ESERCITAZIONE di
MATEMATICA GENERALE - CLEF
Prof.ssa Tessitore

Tutor: Dott. Dario Antolini e Dott. Gianluca Marzo

25/10/2018, A.A. 2018/2019

Notazione

Nel seguente foglio di esercizi, con log si indicherà il logaritmo naturale in base e (ovvero ln).

Limiti di funzioni

Es. 1. Verificare i seguenti limiti applicando la definizione.

1. $\lim_{x\to\frac{1}{2}}(4x-1)=1$
2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-3x+3}{1-x}=2$
3. $\lim_{x\to\frac{2}{3}}[2+\log(3x-1)]=2$
4. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x-1}=3$
5. $\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{2}{x}}=+\infty$
6. $\lim_{x\to 0^+}-\log x=+\infty$
7. $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{2}{|x|}}=0$
8. $\lim_{x\to +\infty}\frac{2^x-1}{2^x}=1$
9. $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-\log x}=0$

Es. 2. Calcolare i seguenti limiti di funzioni.

(1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x+1}{x^2-3x^3-4}$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{9x^2-16}-\frac{2x}{3x+4}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2+4x-1}{2x^5+4x^3+2}$

(4) $\lim_{x\to e^+}\frac{1}{1-\log x}$

(5) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x}}$

(6) $\lim_{x\to\frac{3}{2}^-}\frac{1}{4x^2-9}$

(7) $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2-x}}$

(8) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{4^x-4}$

(9) $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}}{x+7}$

(10) $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-x+1}{x^3-1}$

(11) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x^3-9x^2+27x-27}{x^3-1}$

(12) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{2x^2-9x+9}$

(13) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^x}$

(14) Sia $f(x)$ la funzione definita per casi:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{x+1} & \text{se } x\geq 0\\ \frac{x^2}{x^2+1} & \text{se } x<0.\end{cases}$$

Calcolare:

- $\lim_{x\to+\infty}f(x)$
- $\lim_{x\to-\infty}f(x)$
- $\lim_{x\to 0^\pm}f(x)$

(15) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

(16) $\lim_{x\to-\infty}\log(-x)+1$

(17) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-5x^3+x^2}{2x^3+4x^2-x}$

(18) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\sin x}$

(19) $\lim_{x\to\infty}\log_2\left(\frac{x+1}{x}\right)$

(20) $\lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{x-1}{x+1}}$

(21) $\lim_{x\to0} \frac{\log(2+x)}{x} - \frac{\log 2}{x}$

(22) $\lim_{x\to-\infty} -2x(e^{-\frac{1}{2x}} - 1)$

(23) $\lim_{x\to1}(1 - 3\log(1 + x))^{\frac{1}{\log(1+x)}}$

(24) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x+2\log x}{\log x+1}$

(25) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^{\frac{x-1}{2x}}$

(26) $\lim_{x\to1} \frac{x-1}{\log x}$

(27) $\lim_{x\to+\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1)$, per $a > 1$

(28) $\lim_{x\to0} \frac{\log(x+5)-\log 5}{x}$

(29) $\lim_{x\to0}(1 + x)^{\frac{1}{x}}$

(30) $\lim_{x\to0}(1 + 3x)^{\frac{2}{x}}$

(31) $\lim_{x\to1} \frac{e^x-e}{2x-2}$

(32) $\lim_{x\to0} \frac{e^{-4x}-1}{x^2-x}$

(33) $\lim_{x\to0^+}(2x)^{\frac{2}{\log 2x}}$

(34) $\lim_{x\to0^+} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{-3}{\log x}}$

(35) $\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{x}$

(36) $\lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos x^2}{x^5}$

(37) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{x}$

(38) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1 - \sin x)\tan x$

(39) $\lim_{x\to0} \frac{1-e^{2x}}{\sin x}$

(40) $\lim_{x\to0} \frac{\tan 3x}{\sin x}$

(41) $\lim_{x\to0} \frac{9\log(1+2x)}{\sin 3x}$

(42) $\lim_{x\to0} \frac{e^x-e^{-x}}{8x}$

(43) $\lim_{x\to+\infty}(x - 1)e^{\frac{x-1}{x}} - ex$

(44) $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+4}$

Asintoti

Es. 3. Determinare gli asintoti e la loro natura delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \frac{1}{\log(x-1)}$
2. $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x}$
3. $f(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{1}{1-x}$
4. $f(x) = \frac{1}{\sin x-1}$
5. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x^2-x}}$
6. $f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x}}$
7. $f(x) = \frac{1}{e^x-1}$
8. $f(x) = \frac{2e^{-x}}{x}$
9. $f(x) = \frac{1}{\log x}$
10. $f(x) = \frac{\cos 2x}{1+\sin x}$
11. $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\sin x}$
12. $f(x) = \frac{(x+3)\arctan x}{2-x}$
13. $f(x) = \frac{3-2\log x}{\log x-1}$
14. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
15. $f(x) = xe^{x+1}$
16. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$

Funzioni continue

Es. 4. Verificare se le seguenti funzioni sono continue.

1. $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-3x+9}$
2. $f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} 2x + x & \text{se } x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \log x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$
4. $f(x) = \frac{|x^2-16|}{x-4}$
5. $f(x) = 3 + \log|x|$
6. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$
7. $f(x) = \begin{cases} 2x - 7 & \text{se } x \leq 5 \\ 2x + 7 & \text{se } x > 5 \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x^2 - 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Es. 5. Determinare i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ affinché le seguenti funzioni siano continue in tutto $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{se } x \leq -3 \\ \alpha x + \beta & \text{se } -3 < x \leq 2 \\ x^3 + \alpha & \text{se } x > 2 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2\beta & \text{se } x < -1 \\ 2x - \beta & \text{se } -1 \leq x < 3 \\ \sqrt{2x + \alpha} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \log(x^3 - 28\alpha) - \log 2 - \log 10 & \text{se } x < 6 \\ \log(x + \alpha) & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} 2^{3x} - \alpha^5 - 29 & \text{se } x < 2 \\ 3^{x-1} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} + \alpha x + \beta & \text{se } x < 0 \\ x - \alpha & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2\beta}{\log_2(3-x)} \end{cases}$