ESERCITAZIONE
MATEMATICA GENERALE
CLEF

Dott. Stefano Marini & Dott. Gianluca Marzo

Giovedì, 14 dicembre 2017 - A.A. 2017/2018

Funzioni in più variabili reali

Massimi e minimi non vincolati

Esercizio 1. Determinare il gradiente, ∇f, e la matrice hessiana, $\mathrm{Hess}(f)$, nei seguenti casi.

(1) $f(x,y) = x^2 + 2xy - xy^2$;

(2) $f(x,y) = ye^{2x^2}$;

(3) $f(x,y) = y^2e^{-x}$;

(4) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$;

(5) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{7x+4y-2}}$;

(6) $f(x,y) = \log(1 - x^2 - y^2)$;

(7) $f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x}}{y}$;

(8) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$;

(9) $f(x,y,z) = xy^2 + yz^3 - z^2$;

(10) $f(x,y,z) = y\log(x)e^{zy}$;

(11) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

(12) $f(x,y,z) = \log(\frac{1}{z} + xy)$;

Esercizio 2. Determinare i punti critici delle seguenti funzioni in due variabili e studiarne la natura (cioè dire se tali punti sono: di massimo, di minimo o di sella).

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2$;

(2) $f(x,y) = x^2y$;

(3) $f(x,y) = e^y + xy$;

(4) $f(x,y) = x^3y^2 + 5x^2y - x^2y + 3$;

(5) $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$;

(6) $f(x,y) = 4x^4 - 16x^2y + x$;

(7) $f(x,y) = 2(x^2 + y^2 + 1) - (x^4 - y^4)$;

(8) $f(x,y) = 2(x^4 + y^4 + 1) - (x + y)^2$;

(9) $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$;

Massimi e minimi vincolati: Moltiplicatori di Lagrange

Esercizio 3. Determinare i massimi e minimi delle funzioni relativamente al vincolo indicato.

(1) $f(x,y) = x + y,$ $\qquad M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1 \}$

(2) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1,$ $\qquad M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 9 \}$

(3) $f(x,y) = x^2 + y^2,$ $\qquad M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-1)^2 + (y-2)^2 - 20 = 0 \}$

(4) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x,$ $\qquad M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1 \}$

(5) $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 6x - 12,$ $\qquad M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \}$

Massimi e minimi vincolati: Curve di livello e Sostituzione del Vincolo

Esercizio 4. Determinare i massimi e minimi delle funzioni relativamente utilizzando il metodo delle curve di livello o di sostituzione del vincolo.

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2, \qquad M = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2y - x = 0\,\}$$

$$f(x,y) = 4x^2 + 9y^2, \qquad M = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\,\}$$

$$f(x,y) = xy, \qquad M = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\,\}$$

$$f(x,y) = e^{x+3y}, \qquad M = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - 3y = 1\,\}$$

$$f(x,y) = x^2 + 3y, \qquad M = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\,\}$$