

ESERCITAZIONE di
MATEMATICA GENERALE - CLEF
Prof.ssa Tessitore

Tutor: Dott. Dario Antolini e Dott. Gianluca Marzo

22/11/2018, A.A. 2018/2019

Determinante Rango e Inversa di Matrice

Es. 1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. [-6]

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. [6]

3. $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. [0]

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$. [16]

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. [0]

6. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 10 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. [24]

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. [66]

Es. 2. Calcolare il rango delle seguenti matrici.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. [2]

2. $\begin{pmatrix} \pi & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. [2]

3. $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. [2]

4. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. [1]

5. $\begin{pmatrix} e & 1 & -1 \\ 1 & e^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. [2]

6. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -6 & -8 \end{pmatrix}$. [2]

7. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$. [3]

8. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. [3]

9. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. [2]

10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. [4]

Es. 3. Calcolare, se esiste, l'inversa delle seguenti matrici:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right]$$

$$5. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$2. \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot [\#]$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} \\ 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \right]$$

$$3. \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \right]$$

$$7. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$4. \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Dipendenza e Indipendenza Lineare

Es. 4. Determinare per se esistono e per quali valori dei parametri reali indicati le seguenti uguaglianze risultino valide:

$$1. \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$4. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$5. \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$7. \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$8. \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Es. 5. Stabilire per ciascun dei seguenti sottoinsiemi di vettori il numero di vettori **linearmente indipendenti**, quindi la dimensione del sottospazio vettoriale generato. Si indichi quando i sottoinsiemi sono una base per l'opportuno spazio vettoriale.

$$A = \{(2, 1), (0, 1), (1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2;$$

$$B = \{(3, 1), (4, 2), (4, -2)\} \subseteq \mathbb{R}^2;$$

$$C = \{(2, -7), (1, 8)\} \subseteq \mathbb{R}^2;$$

$$D = \{(2, -8), (\frac{1}{4}, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^2;$$

$$E = \{(1, -4, 1), (4, 2, 1), (3, 5, 6)\} \subseteq \mathbb{R}^3;$$

$$F = \{(2, -3, 7), (3, 0, 9), (1, 3, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3;$$

$$G = \{(-1, 7, -3), (-2, 0, 5), (0, 8, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3;$$

$$H = \{(1, 2, 5, 9), (9, 2, 1, 0), (4, 9, 8, 9), (4, -8, 7, -3)\} \subseteq \mathbb{R}^4;$$

$$I = \{(-3, 1, 4, 1), (5, 9, 2, 6), (5, 3, 5, 8), (-9, 7, 9, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^4;$$

$$J = \{(0, 3, -6, 7), (8, 7, 9, -4), (4, 1, 17, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4;$$

Es. 6. Dire se i seguenti sottoinsiemi di vettori sono una base per lo spazio vettoriale indicato. In caso negativo si determinino i vettori linearmente indipendenti e si esprimano i rimanenti come combinazione lineare di quelli Linearmente Indipendenti.

$$A = \{(0, 1), (3, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$B = \{(-1, 1), (1, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$C = \{(3, 1), (4, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$D = \{(7, -4), (-2, \frac{8}{7})\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$E = \{(0, 7, 0), (7, 1, 0), (6, 7, 8)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$F = \{(5, 4, 7), (5, 2, 4), (4, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$G = \{(6, 6, 6), (2, 1, 3), (7, 7, 7)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$H = \{(7, 5, 2), (1, 0, -4), (8, 4, 8)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$I = \{(-2, 0, 0, 8), (5, -5, 3, 6), (9, 2, 3, 1), (8, 7, 6, 6)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$J = \{(-9, 7, -4, 0), (9, 0, 9, -1), (0, 3, -4, 0), (0, -2, 4, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$K = \{(6, 4, -4, 0), (3, 3, 2, -6), (8, -8, 7, 0), (5, 1, -1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$