9}) = -2^3\cdot 3^2(1-\frac{4}{9}) < 0$$

e

$$H(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4}) = H(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4}) = -2^5(1-\frac{9}{4}) > 0.$$

Possiamo allora concludere che i punti

$$P_1 \equiv (0,-\frac{1}{3}) \quad \text{e} \quad P_2 \equiv (0,\frac{1}{3})$$

sono punti di minimo per la funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soggetti al vincolo di appartenenza all'insieme $\mathbb{S}$ ed i punti

$$P_3 \equiv (-\frac{1}{2},0) \quad \text{e} \quad P_4 \equiv (\frac{1}{2},0)$$

sono punti di massimo per la funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soggetti al vincolo di appartenenza all'insieme $\mathbb{S}$.

Da notare che, data la compattezza dell'insieme $\mathbb{S}$, analogamente al caso precedentemente considerato, la semplice osservazione che

$$f(0,-\frac{1}{3}) = f(0,\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$$

ed

$$f(0,-\frac{1}{2}) = f(0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

sarebbe stata sufficiente per concludere circa la natura dei punti P_1, P_2, P_3 e P_4. ■

Esempio 79 *Si vogliono determinare i punti di minimo e di massimo per la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *data da*

$$f(x_1, x_2) \overset{def}{=} x_1^4 + 4x_1^2 x_2^2 + 2x_2^4, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

soggetti al vincolo di appartenenza all'insieme

$$\mathbb{S} \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Discussione. Abbiamo precedentemente osservato che l'insieme $\mathbb{S}$, circonferenza di centro l'origine $O \equiv (0,0)$ e raggio 1, può caratterizzarsi come luogo di zeri della funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x_1, x_2) \overset{\text{def}}{=} x_1^2 + x_2^2 - 1, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Abbiamo inoltre osservato che $\mathbb{S}$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$ e che di conseguenza la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ammette in $\mathbb{S}$ punti di massimo e di minimo. E' ora interessante rilevare che, avendosi

$$x_1^4 + 4x_1^2 x_2^2 + 2x_2^4 = (x_1^2 + 2x_2^2)^2 - 2x_2^2,$$

allo scopo di semplificare i calcoli, possiamo incorporare il vincolo nella funzione sin dai passi iniziali della procedura per la ricerca dei punti di minimo e di massimo. Ossia possiamo considerare il problema equivalente di determinare i punti di minimo e di massimo per la funzione $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che, per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, è data da

$$\hat{f}(x_1, x_2) \overset{\text{def}}{=} f(x_1, x_2)_{|g(x_1, x_2)=0} = 1 - 2x_2^2,$$

sempre soggetti al vincolo di appartenenza all'insieme

$$\mathbb{S} \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Infatti è del tutto immediato rendersi conto che le funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ed $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ coincidono sui punti dell'insieme $\mathbb{S}$. Costruiamo allora la funzione lagrangiana $\hat{F} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$\hat{F}(x_1, x_2, \lambda) \overset{\text{def}}{=} 1 - 2x_2^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1), \quad \forall (x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}.$$

Abbiamo

$$\begin{cases} \hat{F}_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 2\lambda x_1, \\ \hat{F}_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = -4x_2 + 2\lambda x_2, \\ \hat{F}_\lambda(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 1. \end{cases} \tag{1.65}$$

Pertanto il sistema per la ricerca dei punti estremali assume la forma

$$2\lambda x_1 = 0, \tag{1.66}$$
$$2x_2(\lambda - 2) = 0, \tag{1.67}$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0. \tag{1.68}$$

Dall'Equazione (1.66) otteniamo

$$x_1 = 0 \qquad \text{o} \qquad \lambda = 0 \tag{1.69}$$

e sostituendo la prima delle (1.69) nella (1.68) risulta

$$x_2 = \pm 1$$

e per quest'ultima, dalla (1.67) si ha

$$\lambda = 2.$$

Analogamente, sostituendo la seconda delle (1.69) nella (1.67) si ha

$$x_2 = 0$$

e combinando quest'ultima con la (1.68) segue

$$x_1 = \pm 1.$$

Ricaviamo allora che i punti estremali della funzione lagrangiana sono

$$Q_1 \equiv (0,1,2), \qquad Q_2 \equiv (0,-1,2), \qquad Q_3 \equiv (1,0,0) \qquad Q_4 \equiv (-1,0,0).$$

Pertanto i punti estremali della funzione $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, e quindi dellla funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stessa, sotto il vincolo di appartenenza all'insieme $\mathbb{S}$ risultano essere

$$P_1 \equiv (0,1), \qquad P_2 \equiv (0,-1), \qquad P_3 \equiv (1,0) \qquad P_4 \equiv (-1,0).$$

