

MATEMATICA FINANZIARIA

Docente A. Fabretti

A.A. 2018/2019 - Compito test

Cognome Nome Matricola

1) (7 p.ti) Si vuole costituire un portafoglio immunizzato a copertura di un debito costituito dalle rate residue di un prestito. Il prestito di importo pari a C è stato contratto 4 anni fa al tasso annuo 4% e prevedeva il rimborso in 7 rate annue costanti. Sul mercato sono presenti uno ZCB con scadenza 1 anno e valore nominale 1000 e un BTP con scadenza 5 anni, valore nominale 100 cedola semestrale e $TAN = 5\%$. Assumendo una struttura di tassi piatta con tasso λ trovare le quote da investire nei due titoli. Trovare anche il valore finale del portafoglio.

Dati: $C = 100000$ $\lambda = 3\%$

Risposta: $q_1 = 35$ $q_2 = 130$ $V = 47133,37$

Trovare VA e D del debito. Il debito consiste nelle 3 rate residue del prestito

Trovare rata prestito $R = \frac{C}{a_{\overline{7}|4\%}} = \frac{100000}{\frac{1 - (1+0.04)^{-7}}{0.04}} = 16660,96$

$VA = R \cdot a_{\overline{3}|3\%} = 16660,96 \cdot \frac{1 - (1.03)^{-3}}{0.03} = 47127,38$

$D_{\text{debito}} = \frac{1+\lambda}{a} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} = \frac{1.03}{0.03} - \frac{3}{(1.03)^3 - 1} = 1.98$

Trovare prezzo e duration ZCB e BTP

ZCB $P_1 = VN(1+\lambda)^{-t} = 1000(1.03)^{-1} = 970,87$ $D_1 = 1$

BTP $P_2 = \frac{F}{(1+\frac{\lambda}{m})^n} + \frac{C}{a} \left(1 - \frac{1}{(1+\frac{\lambda}{m})^n}\right) = \frac{100}{(1+\frac{0.03}{2})^{10}} + \frac{5}{0.03} \left(1 - \frac{1}{(1+\frac{0.03}{2})^{10}}\right) = 101,17$

$D_2 = \frac{1+y}{my} - \frac{1+y+n(c-y)}{mc[(1+y)^n - 1] + my} = \frac{1+0.015}{0.03} - \frac{1+0.015+10(0.025-0.015)}{0.05[(1.015)^{10} - 1] + 0.03} = 4,51$

immunization

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = VA \\ W_1 D_1 + W_2 D_2 = D \end{cases} \quad W_1 = \frac{V_1}{VA} \quad \begin{cases} V_1 + V_2 = VA \\ V_1 D_1 + V_2 D_2 = VA \cdot D \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = VA - V_2 \\ (VA - V_2) D_1 + V_2 D_2 = VA \cdot D \end{cases}$$

$V_2 = \frac{VA(D - D_1)}{D_2 - D_1} = 13154,21$ $V_1 = 33973,17$

$q_1 = \frac{V_1}{P_1} = \frac{33973,17}{970,87} \approx 34,99 \rightarrow 35$

$q_2 = \frac{V_2}{P_2} = \frac{13154,21}{101,17} = 130,01 \rightarrow 130$

Valore Portafoglio

$q_1 P_1 + q_2 P_2 = 35 \cdot 970,87 + 130 \cdot 101,17 = 47133,37$

2) (6 p.ti) Sul mercato sono presenti i seguenti titoli

- uno ZCB scadenza 1 anno e prezzo $P_1 = 96.84$
- uno ZCB scadenza 2 anni e prezzo $P_2 = 94.21$
- un BTP scadenza 3 anni, TAN=4% e prezzo $P_3 = 96.78$
- un BTP scadenza 4 anni, TAN=7% e prezzo $P_4 = 104.36$

estrarre la struttura dei tassi.

