

ESERCITAZIONE di MATEMATICA GENERALE - CLEF

Data: 11/12/2025 - A.A. 2025/2026

Esercizio 1.

Considera la seguente matrice $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Determina il polinomio caratteristico e gli autovalori di A , verificando che siano reali.
2. Per ogni autovalore λ , descrivi esplicitamente un insieme di autovettori indipendenti associati ad esso.

Esercizio 2.

Sia data la matrice $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calcola gli autovalori di B .
2. Determina il massimo numero di autovettori indipendenti associati a $\lambda = 1$.

Esercizio 3.

Considera la matrice simmetrica $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Dimostra che la matrice ammette tre autovalori reali individuando le loro molteplicità algebriche.
2. Per l'autovalore $\lambda = 5$, determina il massimo numero di autovettori indipendenti associati ad esso e quindi la sua molteplicità geometrica.
3. Fai la stessa cosa per gli altri autovalori.

Esercizio 4.

Date le matrici simmetriche $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare se A risulti definita positiva, negativa o indefinita.
2. Fare la stessa cosa con B e C .

Esercizio 5. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni:

$$(1) f(x, y) = x^4 - 2x^2y + 5xy^3 - y^2$$

$$(3) f(x, y) = ye^{xy}$$

$$(2) f(x, y) = \frac{1}{x^2y} + x\sqrt{y} - x^3y$$

$$(4) f(x, y) = y \ln(x)$$

$$(5) \quad f(x, y) = \frac{y}{x} - e^{y-x}$$

$$(8) \quad f(x, y) = \ln \left(\frac{y^2-1}{3x+2} \right)$$

$$(6) \quad f(x, y) = x \cos(y) - y^2 \sin(x)$$

$$(9) \quad f(x, y) = \frac{\sqrt{y+1}}{x}$$

$$(7) \quad f(x, y) = \frac{y}{x^2+1}$$

Esercizio 6. Per ciascuna delle seguenti funzioni, individuare i punti critici e determinare se si tratta di punti di massimo locale, minimo locale o sella.

$$(1) \quad f(x, y) = y^2 - 2y - x^2 + 4x$$

$$(5) \quad f(x, y) = y - y^3 - 4x^2y$$

$$(2) \quad f(x, y) = y^3 - x^2 - 3y + 2x$$

$$(6) \quad f(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^2 - y^3$$

$$(3) \quad f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 2y^3$$

$$(7) \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2)$$

$$(4) \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 16xy$$

$$(8) \quad f(x, y) = \cos(y) - xe^x$$

Esercizio 7. Individuare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5$$

lungo il vincolo $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$.