Corso di Matematica Generale
Esercitazione 8
Vettori linearmente (in)dipendenti, basi di spazi vettoriali
Matrici: determinante, rango, inversa

Dr. Stefano Guarino
guarino@mat.uniroma3.it

27 Novembre, 2014

1. Per ognuno dei seguenti insiemi di vettori $v_1, \ldots, v_n$, stabilire se essi siano linearmente indipendenti, e in caso contrario individuare una relazione di dipendenza lineare tra di essi. Detto $V =< v_1, \ldots, v_n >$ lo spazio vettoriale da essi generato, stabilire la dimensione di V, e determinare una base B di V contenuta in $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Infine, per il vettore w indicato, se $w \in V$ trovare le coordinate di w rispetto a B, altrimenti estendere la base B per ottenere una base B' tale che $w \in< B' >$ e determinare le coordinate di w rispetto a B'.

   (a) $v_1 = (1, 1, 4), v_2 = (0, 3, 1), v_3 = (1, 0, 1)$
   $w = (4, 5, 1)$

   (b) $v_1 = (1, 1, 1, 0), v_2 = (1, 2, 0, -1), v_3 = (0, -1, 1, 1), v_4 = (1, 0, -1, 3), v_5 = (3, 3, 0, 2)$
   $w = (2, 2, -1, 2)$

   (c) $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (2, 1, 2)$
   $w = (2, 3, -1)$

   (d) $v_1 = (1, 0, -1, 2), v_2 = (2, 3, 1, -1), v_3 = (1, 5, 5, -6), v_4 = (1, 2, 2, -1)$
   $w = (2, -1, 3, 3)$

2. Per ognuno dei seguenti insiemi di vettori in $\mathbb{R}^n$, determinare la dimensione del sottospazio S da essi generato e una base di S, al variare di h. Scelto un valore di h per cui la dimensione di S sia $n - 1$, e detta B una base di S, determinare un ulteriore vettore $t \in \mathbb{R}^n$ tale che $t \cup B$ sia una base per $\mathbb{R}^n$.

   (a) $u = (1, 0, 1, 0), v = (2, h, 2, h), w = (1, 1 + h, 1, 2h) \in \mathbb{R}^4$

   (b) $u = (3, 1, h), v = (-h, 1, 0), w = (2h, -2, h) \in \mathbb{R}^3$

   (c) $u = (1, -2, h, 1), v = (h, 0, 1, h), w = (2h + 1, -2, h + 2, 2h + 1), x = (1, h - 1, 0, 3) \in \mathbb{R}^4$

   (d) $u = (h, 1, -1), v = (h + 1, -h, 1), w = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$

3. Trovare il rango delle seguenti matrici:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$

4. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5. Determinare i valori di t per cui le seguenti matrici *non* sono invertibili:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & t \\ t+2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -t & -2 & -3 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 1 & 2 & -t \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3-t & -2 \\ -5 & -t \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -t & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix}$

6. Determinare l'inversa delle seguenti matrici::

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$