ESERCITAZIONE
MATEMATICA GENERALE
CLEMIF

Dott. Stefano Marini

01/12/2016, A.A. 2016/2017

Elementi di algebra lineare

1. Dire se i seguenti sotto insiemi di $\mathbb{R}^3$ sono anche sottospazi vettoriali:

   (a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + z = 0\}$;

   (b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 = z^2\}$;

   (c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$;

   (d) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xy + yz = 0\}$;

2. Stabilire la dimensione di $V = \textbf{span}\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ nei seguenti casi:

   (a) $\{v_1 = (0, 0, 1), v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 0, 0)\}$;

   (b) $\{v_1 = (0, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 1, 1)\}$;

   (c) $\{v_1 = (0, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$;

   (d) $\{v_1 = (0, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 2, 1)\}$;

   (e) $\{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, -3, -1)\}$;

   (f) $\{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, 4, 2), v_3 = (0, 0, 4)\}$;

   (g) $\{v_1 = (1, 3, 0), v_2 = (-e, e, 0)\}$;

   (h) $\{v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (11, 1, 0), v_3 = (-1, 1, 0)\}$;

   (i) $\{v_1 = (1, 1, 3), v_2 = (2, 2, 0), v_3 = (3, 3, -3)\}$;

3. Calcolare:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$;

   (c) $A^2 - 7I_2$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

   (d) $2A^2 - A^t + I_3$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

(e) O^tO con $O = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(f) U^tU con $U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$;

4. Calcolare determinante e rango delle seguenti matrici al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, se presente:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 & 5 \\ 4 & 13 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & 7 & 4 \\ 8 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{k}{2} & 1 & -1 \\ 1 & \frac{k}{2} & -\frac{k}{2} \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ k & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4k \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5. Risolvere i seguenti sistemi lineari:

(a) $\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 - 5X_3 = 2 \\ X_2 - X_3 = -1 \\ X_2 + X_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 + 2X_2 = 1 \\ X_2 - 2X_3 = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2X_2 + X_1 + 3X_3 = 1 \\ 2X_1 + X_2 + 4X_3 = 2 \\ 3X_1 - 3X_2 + X_3 = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} X_2 - X_3 = -1 \\ X_1 + X_3 = 1 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 = 2 \end{cases}$

6. Studiare il sistema $Ax = b$ al variare del paramametro $k \in \mathbb{R}$, quando presente:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} -k & 1 & -1 \\ -2 & k+1 & -2 \\ -1 & k & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$