Tenuto allora conto che abbiamo

$$\hat{f}(0,1) = \hat{f}(0,-1) = f(0,1) = f(0,-1) = -1$$

e

$$\hat{f}(1,0) = \hat{f}(1,0) = f(-1,0) = f(-1,0) = 1$$

possiamo concludere che P_1 e P_2 sono punti di minimo e P_3 e P_4 sono punti di massimo per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sotto il vincolo di appartenenza all'insieme $\mathbb{S}$. Se si fosse operato con l'usuale procedura, si sarebbe dovuta costruire la funzione lagrangiana $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$F(x_1,x_2,\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^4 + 4x_1^2x_2^2 + 2x_2^4 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1), \quad \forall (x_1,x_2,\lambda) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}.$$

Da cui

$$\begin{cases} F_{x_1}(x_1,x_2,\lambda) = 4x_1^3 + 8x_1x_2^2 + 2\lambda x_1, \\ F_{x_2}(x_1,x_2,\lambda) = 8x_1^2x_2 + 8x_2^3 + 2\lambda x_2, \\ F_\lambda(x_1,x_2,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 1. \end{cases} \tag{1.70}$$

Il corrispondente sistema per la ricerca dei punti estremali sarebbe allora stato

$$\begin{aligned} x_1(2x_1^2+4x_2^2+\lambda) &= 0, & (1.71)\\ x_2(4x_1^2+4x_2^2+\lambda) &= 0, & (1.72)\\ x_1^2+x_2^2-1 &= 0. & (1.73) \end{aligned}$$

e la ricerca delle sue soluzioni avrebbe comportato una procedura di maggiore complessità. ■

1.5 Esercizi

Exercise 80 *Determinare il dominio ed il segno delle funzioni:*

$$f(x_1,x_2) \overset{def}{=} \log\left(\frac{x_1^2+x_2^2-1}{x_1^2-x_2^2}\right), \qquad f(x_1,x_2) \overset{def}{=} \log\left(\frac{x_1^2-4x_2^2-1}{x_1^2+x_2^2-1}\right),$$

$$f(x_1,x_2) \overset{def}{=} \log\left(\frac{x_1^2-x_2^2+1}{4x_1^2+9x_2^2-1}\right), \qquad f(x_1,x_2) \overset{def}{=} \log\left(\frac{9x_1^2-x_2}{4x_1^2-x_2^2}\right),$$

$$f(x_1,x_2) \overset{def}{=} \log\left(\frac{2x_1^2-3x_2^2+1}{x_1+9x_2^2}\right), \qquad f(x_1,x_2) \overset{def}{=} \log\left(\frac{5x_2^2-x_1}{4x_1^2-x_2^2}\right),$$

$$f(x_1,x_2) \overset{def}{=} \log\left(\frac{3x_1^2-2x_2^2}{3x_2^2-2x_1^2}\right), \qquad f(x_1,x_2) \overset{def}{=} \log\left(\frac{3x_1^2-2x_2^2-1}{2x_1^2+3x_2^2-1}\right).$$

Exercise 81 *Determinare i punti di massimo e di minimo liberi per la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ data da*

$$f(x_1,x_2) \overset{def}{=} 3x_1^2+x_2+2x_2^2, \quad \forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

e quelli soggetti al vincolo

$$x_1^2-x_2=0.$$

Exercise 82 *Determinare i punti di massimo e di minimo liberi per la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ data da*

$$f(x_1,x_2) \overset{def}{=} 3x_1^2+x_1x_2+x_1+6x_2^2, \quad \forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

e quelli soggetti al vincolo

$$x_1^2+2x_2^2=1.$$

Exercise 83 *Determinare i punti di massimo e di minimo liberi per la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ data da*

$$f(x_1,x_2) \overset{def}{=} \exp\left(x_1^2+3x_2^2+1\right), \quad \forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

e quelli soggetti al vincolo

$$x_1^2+x_2^2=1.$$

Exercise 84 *Determinare i punti di massimo e di minimo liberi per la funzione*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \sqrt{4x_1^2 + 20x_2^2 + 1}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

e quelli soggetti al vincolo

$$x_1^2 + x_2^2 = 2.$$

Exercise 85 *Determinare i punti di massimo e di minimo liberi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} 2x_1^4 + 4x_1^2 x_2^2 + 2x_2^4, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

e quelli soggetti al vincolo

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

Exercise 86 *Determinare i punti di massimo e di minimo liberi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

e quelli soggetti al vincolo

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 4.$$

Exercise 87 *Determinare i punti di massimo e di minimo liberi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \ln\left(\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}\right), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

e quelli soggetti al vincolo

$$2x_1^2 + 3x_2^2 \leq 1.$$

Exercise 88 *Determinare i punti di massimo e di minimo liberi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\exp\left(x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2\right)}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

e quelli soggetti al vincolo

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 4.$$

Exercise 89 *Determinare i punti di massimo e di minimo liberi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da*

$$f(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \ln(1 + x_1^2 + x_2^2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

e quelli soggetti al vincolo

$$4x_1^2 + 9x_2^2 \leq 36.$$

Exercise 90 *Determinare i punti di massimo e di minimo liberi della funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *data da*

$$f(x_1, x_2) \overset{def}{=} \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

e quelli soggetti al vincolo

$$x_2^2 - x_1 - 1 \geq 0.$$