Risposta: $i(0,1) = 3.26\%$ $i(0,2) = 3.03\%$ $i(0,3) = 4.59\%$ $i(0,4) = 5.09\%$

$$i(0,1) = \left(\frac{P_{ZCB\ 1\ anno}}{VN} \right)^{1/t} - 1 = \left(\frac{96.84}{100} \right)^{1/1} - 1 = 3.26\%$$

$$i(0,2) = \left(\frac{P_{ZCB\ 2\ anni}}{VN} \right)^{1/t} - 1 = \left(\frac{94.21}{100} \right)^{1/2} - 1 = 3.03\%$$

$$P_{BTP\ 3\ anni} = 4(1+i(0,1))^{-1} + 4(1+i(0,2))^{-2} + 104(1+i(0,3))^{-3} \Rightarrow i(0,3) = \left(\frac{96.78 - 4(1.0326)^{-1} - 4(1.0303)^{-2}}{104} \right)^{-1/3} - 1$$

$$P_{BTP\ 4\ anni} = 7(1+i(0,1))^{-1} + 7(1+i(0,2))^{-2} + 7(1+i(0,3))^{-3} + 107(1+i(0,4))^{-4} = 4.59\%$$

$$i(0,4) = \left(\frac{104.36 - 7(1.0326)^{-1} - 7(1.0303)^{-2} - 7(1.0459)^{-3}}{107} \right)^{-1/4} - 1 = 5.09\%$$

3) (5 p.ti) Dati 3 titoli rischiosi con vettore dei rendimenti attesi $\bar{r} = (10\%, 15\%, 20\%)$ e matrice di varianza covarianza

$$V = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

trovare rendimento e varianza del portafoglio che vede impegnati 10000 euro nel primo titolo 5000 nel secondo e 20000 nel terzo e stabilire se è efficiente.

Risposta: **rendimento = 16.43%** **varianza = 12.76%** **NO EFFICIENTE**

$$w_1 = \frac{10000}{10000 + 5000 + 20000} = \frac{10000}{35000} = \frac{2}{7} \quad w_2 = \frac{5000}{35000} = \frac{1}{7} \quad w_3 = \frac{20000}{35000} = \frac{4}{7}$$

$$\text{Rendimento} = \frac{2}{7} \cdot 0.1 + \frac{1}{7} \cdot 0.15 + \frac{4}{7} \cdot 0.2 = 0.1643$$

$$\text{Varianza} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.20 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} = 0.1276$$

Efficiente no perché

$$(V \cdot \vec{w} ; \bar{r} ; \vec{1}) \text{ ha rango } 3 \quad \text{infatti dei} \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{70} & 1 \\ \frac{2}{140} & \frac{3}{25} & 1 \\ \frac{6}{35} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

e $(\bar{r} ; \vec{1})$ ha rango 2 quindi \vec{w} non soddisfa equazioni di Markowitz

4) (*4 p.ti*) Enunciare e discutere il Teorema di un fondo.

5) (*4 p.ti*) Mostrare come si ricava il valore attuale di una rendita perpetua anticipata di rata R .

6) (2 p.ti) Usando la struttura dei tassi dell'esercizio 2, trovare il prezzo a termine di uno ZCB emesso tra 1 anno e durata 2 anni e valore nominale 100.

$$ZCB(0, 1, 3) = 100 \cdot \frac{v(0, 3)}{v(0, 1)} = \frac{0.8760}{0.9684} \cdot 100 = 90.25$$

7) (2 p.ti) Ho investito un capitale di 3500 in capitalizzazione composta per 4 anni al tasso 5% e successivamente il montante che ne è risultato in capitalizzazione semplice per 3 mesi e 21 giorni al tasso 4%. Trovare il tasso equivalente in capitalizzazione composta.

$$M = 3500 (1 + 0.05)^4 \cdot \left(1 + \frac{101}{365} \cdot 0.04\right) = 4301.4$$

$$M = C (1 + i)^T \quad i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{T}} - 1 = \left(\frac{4301.4}{3500}\right)^{\frac{4 + \frac{101}{365}}{1}} - 1 = 4.94 \%$$

8) (2 p.ti) Calcolare le spese di un prestito di importo effettivo 20000 da rimborsare in 36 rate mensili con $TAN = 2\%$ e $TAE = 3.5\%$.

Per ricavare la rata del prestito si usa la TAE e l'importo effettivo

$$R = \frac{20000}{a_{\overline{36}|i_m}} = \frac{20000}{34.1556} = 585.55$$

$$i_m = (1 + TAE)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.29\%$$

per ottenere il prestito complesso di spese uso la rata e la TAN

$$Prestito = R a_{\overline{36}|\frac{TAN}{12}} = 585.55 \cdot \left(\frac{1 - \left(1 + \frac{0.02}{12}\right)^{-36}}{\frac{0.02}{12}} \right) = 585.55 \cdot 34.9131 = 20443$$

$$Spese = Prestito - 20000 = 20443 - 20000 = 443$$