

CORSO DI MATEMATICA GENERALE

Esercitazione 1

Equazioni e disequazioni polinomiali e fratte - Insiemi:
operazioni e proprietà - Topologia della retta reale

Dr. Stefano Marini
smarini@mat.uniroma3.it

September 23, 2015

1 Equazioni e disequazioni polinomiali e fratte

1. Risolvere le seguenti equazioni:

- (a) $x^2 - 8x + 15 = 0$
- (b) $x^3 + 2x^2 + 2x = 0$
- (c) $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$
- (d) $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$
- (e) $\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+5} = \frac{46-x^2}{x^2-25}$
- (f) $\frac{7}{x+5} - \frac{2x}{x-2} = \frac{-3x^2+x-17}{x^2+3x-10}$
- (g) discutere le soluzioni, al variare di $k \in \mathbb{N}$, di $x^2 + kx - k - 1 = 0$.

2. Risolvere le seguenti disequazioni e sistemi di disequazioni:

- (a) $x^2 - 3 > 2x$
- (b) $(x+2)^2 \geq -x^3 + x^2 + 8x + 4$
- (c) $(x+2)^2 + (x-5)^2 > -2x^2 + 6x - 20$
- (d) $\frac{x-2}{x+3} < 0$
- (e) $\frac{x^2-2x-15}{3x-3} > 0$
- (f) $\begin{cases} 3x+2 \geq 0 \\ \frac{x^2-1}{x+1} < 0 \end{cases}$
- (g) $\begin{cases} x^3 - 2x^2 - 15x > 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$

2 Insiemi: operazioni e proprietà

Dati gli insiemi:

- $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 2\} \cap \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\}$
- $B = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$

rappresentarli sulla retta reale, esprimerli come intervalli e determinare:
 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup B^c$, $A \cap B^c$, $B \cup A^c$, $B \setminus A$, $A \setminus B^c$, $B \setminus A^c$.

3 Topologia della retta reale

6. Verificare che tutti i punti dell'intervallo $(-2, 1) \cup (2, 3)$ sono interni. Vale lo stesso per l'intervallo $(-2, 1] \cup [2, 3)$?
7. \mathbb{Z} (considerato come sottoinsieme di \mathbb{Q}) ha punti interni? $\mathbb{Z}^c = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ è aperto, chiuso, o nessuna delle due?
8. Siano $A = (-1, 1)$, $B = (0, 2]$ e $C = [0, 1]$. Determinare la frontiera di A , B e C . Cosa si può dire (a livello topologico) di $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $C \setminus A$?
9. Determinare i punti di accumulazione dell'insieme $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$.
10. Determinare, quando possibile, gli estremi (sup, inf, max o min) dei seguenti insiemi:
 - (a) $(-\infty, 0) \cup (1, 4]$
 - (b) $\mathbb{R} \setminus [0, +\infty)$
 - (c) $\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$